

В.М. Жук, І.З. Рутковська, І.Ю. Попадюк\*  
 Національний університет “Львівська політехніка”,  
 кафедра будівельних конструкцій та мостів  
 \*кафедра гідравліки та сантехніки

## ГІДРОГРАФИ ПРИТОКУ ДЛЯ ДОЩІВ ЗІ СТЕПЕНЕВИМ ЗАКОНОМ ЗМІНИ ІНТЕНСИВНОСТІ ТА ТРИКУТНИХ В ПЛАНІ БАСЕЙНІВ СТОКУ

© Жук В.М., Рутковська І.З., Попадюк І.Ю., 2007

**Виконано теоретичний аналіз та числовий експеримент з моделювання гідрографів притоку атмосферних стічних вод з трикутних в плані басейнів стоку для дощів зі спадним степеневим законом зміни інтенсивності в часі. Отримано вирази для обчислення часу ефективної та повної концентрації поверхневого стоку, а також відповідних витрат.**

**The theoretical analysis and numerical simulation are performed to model the stormwater hydrographs for the triangular watersheds for the rains with decreasing power law of the intensity variation in time. The formulas for the time of effective and full concentration so as the consequent discharges of the surface flow are obtained.**

**Постановка проблеми.** Враховуючи велику кількість чинників, що впливають на процес концентрації поверхневого стоку з забудованих міських територій, за математичного моделювання притоку дощових вод приймають багато спрощень щодо характеристик дощу, властивостей басейну стоку та гідравлічних параметрів поверхневого потоку. Одним з найважливіших чинників, який впливає на динаміку притоку дощових стічних вод, є форма басейну стоку в плані.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Сьогодні у вітчизняних методиках для моделювання гідрографів притоку дощових стічних вод найчастіше використовують так звану лінійну модель концентрації поверхневого стоку. За цією моделлю інтенсивність випадання дощу задається степеневим спадним у часі законом, басейн стоку наближено вважається однорідним і лінійним у плані, а швидкість поверхневого потоку приймається однаковою в усіх точках басейну [1, 2].

За лінійної моделі узагальнений триетапний безрозмірний гідрограф притоку дощових стічних вод описується рівняннями (1)–(3):

$$Q'_{1,lin} = X^{1-n} \quad \text{за } X \leq 1; \quad (1)$$

$$Q'_{2,lin} = X^{1-n} - (X - 1)^{1-n} \quad \text{за } 1 < X \leq X_0; \quad (2)$$

$$Q'_{3,lin} = X_0^{1-n} - (X - 1)^{1-n} \quad \text{за } X_0 < X \leq (X_0 + 1), \quad (3)$$

де  $Q' = Q/Q_{r,lin}$  – безрозмірна витрата дощового стоку;  $X, X_0$  – безрозмірний поточний час,  $X = t/t_r$ ;  $t_r$  – час концентрації поверхневого стоку;  $X_0$  – безрозмірна тривалість дощу,  $X_0 = t_d/t_r$ ;  $Q_r$  – максимальна витрата дощового стоку:

$$Q_{r,lin} = \frac{Z_{mid} AF}{(1-n) \cdot t_r^n}, \quad (4)$$

де  $Z_{mid}$  – середній по площі коефіцієнт поверхні басейну стоку;  $A, n$  – параметри в степеневому законі зміни інтенсивності дощу  $q = A/t^n$ ;  $F$  – загальна площа басейну стоку.

Як показано у [3, 4], для басейнів стоку радіальної форми в плані існує істотно відмінна динаміка притоку дощового стоку в часі (5)–(7) та значно більша розрахункова витрата стічних вод (8):

$$Q'_{1,pa0} = \frac{2}{2-n} X^{2-n} \quad \text{за } X \leq 1; \quad (5)$$

$$Q'_{2,pa0} = \frac{2}{2-n} [X^{2-n} - (X-1)^{2-n} - (2-n)(X-1)^{1-n}] \quad \text{за } 1 < X \leq X_0; \quad (6)$$

$$Q'_{3,pa0} = 2[(X-X_0)X_0^{1-n} - (X-1)^{1-n}] + \frac{2}{2-n} [X_0^{2-n} - (X-1)^{2-n}] \quad \text{за } X_0 < X \leq (X_0+1); \quad (7)$$

$$Q_{r,pa0} = \frac{2Z_{mid}AF}{(1-n) \cdot (2-n)t_r^n} \quad (8)$$

У [4, 5] було виконано серію числових експериментів та теоретичний аналіз гідрографів притоку з прямокутних в плані басейнів стоку з різним співвідношенням довжин сторін  $L$  та  $B$  (рис. 1).

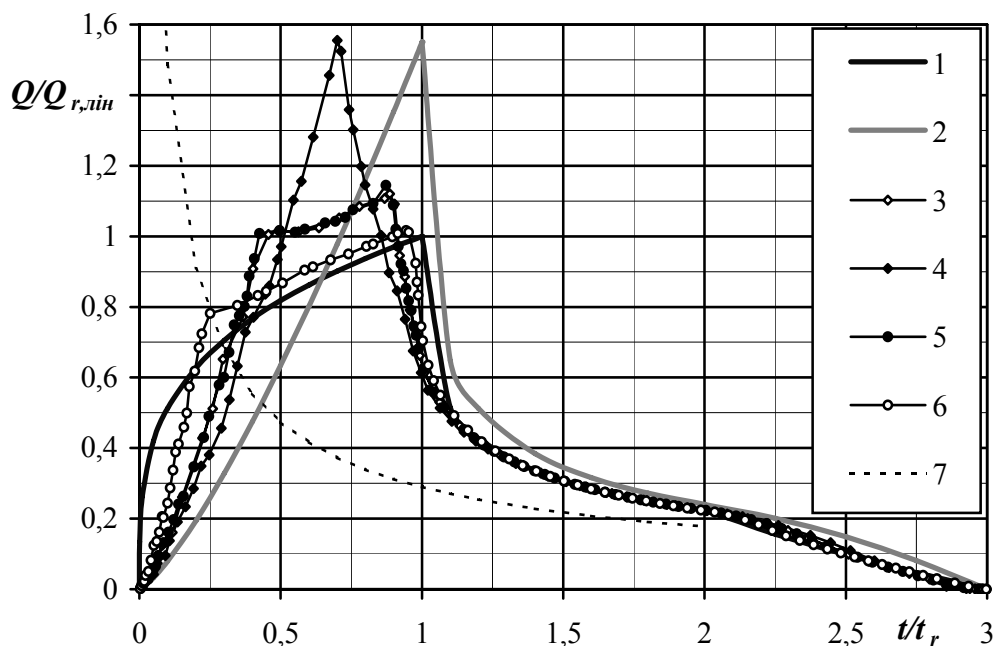


Рис. 1. Узагальнені гідрографи притоку дощових стічних вод для:  
1 – лінійної; 2 – радіальної моделі концентрації поверхневого стоку та для прямокутних басейнів стоку з відношенням сторін  $L/B$ : 3 – 0,25; 4 – 0,5; 5 – 1; 6 – 2; 7 – крива дощу; ( $n=0,71$ ;  $t_0/t_r=2$ )

Було показано, що існує симетрія гідрографів з різними співвідношеннями  $L/B$  стосовно значення  $L/B=0,5$ , за якого безрозмірна максимальна витрата навіть дещо більша, ніж для радіальної моделі. За значень  $L/B \leq 0,125$  та  $L/B \geq 2$  безрозмірні гідрографи притоку з прямокутних в плані басейнів практично не відрізняються від аналітичного гідрографа для лінійної моделі.

Проте багато населених проектів мають неортогональний характер забудови. У зв'язку з цим важливо дослідити закономірності формування гідрографів притоку з непрямокутних у плані басейнів стоку.

**Мета роботи** – аналітично дослідити та чисельно змоделювати концентрації поверхневого стоку з трикутних в плані басейнів стоку секторного типу з розрахунковим перерізом у вершині трикутника.

**Результати досліджень. 1. Аналітичний підхід до моделювання поверхневого стоку.** Розглянемо концентрацію дощового стоку з поверхні трикутних у плані басейнів стоку секторного типу завдовжки  $L$  з різними значеннями центрального кута  $\alpha = \arctg(a)$  за умови, що швидкість поверхневого потоку в усіх точках басейну однакова та незмінна в часі (рис. 2). Вектори швидкості в усіх точках прийнято спрямованими у бік розрахункового перерізу (т. О).

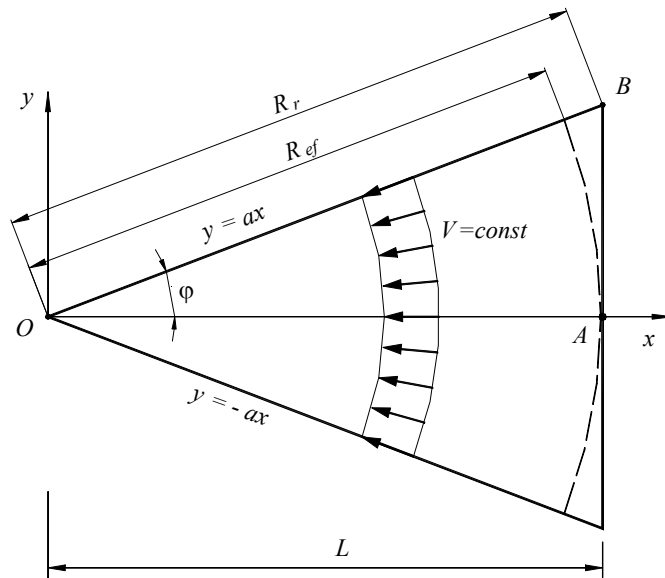


Рис. 2. Схема поверхневої концентрації дощових вод з трикутного басейну стоку

До моменту часу, що дорівнює часу ефективної концентрації дощового стоку  $t_{ef} = R_{ef}/V$ , площа поверхні стоку наростає в часі за квадратичним законом, як в радіальній моделі. Тому відповідні ділянки гідрографів повинні являти собою угнуті степеневі криві, такі самі, як для радіальної моделі. Проте, оскільки витрата в розрахунковому перерізі належить до загальної площі басейну стоку, а не до площі, окресленої ефективним радіусом концентрації, а безрозмірний час визначається як частка поточного часу і часу повної концентрації, а не ефективного часу концентрації, то перший етап безрозмірного гідрографа притоку для трикутних басейнів стоку подібний до гідрографа першого етапу радіальної моделі, zdeформованого по осі  $x$  з коефіцієнтом  $k_x$ , а по осі  $y$  – з коефіцієнтом  $k_y$ .

Витрата дощового стоку в момент часу  $t_{ef}$ :

$$Q_{ef} = \frac{2Z_{mid}AF_{ef}}{(1-n) \cdot (2-n)t_{ef}^n} \quad (9)$$

Стиснення по осі абсцис  $k_x$  чисельно дорівнює відношенню ефективного та розрахункового часу концентрації:

$$k_x = \frac{t_{ef}}{t_r} = \frac{R_{ef}}{R_r} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \quad (10)$$

Деформація вздовж осі  $y$  ( $k_y$ ) дорівнює відношенню ефективної та розрахункової витрати:

$$k_y = \frac{Q_{ef}}{Q_{r,min}} = \frac{2F_{ef} \cdot t_r^n}{(2-n)F \cdot t_{ef}^n} = \frac{2\arctg(a)}{(2-n)a} (1+a^2)^{n/2} \quad (11)$$

Залежність коефіцієнтів  $k_x$  і  $k_y$  від геометричного параметра  $a$  за  $n = 0,71$  наведена в таблиці та зображена графічно на рис. 3.

#### Залежність коефіцієнтів $k_x$ і $k_y$ від геометричного параметра $a$

$a$	0,01	0,2	0,5	0,8	1	1,2	1,5	2	5
$k_x = X_{ef}$	1,0000	0,9806	0,8944	0,7809	0,7071	0,6402	0,5547	0,4472	0,1961
$k_y = Q'_{ef}$	1,5504	1,5517	1,5562	1,5587	1,5574	1,5535	1,5436	1,5197	1,3539

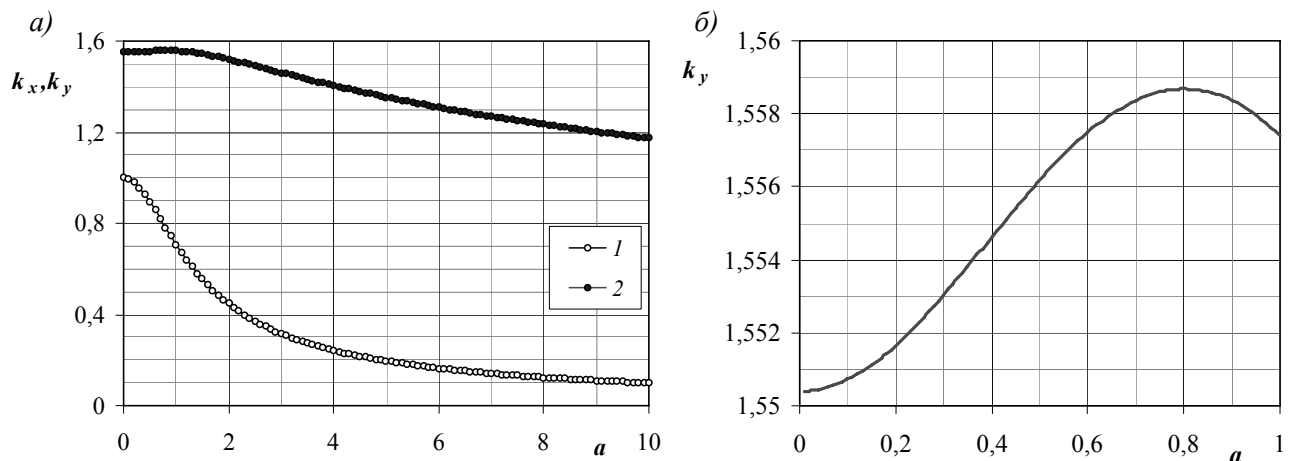


Рис. 3. Залежність коефіцієнтів  $k_x$  і  $k_y$  від геометричного параметра  $a$  за  $n=0,71$ :  
 $a$  – 1 –  $k_x$ ; 2 –  $k_y$ ; б) – коефіцієнт  $k_y$  за  $a < 1$

Максимум функції  $k_y=f(a)$  відповідає значенню  $a$ , яке є коренем рівняння:

$$\operatorname{arctg}(a) = \frac{a}{a^2 + 1 - na^2}.$$

За значення  $n=0,71$ , характерного для рівнинних областей України, максимальна безрозмірна витрата з трикутних у плані басейнів стоку відповідає значенню  $a=0,801$  і дорівнює  $(k_y)_{\max} = 1,5587$ .

**2. Числовий експеримент.** Для перевірки теоретичних результатів, отриманих для трикутних у плані басейнів стоку, було виконано серію числових експериментів з моделювання гідрографів притоку для басейнів з різними значеннями геометричного параметра  $a$ . При цьому вектори швидкості руху поверхневого стоку приймалися в усіх точках рівними за величиною, і такими, що проходять через розрахунковий переріз.

Авторами було розроблено програму для числового розрахунку притоку дощових стічних вод в т. О у будь-який момент часу. Поверхню басейну стоку розбивали на елементарні комірки ортогональною сіткою з кроками  $\Delta x$  і  $\Delta y$ . Витрата дощових стічних вод з кожної комірки визначалася за формулою

$$\Delta Q_i = \frac{AZ_{\text{mid}} \Delta x \Delta y}{(t - r/V)^n}.$$

Витрата атмосферних стічних вод в розрахунковому перерізі в момент часу  $t$ :

$$Q = \sum_{x=0}^L \sum_{y=-ax}^{ax} \Delta Q_i.$$

За  $t < t_r$  сума береться лише для комірок, для яких виконується умова

$$r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \leq Vt.$$

За  $t_r \leq t < t_\delta$  числове інтегрування проводиться по всій площі  $F$ , а після припинення розрахункового дощу ( $t_\delta \leq t < (t_\delta + t_r)$ ) – лише за комірками, для яких

$$r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \geq V(t - t_\delta).$$

Контроль похибки обчислень здійснювався за трьома показниками: за відносною різницею розрахункової повної площі трикутного басейну та аналітичної  $F = aL^2$ , за відхиленням розрахункової ефективної витрати  $Q_{ef}$  від її аналітичного значення за (9), а також за відхиленням розрахункового об'єму атмосферних стічних вод від його аналітичного значення, який знаходили за формулою

$$W_{\text{теор}} = \frac{Z_{\text{mid}} A F t_{\text{д}}^{1-n}}{(1-n)} \quad (12)$$

Просторовий крок приймали таким, що дорівнює  $\Delta x = \Delta y = 0,1$  м, а часовий крок –  $\Delta t = 1$  с. Числовий експеримент виконувався для трикутних в плані басейнів стоку різної довжини  $L$  з актуальними для практики значеннями геометричного параметра  $a$  від 0,2 до 5. Відносна похибка обчислень за площею у дослідженому діапазоні не перевищувала 0,3 %, за ефективною витратою – 2,2 %, за об'ємом – 1,2 %.

Для можливості зіставлення різних результатів числового експерименту між собою та з теоретичними залежностями результати числового розрахунку подавали у відносних координатах. За базову витрату, до якої належать розрахункові значення витрат, брали розрахункову витрату для лінійної моделі концентрації поверхневого стоку, як таку, що найчастіше застосовується у діючих вітчизняних методиках побудови гідрографів стоку.

Як показали дослідження різних басейнів прямокутної форми в плані, абсолютний розмір басейну стоку не впливає на узагальнений гідрограф притоку в безрозмірних координатах. Аналогічно, безрозмірний гідрограф притоку не залежить від абсолютного значення швидкості течії поверхневого стоку.

Отже, для прийнятої моделі концентрації поверхневого стоку безрозмірний гідрограф притоку з трикутних у плані басейнів стоку залежить лише від геометричного параметра  $a$ .

Узагальнені гідрографи притоку дощових стічних вод для трикутних у плані басейнів стоку зі значеннями геометричного параметра у діапазоні  $a=0,5-5,0$  показано на рис. 4.

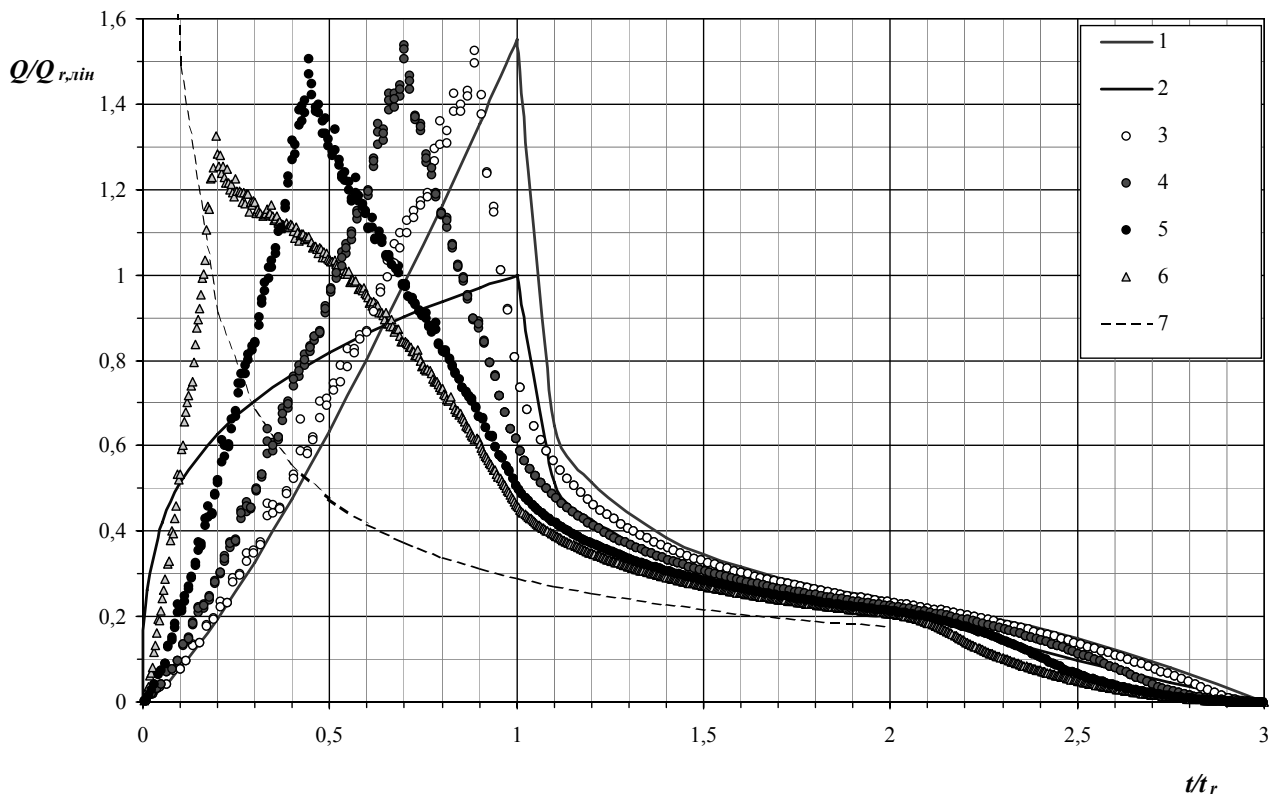


Рис. 4. Узагальнені гідрографи притоку дощових стічних вод для:  
 1 – для лінійної; 2 – для радіальної моделі концентрації поверхневого стоку,  
 а також для трикутних басейнів стоку з різними значеннями  $a$ :  
 3 –  $a=0,5$ ; 4 –  $a=1$ ; 5 –  $a=2$ ; 6 –  $a=5$ ; 7 – крива дощу ( $n=0,71$ ;  $t_{\text{д}}/t_r=2$ )

Загалом гідрографи притоку для трикутних в плані басейнів стоку складаються з чотирьох характерних етапів. На першому етапі (за  $X < X_{\text{ef}} = t_{\text{ef}}/t_r$ ) площа стоку за постійної швидкості течії

поверхневого потоку і сталого в часі та за площею коефіцієнта поверхні  $Z_{mid}$  зростає в часі за квадратичним законом. Відповідні криві притоку є подібними до кривої першого етапу гідрографа радіальної моделі з коефіцієнтами подібності  $k_x$  та  $k_y$  по відповідних координатних осях, що добре підтвердив числовий експеримент.

Максимальною витратою дощових стічних вод з трикутних у плані басейнів стоку є так звана ефективна витрата  $Q_{ef}$ , що існує в момент часу  $t_{ef}=L/V$ . Значення витрати  $Q_{ef}$ , отримані в результаті числового моделювання, не більш як на 2,2 % відрізняються від обчислених за аналітичною формулою (9).

На другому етапі (за  $X_{ef}<X<1$ ) для всіх досліджених значень геометричного параметра  $a$  відбувається різке зменшення витрати, тим сильніше, чим менше значення коефіцієнта  $a$ .

На третьому етапі (за  $1<X<X_0$ ) зменшення витрати стає повільнішим, ніж на другому етапі, і гідрографи притоку за збільшення безрозмірного часу  $X$  асимптотично наближаються з нижнього боку до відповідних кривих для лінійної та радіальної моделей. За безрозмірного часу  $X \geq 2$  з достатньою для практичних обчислень точністю можна вважати, що всі зазначені характеристики виходять на одну криву, яка описується аналітичною формулою (2).

Отримано також істотну відмінність гідрографів за різних значень  $a$  на четвертому етапі гідрографів (за  $X_0<X<(X_0+1)$ ): чим більше значення  $a$ , тим нижче проходить відповідна крива (рис. 4).

Числовий експеримент показав також, що безрозмірний гідрограф притоку для басейну стоку у формі половини трикутника з геометричним параметром  $a$  (прямокутний трикутник ОАВ на рис. 2) ідентичний з безрозмірним гідрографом для цілого рівнобедреного трикутника секторного типу з центральним кутом  $2\varphi$ .

**Висновки.** Гідрографи притоку з трикутних у плані басейнів секторного типу за своєю формою та кількісними характеристиками істотно відрізняються від теоретичного гідрографа для лінійної моделі концентрації поверхневого стоку. Форма басейнів стоку у плані повинна враховуватися під час визначення розрахункової витрати дощових стічних вод та під час знаходження регульовального об'єму споруд дощового водовідведення.

Гідрографи притоку з трикутних у плані басейнів секторного типу складаються з чотирьох характерних етапів. На першому етапі (за  $X \leq X_{ef}$ ) гідрографи подібні до першого етапу гідрографа радіальної моделі з коефіцієнтами подібності  $k_x$  та  $k_y$ , які можуть бути обчислені відповідно за формулами (10) і (11).

Максимальна витрата дощового стоку з трикутних у плані басейнів стоку з геометричним параметром  $a \leq 5$  існує в момент часу  $t_{ef}=L/V$  і може бути обчислена за аналітичною формулою (9).

За  $n=0,71$  найбільша безрозмірна витрата серед безрозмірних гідрографів притоку з трикутних у плані басейнів стоку відповідає значенню  $a=0,801$  і дорівнює  $Q'=1,5587$ .

За значень геометричного параметра  $a \leq 0,2$  безрозмірні гідрографи притоку з трикутних у плані басейнів стоку практично збігаються з безрозмірним гідрографом для радіальних басейнів стоку.

1. Калищун В.И. Водоотводящие сети и сооружения. – М.: Стройиздат, 1987.– 336 с.
2. Алексеев М.И., Курганов А.М. Организация отведения поверхностного (дождевого и талого) стока с урбанизированных территорий: Учеб. пособие. – М.: Изд-во АСВ; СПб.: СПбГАСУ, 2000. – 352 с.
3. Жук В.М., Вовк Л.І. Гідрографи притоку поверхневих стічних вод при різних моделях концентрації стоку // Вісн. Нац. ун-ту “Львівська політехніка”. – 2004. – № 506. – С. 105–113.
4. Жук В.М., Вовк Л.І. Радіальна модель концентрації дощових стічних вод // Проблеми водопостачання, водовідведення та гідравліки: Наук.-техн. зб. – К.: КНУБА, 2005. – Вип. 4. – С. 84–96.
5. Жук В.М., Вовк Л.І. Гідрографи притоку поверхневих стічних вод з прямокутних в плані басейнів стоку // Промислова гідравліка і пневматика. – 2005. – № 1 (7). – С. 12–16.