

## СТІЙКІСТЬ ГНУЧКОГО СТАЛЕВОГО СТРИЖНЯ, ПОСИЛЕНОГО ЗБІЛЬШЕННЯМ ПЕРЕТИНУ І ДВОМА ПРУЖНИМИ ПІДКРІПЛЕННЯМИ

© Більський М.Р., 2007

**Розв’язується задача стійкості гнучких сталевих стрижнів, посиленних проміжними пружними підкріпленнями і збільшенням поперечного перерізу.**

**This article expounds about method of calculation for flexible compressed rods, which are strengthened on the part of length with spring props and by increasing cross section of construction. Based on the decision of stability flexible rod with different cross section and two resilient props authors draw conclusion that at null stiffness of flexible props received equation corresponded to known equation.**

**Актуальність проблеми.** Перший граничний стан гнучкого сталевго стрижня характеризується його стійкістю. Посилення гнучких сталевих стрижнів, що працюють на стиск, доцільно здійснювати зміною їхньої розрахункової довжини в комбінації зі збільшенням перетинів найбільш навантажених ділянок [1, 2].

Зменшення вільної довжини стиснутого стрижня здійснюється влаштуванням поперечних пружних підкріплень. У зв’язку з цим актуальними є дослідження стійкості такого стрижня.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Для розв’язання багатьох задач стійкості стиснутого пружного стрижня можна користуватися диференційними рівняннями зігнутої осі з подальшим використанням методу характеристичних рядів [4]. У разі відсутності пружних підкріплень задача стійкості пружного стрижня розв’язана у [3]. Проблеми посилення стрижневих сталевих конструкцій розглядаються також і в [2, 5].

Невирішена раніше частина проблеми полягає ось у чому. Для отримання аналітичного розв’язку задачі стійкості посиленого гнучкого стрижня необхідно змоделювати посилювальну систему пружними підкріпленнями з заздалегідь вирахованими їхніми параметрами пружності. Такими опорами можуть бути симетричні односторонні зв’язки та інші системи посилення за зміни розрахункової схеми. Останню в розрахунках поздовжньо стиснутих стрижнів традиційними методами приймають як стрижень, який має по довжині абсолютно штивні поперечні закріплення, що не відповідає дійсності.

Розрахункова схема поздовжньо стиснутого стрижня, шарнірно опертого на двох опорах, може бути замінена двома консольним стрижнями зі спільним защемленням.

**Мета роботи** – отримати характеристичне рівняння задачі стійкості стрижня з проміжними пружними опорами змінної штивності  $EI_1 \rightarrow EI_2$ , де  $EI_2$  – штивність посиленої частини збільшенням перетину частини.

**Виклад основного матеріалу.** Задача зводиться до розгляду гнучкого консольного стрижня завдовжки  $l$ , що складається з двох ділянок завдовжки  $a$  і  $b$ , де  $b = l - a$ , що має штивності  $EJ_2 \cdot EJ_1$  відповідно. У верхньому кінці стрижня ( $x = l$ ) прикладена стискаюча сила  $P_1$  і встановлене в поперечному напрямку пружне закріплення  $z_1$ . На відстані від нижнього заземленого кінця ( $x = a$ ) прикладена вертикальна стискаюча сила  $P_2$ . У цьому вузлі в поперечному напрямку встановлене пружне підкріплення, що має твердості  $z_2$ .

Прогин стрижня для вузлів верхньої і нижньої ділянок позначимо через  $y(x)$  і  $Z(x)$  відповідно.

Диференціальні рівняння вигнутої осі стрижня для кожної з цих ділянок матиме такий вигляд:

$$EJ_1 y''(x) = P_1 [y(I) - y(x)] - (I-x)c_1 y(I); \quad a \leq x \leq I; \quad (1)$$

$$EJ_2 Z''(x) = P_2 [Z(a) - Z(x)] - (a-x)c_2 Z(a) - c_1 (I-x)y(I) + P_1 [y(I) - Z(x)]; \\ 0 \leq x \leq a. \quad (2)$$

Диференціюючи двічі кожне з рівнянь (1), (2), одержимо

$$y^{IV}(x) = K_1^2 y''(x) = 0, \quad a \leq x \leq I; \quad (3)$$

$$K_1 = \sqrt{\frac{P_1}{EJ_1}};$$

$$Z^{IV}(x) = K_2^2 Z''(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq a;$$

$$K_2 = \sqrt{\frac{P_1 + P_2}{EJ_2}}. \quad (4)$$

Відповідно до рівняння (1) за  $x=I$  приходимо до крайових умов такого вигляду:

$$y''(I) = 0;$$

$$y'''(I) + K_1^2 y'(I) - \gamma_1 y(I) = 0; \quad (5)$$

$$\gamma_1 = \frac{c_1}{EJ_1}. \quad (6)$$

За умовою задачі в крапці  $x=0$  стрижень жорстко затиснений. Тому

$$Z(0) = Z'(0) = 0. \quad (7)$$

Умови сполучення для прогинів  $y(x)$  і  $Z(x)$  у вузлі  $x=a$ :

$$Z(a) = y(a);$$

$$Z'(a) = y'(a);$$

$$EJ_1 y''(a) = P_1 [y(I) - y(a)] - bc_1 y(I); \quad (8)$$

$$EJ_2 Z''(a) = P_1 [y(I) - Z(a)] - bc_1 y(I);$$

З огляду на перше з умов (8), знаходимо

$$Z''(a) - ny''(a) = 0, \quad n = \frac{EJ_1}{EJ_2}. \quad (9)$$

Диференціюючи один раз рівняння (1), (2) і приймаючи потім  $x=a$ , одержимо

$$EJ_1 y'''(a) = P_1 y'(a) + c_1 y(I),$$

$$EJ_2 Z'''(a) = -(P_1 + P_2)Z'(a) + c_2 Z(a) + c_1 y(I).$$

На підставі цих рівностей, з врахуванням другої з умов (8), приходимо до останньої з їхніх умов сполучення:

$$Z'''(a) + nZ'(a) - \gamma_2 Z(a) - ny'''(a) = 0, \quad (10)$$

де

$$\gamma = \frac{P_2}{EJ_2}; \quad \gamma_2 = \frac{c_2}{EJ_2}.$$

Отже, розв'язання сформульованої вище задачі полягає в тому, щоб визначити, за якого співвідношення параметрів, що характеризують розглянуту систему прямолінійна форма її рівноваги є стійкою. Для розв'язання цієї задачі досить побудувати її характеристичне рівняння і скористатись методом характеристичних рядів [3].

Розв'язок рівняння (4), що задовольняє крайовим умовам, має такий вигляд:

$$Z(x) = C_1 \left( \frac{\sin K_2 x}{K_2} - x \right) + C_2 (\cos K_2 x - 1),$$

тому

$$\begin{aligned} Z(a) &= \left( \frac{\sin K_2 a}{K_2} - a \right) + C_1 + (\cos K_2 a - 1)C_2; \\ Z'(a) &= (\cos K_2 a - 1)C_1 - K_2 \sin K_2 a C_2; \\ Z''(a) &= -K_2 \sin K_2 a C_1 - K_2^2 \cos K_2 a C_2; \\ Z'''(a) &= -K_2^2 \cos K_2 a C_1 + K_2^3 \sin K_2 a C_2. \end{aligned}$$

Загальний розв'язок рівняння (3) має вигляд

$$y(x) = C_3 \frac{\sin K_1 x}{K_1} + C_4 \cos K_1 x + C_5 + C_6 x.$$

Задовольняючи цим крайовим умовам (5) і (6), одержимо систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} -C_3 \sin K_1 I - K_1 C_4 \cos K_1 I &= 0, \\ (K_1^2 - \gamma_1 I)C_6 - \gamma_1 C_5 &= 0. \end{aligned}$$

Звідки

$$\begin{aligned} C_4 &= \frac{1}{K_1} \operatorname{tg} K_1 I C_3; \\ C_6 &= \frac{\gamma_1}{K_1^2 - I \gamma_1} C_5. \end{aligned}$$

Тоді для прогину знаходимо точний розв'язок:

$$y(x) = \frac{C_3}{K_1 \cos K_1 I} \sin K_1 (x - I) + \frac{K_1^2 + \gamma_1 (x - I)}{K_1^2 - I \gamma_1} C_5. \quad (11)$$

Тому

$$\begin{aligned} y(x) &= -\frac{\sin K_1 b}{K_1 \cos K_1 I} C_3 + \frac{K_1 - \gamma_1 b}{K_1 - \gamma_1 I} C_5; \\ y'(x) &= \frac{\cos K_1 b}{\cos K_2 I} C_3 + \frac{\gamma_1}{K_1^2 - \gamma_1 I} C_5; \\ y''(x) &= \frac{K_1 \sin K_1 b}{\cos K_1 I} C_3; \\ y'''(x) &= -\frac{K_1 \sin K_1 b}{\cos K_1 I}. \end{aligned}$$

Підставивши знайдені значення функцій  $y(x)$  і  $Z(x)$  і їхніх похідних за  $x=a$  в умови рівності (8)–(10), одержимо систему однорідних алгебраїчних рівнянь щодо сталих  $C_b$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_5$ :

$$a_{11} C_1 + a_{12} C_2 + a_{13} C_3 + a_{14} C_5 = 0, \quad (12)$$

де  $i=1, 2, 3, 4$ , а елементи  $a_{ij}$  мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\sin K_2 a}{K_2} - a; \quad a_{12} = \cos K_2 a - 1; \\ a_{13} &= \frac{\sin K_1 a}{K_1 \cos K_1 I}; \quad a_{14} = -\frac{K_1^2 - \gamma_1 b}{K_1^2 - \gamma_1 I}; \\ a_{21} &= a_{12}; \quad a_{22} = -K_2 \sin K_2 a; \\ a_{23} &= -\frac{\cos K_1 b}{\cos K_1 I}; \quad a_{24} = -\frac{\gamma_1}{K_1^2 - \gamma_1 I}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{31} &= -K_2^2 \cos K_2 a + \gamma(\cos K_2 a - 1) - \gamma_2 \left( \frac{\sin K_2 a}{K_2} - a \right); \\
a_{32} &= K_2^3 \sin K_2 a - \gamma K_2 \sin K_2 a - \gamma(\cos K_2 a - 1); \\
a_{33} &= n \frac{K_1^2 \cos K_1 b}{\cos K_1 I}; \quad a_{34} = a_{44} = 0; \\
a_{41} &= -K_2 \sin K_2 a; \quad a_{42} = -K_2^2 \cos K_2 a; \\
a_{43} &= \frac{n K_1 \sin K_1 a}{\cos K_1 I}.
\end{aligned}$$

Нетривіальне розв'язання системи (11) можна одержати, дорівнявши до нуля її детермінант. Останнє приводить до характеристичного рівняння розглянутої задачі. Після перетворень це рівняння матиме такий вигляд:

$$\begin{aligned}
& \left[ K_2^2 (K_1^2 - \gamma_1 b) (\gamma + n K_1^2 - a \lambda - n a K_1^2 K_1^2) \right] \cos K_1 b \cos K_2 a + \\
& + [n K_1 K_2 (K_1^2 - \gamma_1 b) (a \gamma_2 - K_2^2) + \frac{K_2}{K_1} \gamma_1 \gamma_2 - n a \gamma_1 K_1 K_2 (\gamma - K_2^2)] \sin K_1 b \sin K_2 a + \\
& + [2 n \gamma_2 K_1 (K_1^2 - \gamma_1 b) + n \gamma_1 K_1 (K_2^2 - 2 \gamma) - \frac{K_2^2}{K_1} \gamma_1 (a \gamma_2 - \gamma)] \sin K_1 b \cos K_2 a + \\
& + [n \gamma_1 K_1^2 K_2 + \gamma_2 K_2 (K_1^2 - \gamma_1 b)] \cos K_1 b \sin K_2 a - \\
& - [2 n \gamma_2 K_1 (K_1^2 - \gamma_1 b) + n \gamma_1 K_1 (K_1^2 - 2 \gamma) - n \gamma_1 K_1 (K_1^2 - 2 \gamma) + \frac{\gamma_1 K_2^2}{K_1} (\gamma - K_2^2)] \sin K_1 b = 0.
\end{aligned}$$

**Висновки:** 1. У разі відсутності пружних підкріплень (стрижень не посилені), тобто за  $Z_1=0$  і  $Z_2=0$ , приходимо до відомого характеристичного рівняння [3]:

$$I - \gamma + \frac{n K_1 K_2}{n K_1^2} \operatorname{tg} K_1 b \operatorname{tg} K_2 b = 0.$$

2. Для непідсиленого стрижня постійного по довжині перетину  $n = 1$ , навантаженого тільки однією вертикальною силою  $P_1$ :

$$P_2 = 0; \quad \gamma_2 = 0; \quad a = 0; \quad \gamma_1 = \infty.$$

Приходимо також до відомого рівняння  $\operatorname{tg} K_1 = K_1$ .

1. Бельский М.Р. Усиление сжатых стержней стальных конструкций под эксплуатационной нагрузкой. – М.: Стройиздат, 1984. – 153 с. 2. Клименко Ф.Є., Барабаш В.М., Стороженко Л.І. Металеві конструкції. – Львів: Світ, 2002. – 312 с. 3. Смирнов А.Ф., Шапошников Н.И. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений. – М.: Стройиздат, 1984. 4. Зорій Л.М. До теорії стійкості систем з розподіленими параметрами // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1968. – № 11. – С. 992–995. 5. Гоголь М.В., Пелешко І.Д., Більський М.Р. Регулювання зусиль у стрижневих металевих конструкціях // Матеріали V Міжнар. наук-техн. конф. “Будівельні металеві конструкції”. БМК 2006. 12–22.09 – 2006 р. – К.: УкрНДІпроектстальконструкція, 2006. – С. 93–95.