

## ОСОБЛИВОСТІ РОЗМІЩЕННЯ ВЕРШИН ГРАФІВ ТИПУ "ДЕРЕВО" НА ПЛОЩИНІ

*О Басюк Т.М., 2008*

**Проаналізовано основні труднощі, які виникають при візуалізації графів типу "дерево" та запропоновано метод розміщення їх вершин на площині.**

**In the article the basic difficulties which are analysed arise at graphs visualization type "tree" and the method of accommodation of their tops on a plane is offered.**

### Вступ

На сучасному етапі розвитку людства все гостріше постає задача проектування різних технологічних об'єктів та систем. Одним з етапів такого дослідження є візуалізація розробленої структури у вигляді різного роду схем, рисунків, діаграм з метою адекватної оцінки, опрацювання та подальшого використання. Для зазначених цілей можна застосовувати різні представлення: блок-схеми, засоби теорії алгоритмів, структури [1, 2]. Одним із засобів є рисунки-графи, які складаються з вершин, що представляють основні структурні елементи, та зв'язків, що з'єднують визначені пари цих вершин. Графи зустрічаються в багатьох галузях під різними назвами: "структури" у цивільному будівництві, "мережі" в електротехніці, "соціограми" у соціології й економіці, "молекулярні структури" у хімії [3,4].

Особливістю процедури відображення графів є те, що зазвичай структура їх зв'язків представляється в комп'ютері у вигляді масиву чисел або матриць, найчастіше матриць суміжності, які не містять жодного признаку, що б вказував на взаємне розташування вершин [5]. Адже якщо розташувати вершини абсолютно довільно, то можна отримати практично необмежену кількість еквівалентних зображень з різною наочністю. З огляду на це, актуальною є задача розроблення нових методів та алгоритмів відображення графів, які матимуть високу наочність відтворення.

### Огляд літературних джерел

Цілком очевидно, що від розташування вершин графу на площині залежатиме не лише вид самого зображення, але його сприйняття оператором, тобто наочність зображення. Більше того, є деякі види графів, наприклад, такі як: лінійні, тор, дерево тощо, зображення яких сприймаються у певному вигляді, тому саме так їх потрібно візуалізувати. Перед етапом розташування вершин потрібно аналізувати матриці суміжності і виявляти вид графу, що візуалізується. Для цього можна скористатися відомими методами виявлення нуль-графів, лінійних, „дерево”, деревоподібних та циклічно орієнтованих графів [6,7,8,9,10]. Проте, у відомих літературних джерелах недостатньо уваги приділялось розташуванню саме вершин графів у процесі їхньої візуалізації.

Складність візуалізації полягає в тому, що, по-перше, отримані зображення мають бути простими для споглядання та відповідати заданим критеріям відтворення [11] а, по-друге, мають адекватно відображатись як на екрані монітора, так і на шпальті видання.

### Постановка задачі

З огляду на зазначену складність необхідно створити новий метод, який би задовольняв визначені критерії відтворення. Початковою інформацією для розташування вершин є їх максимальна кількість, що може бути розміщена в рядку екрана монітора чи шпальти видання ( $N_r'$ ,  $N_r''$ ), максимальне число рядків ( $N_c$ ), а також кількість вершин графу  $N$ , яка визначається

розміром матриці суміжності графу, що візуалізується. Результатом операції розташування вершин є визначені координати їх центрів на площині екрану монітора чи шпальти видання.

### Основні результати досліджень

Для візуалізації графів „дерево” пропонується ярусний метод розташування вершин. Вершини розташовуються ярусами, що відповідає рівням графу „дерево”. Яруси графу розташовуються згори донизу, або зліва направо. У цих напрямках надалі проводяться дуги графу. Відомо [3,12], що ярусне представлення графу „дерево”, крім високої наочності, має ще такі переваги: кількість ярусів графу може бути довільною, що відповідає потребам візуалізації складних рисунків графу; будь-які операції, що стосуються відображення графу, можуть бути застосовані до усіх вузлів створеного дерева, наприклад, геометричні перетворення створеного технічного рисунка (поворот, дзеркальне відображення, редагування) можуть стосуватися всіх піддерев, що виходять з вершини, до якої вони стосуються; можливість інтерактивної взаємодії, коли простою вказівкою на екрані можна повідомити прикладній програмі не тільки ознаку ідентифікації елемента (вершини чи дуги), що вказується, але і підструктуру, до якої він входить.

Запропонований метод розташування вершин графу на площині передбачає такі основні етапи:

- утворення матриці суміжності, що представляє граф множиною матриць рядків, що відповідають ярусно-паралельній формі графу;
- визначення номера та координат опорної вершини;
- визначення порядку розташування вершин графу по ярусах;
- визначення координат вершин графу в кожному ярусі.

На першому етапі проводиться перетворення матриці суміжності в ярусно-паралельну форму [6,13]. У результаті такого перетворення отримуються матриці-рядки, одиничні елементи яких відповідають вершинам графу, що входять до цього ярусу. Кількість отриманих матриць-рядків відповідає кількості ярусів ярусно-паралельної форми графу.

На другому етапі визначається опорна вершина та знаходяться її координати. Опорною вершиною в графі „дерево” завжди є вхідна вершина, яка, до речі, є лише одна [14]. Розташування її проводиться в першому рядку, а номер її розташування визначатиметься згідно з виразом:

$$i = \text{Int} \left( \frac{N'_r - N}{2} \right) \quad (1)$$

а координати знаходитимуться:

$$X_i = \begin{cases} 2,5d + 3di, & \text{для непарних } j; \\ d + 3di, & \text{для парних } j; \end{cases} \quad (2)$$

$$Y_i = d + 3dj.$$

де  $i$  – номер вершин в рядку,  $i=0, 1, 2, 3, \dots, N$ ;  $j$  – номер рядка,  $j=0, 1, 2, 3, \dots, N$ .

На третьому етапі визначається послідовність розташування вершин кожного ярусу в рядках. Оскільки в другому та наступних ярусах графу може бути більше однієї вершини, то вони можуть займати або один або декілька рядків на екрані чи шпальті видання. Щоб визначити це, порівнюються кількість вершин поточного ярусу  $N_j$  з кількістю вершин парного (непарного) ярусів  $N'_r$  ( $N''_r$ ). Якщо  $N_j > N'_r$  ( $N''_r$ ), то визначається ще кількість рядків, які займе  $j$ -й ярус. Розглянемо послідовність розташування вершин для цих двох ситуацій.

Перша ситуація виникає, коли  $N_j \leq N'_r$  ( $N''_r$ ). Всі вершини ярусу розташовуються в одному рядку таким чином, що посередині розташовуються вершини, які мають більшу кількість зв'язків з вершинами наступного ярусу, а по краях – ті вершини, що мають мінімальну кількість таких зв'язків, або взагалі їх не мають, оскільки вони є кінцевими вершинами. Таке розташування вершин забезпечує не тільки меншу кількість перетинів дуг між собою, але й меншу кількість обходів вершин.

Пропонується для визначення кількості зв'язків кожної вершини графу здійснювати операцію множення введеної матриці суміжності  $A$ , на одиничний вектор-стовпець  $B$ . Результатом операції є матриця-рядок  $C$ , елементами якої є цілі числа з діапазону  $[0, 1, 2, 3 \dots N-1]$ . Величина чисел матриці  $C$  визначає кількість дуг відповідної вершини. Наприклад,

$$C = A * B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = | 3 \ 1 \ 1 \ 0 \ 3 \ 2 \ 1 \ 0 |.$$

Потім у сформованому масиві чисел здійснюється процедура сортування за спаданням. Особливістю цього сортування є те, що в утвореному масиві даних ( $M$ ) зберігаються номери та відповідні кількості дуг кожної з вершин, що дає змогу оцінити їх взаємовідношення. Під час сортування можливі випадки, коли знаходять декілька вершин з однаковою кількістю дуг. У такому разі вершини в масиві розташовуються за зростанням їх номерів, що пояснюється зручністю сприйняття. Для наведеного прикладу це буде такий масив:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \text{---} > & 3 \\ 5 & \text{---} > & 3 \\ 6 & \text{---} > & 2 \\ 2 & \text{---} > & 1 \\ 3 & \text{---} > & 1 \\ 7 & \text{---} > & 1 \\ 4 & \text{---} > & 0 \\ 8 & \text{---} > & 0 \end{pmatrix}.$$

З утвореного масиву  $M$  вибираються вершини, що входять до ярусу  $M_j$ , із збереженням послідовності проведеного сортування. Координати вершин визначаються так. Номер позиції в рядку першої вершини із масиву  $M$  визначиться як:

$$i_0 = \text{Int} \left( \frac{N_r}{2} \right), \quad (3)$$

а номер місця в рядку кожної наступної вершини визначиться такою рекурсивною залежністю:

$$i_f = i_{f-1} + (-1)^f \cdot f, \quad (4)$$

де  $f = 1, 2, \dots, N_r'' - 1$  – порядковий номер вершин в масиві  $M$ . Потім визначають координати вершин ярусу на площині екрана чи шпальті видання.

Інша ситуація виникає тоді, коли  $N_j > N_r'(N_r'')$ . Тоді вершини одного ярусу займають  $k$ -рядків. У такому випадку пропонується розташовувати вершини графу цього ярусу, починаючи із  $k$ -го рядка. В цьому рядку розташовуються вершини, що мають найбільшу кількість зв'язків, а далі в кожному попередньому рядку – вершини з меншою кількістю зв'язків. Таке розташування сприятиме підвищенню наочності візуалізованого графу, оскільки зменшується ймовірність перетину дуг між собою та потреба в обході вершин.

Масив впорядкованих вершин даного ярусу  $M_j$  поділяють на  $k$  підмасивів, а потім визначаються місця вершин в кожному рядку, аналогічно як у першій ситуації. Під час розташування вершин на площині їх одночасно нумерують (присвоюють мітки). Як мітки використовують порядкові номери вершин графу.



Утворимо масив  $M$  і з нього утворимо окремі масиви  $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5$  для кожного ярусу:

$$M = \begin{array}{l} 7 \rightarrow 3 \\ 13 \rightarrow 3 \\ 3 \rightarrow 2 \\ 9 \rightarrow 2 \\ 14 \rightarrow 2 \\ 15 \rightarrow 2 \\ 6 \rightarrow 1 \\ 16 \rightarrow 1 \\ 1 \rightarrow 0 \\ 2 \rightarrow 0 \\ 4 \rightarrow 0 \\ 5 \rightarrow 0 \\ 8 \rightarrow 0 \\ 10 \rightarrow 0 \\ 11 \rightarrow 0 \\ 12 \rightarrow 0 \\ 17 \rightarrow 0 \end{array}; \quad M_1 = \begin{array}{l} 3 \rightarrow 2 \end{array}; \quad M_2 = \begin{array}{l} 7 \rightarrow 3 \\ 6 \rightarrow 1 \end{array};$$

$$M_3 = \begin{array}{l} 13 \rightarrow 3 \\ 15 \rightarrow 2 \\ 16 \rightarrow 1 \\ 4 \rightarrow 0 \end{array}; \quad M_5 = \begin{array}{l} 1 \rightarrow 0 \\ 2 \rightarrow 0 \\ 5 \rightarrow 0 \\ 11 \rightarrow 0 \end{array};$$

$$M_4 = \begin{array}{l} 9 \rightarrow 2 \\ 14 \rightarrow 2 \\ 8 \rightarrow 0 \\ 10 \rightarrow 0 \\ 12 \rightarrow 0 \\ 17 \rightarrow 0 \end{array}.$$

Для діагоналі монітора 15" та кегля шрифту 14пт:  $N_r' = 8; N_r'' = 8; N_c = 6; d = 10\text{мм}$ .

Визначимо номери місць та координати вершин кожного ярусу.

Перший ярус графу ( $N_1=1$ ) розташовується в першому рядку ( $j=0$ ). Оскільки  $N_1 < N_r'$ , то номер місця вершини "3" визначиться згідно з виразом (3) і дорівнюватиме:  $i = \text{Int}\left(\frac{8}{2}\right) = 4$ , а її координати будуть такі:

$$X_3 = d + 3di = 10 + 3 \cdot 10 \cdot 4 = 130\text{мм},$$

$$Y_3 = d + 3dj = 10 + 3 \cdot 10 \cdot 0 = 10\text{мм}.$$

Другий ярус має дві вершини "6", "7". ( $N_2 = 2, N_2 < N_r''$ ). Всі вершини другого ярусу розташуються в другому рядку ( $j=1$ ). Спочатку буде розташована вершина за номером "7", оскільки вона стоїть першою в масиві  $M_2$ . Номер її місця і координати матимуть такі значення:  $j=1, i=4$ ,

$$X_7 = 2,5d + 3di = 25 + 3 \cdot 10 \cdot 4 = 145\text{мм},$$

$$Y_7 = d + 3dj = 10 + 3 \cdot 10 \cdot 1 = 40\text{мм}.$$

Наступною в рядку буде розташовуватись вершина за номером "6", що матиме такі значення:  $j=1, i=3$ ,

$$X_6 = 2,5d + 3di = 25 + 3 \cdot 10 \cdot 3 = 115\text{мм},$$

$$Y_6 = d + 3dj = 10 + 3 \cdot 10 \cdot 1 = 40\text{мм}.$$

Аналогічно визначимо координати решти ярусів графу, в яких кількість вершин менша за кількість можливих місць вершин в рядках, а тому кожен ярус займатиме по одному рядку:

Третій ярус,  $j=2$ :

$$X_{13} = 130\text{мм},$$

$$X_{15} = 100\text{мм}, \quad X_{16} = 160\text{мм}, \quad X_4 = 70\text{мм},$$

$$Y_{13} = 70\text{мм},$$

$$Y_{15} = 70\text{мм}, \quad Y_{16} = 70\text{мм}, \quad Y_4 = 70\text{мм}.$$

Четвертий ярус,  $j=3$ :

$$X_9 = 145 \text{ мм},$$

$$X_{14} = 115 \text{ мм},$$

$$X_8 = 175 \text{ мм},$$

$$Y_9 = 100 \text{ мм},$$

$$Y_{14} = 100 \text{ мм},$$

$$Y_8 = 100 \text{ мм},$$

$$X_{10} = 85 \text{ мм},$$

$$X_{12} = 205 \text{ мм},$$

$$X_{17} = 55 \text{ мм},$$

$$Y_{10} = 100 \text{ мм},$$

$$Y_{12} = 100 \text{ мм},$$

$$Y_{17} = 100 \text{ мм}.$$

П'ятий ярус,  $j=4$ :

$$X_1 = 130 \text{ мм},$$

$$X_2 = 10 \text{ мм},$$

$$X_5 = 160 \text{ мм},$$

$$X_{11} = 70 \text{ мм},$$

$$Y_1 = 130 \text{ мм},$$

$$Y_2 = 130 \text{ мм},$$

$$Y_5 = 130 \text{ мм},$$

$$Y_{11} = 130 \text{ мм}.$$

Оскільки кількість ярусів графу не перевищує кількості рядків, то його зображення поміщається на екрані монітора без застосування смуг прокручування. На рис.1 наведено результат розташування вершин.

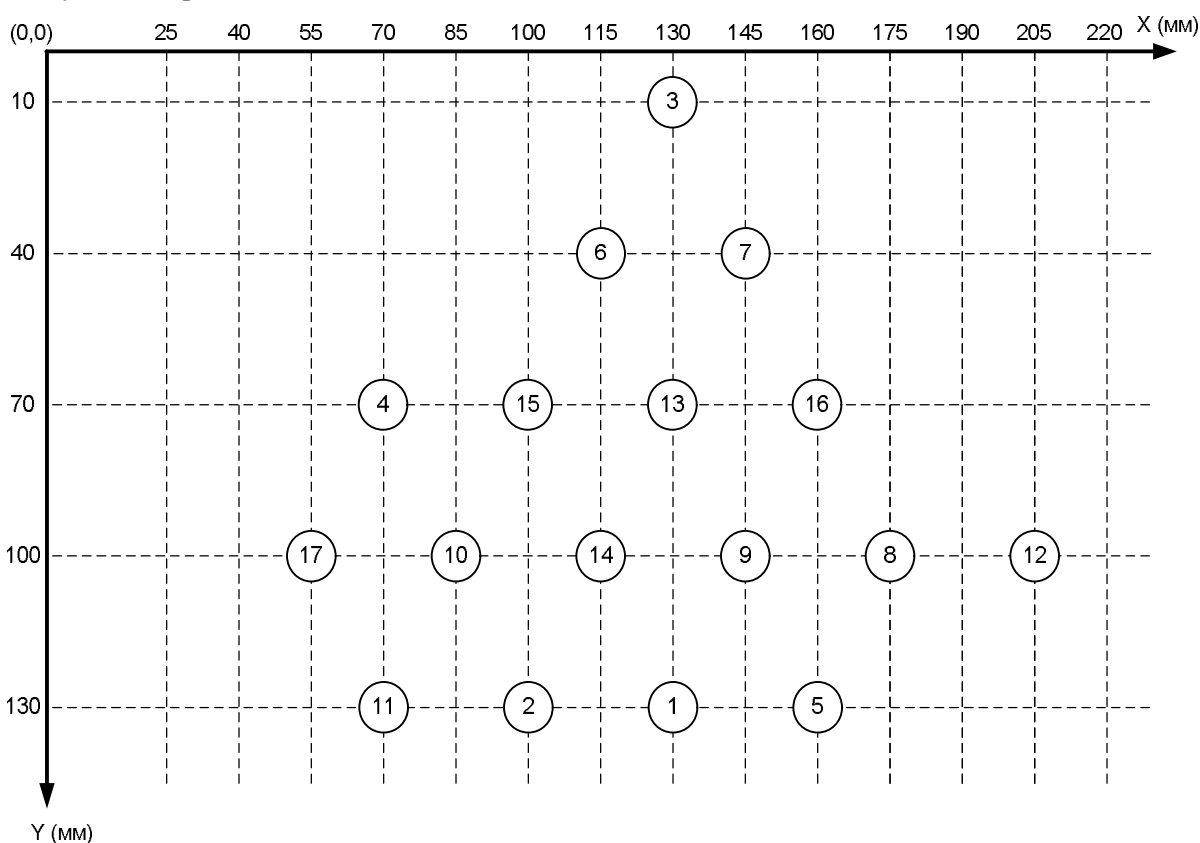


Рис. 1. Приклад розташування вершин графу на екрані монітора

Приклад 2. Розглянемо розташування вершин цього самого графу на шпальті видання  $84 \times 108/32$  при кеглі основного шрифту 10пт. Для цього випадку  $N'_r = N''_r = 5$ ,  $N_c = 7$ ,  $d = 7$  мм.

Координати вершини "3" першого ярусу набудуть значень:  $j=0$ ,  $i = \text{Int}\left(\frac{5}{2}\right) = 2$ ,

$$X_3 = \frac{d}{2} + 3di = 3,5 + 3 \cdot 7 \cdot 2 = 45,5 \text{ мм},$$

$$Y_3 = \frac{d}{2} + 3dj = 3,5 \text{ мм}.$$

Другий ярус містить дві вершини "6" та "7", які розташовуватимуться у другому рядку ( $j=1$ ), оскільки  $N_2 < N''_r$  ( $2 < 5$ ). Координати вершини за номером "7" будуть такими:  $i=2$ ,

$$X_7 = 2d + 3di = 14 + 3 \cdot 7 \cdot 2 = 56 \text{ мм},$$

$$Y_7 = \frac{d}{2} + 3dj = 3,5 + 3 \cdot 7 \cdot 1 = 24,5 \text{ мм},$$

а вершини “6” такими:

$$i = 2 + (-1)^1 \cdot 1 = 1,$$

$$X_6 = 2d + 3di = 14 + 3 \cdot 7 \cdot 1 = 35 \text{ мм},$$

$$Y_6 = \frac{d}{2} + 3dj = 3,5 + 3 \cdot 7 \cdot 1 = 24,5 \text{ мм}.$$

Третій ярус графу містить чотири вершини “4”, “13”, “15”, “16”, що менше за кількість місць в рядку  $N'_r = 5, j = 2$ . Координати цих вершин будуть такими:

$$X_{13} = 45,5 \text{ мм},$$

$$X_{15} = 24,5 \text{ мм},$$

$$X_{16} = 66,5 \text{ мм},$$

$$X_4 = 3,5 \text{ мм},$$

$$Y_{13} = 45,5 \text{ мм},$$

$$Y_{15} = 45,5 \text{ мм},$$

$$Y_{16} = 45,5 \text{ мм},$$

$$Y_4 = 45,5 \text{ мм}.$$

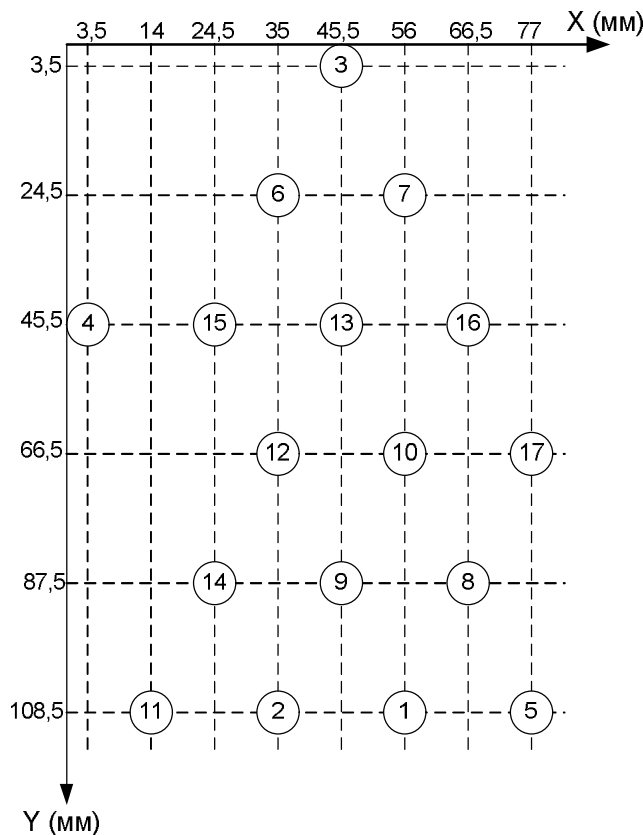


Рис. 2. Приклад розташування вершин графу „дерево” на шпальті видання

Четвертий ярус графу містить шість вершин (“8”, “9”, “10”, “12”, “14”, “17”), що на одну вершину більше, ніж  $N'_r$  місць у рядку. Тому вершини четвертого ярусу будуть розташовані у двох рядках ( $j=3, j=4$ ). Розташування почнемо з нижнього рядка з номером  $j=4$ . Для цього спочатку масив  $M_4$  розділимо на два масиви:

$$M_4^1 = \begin{vmatrix} 9 & \text{---} > & 2 \\ 14 & \text{---} > & 2 \\ 8 & \text{---} > & 0 \end{vmatrix}$$

$$M_4^2 = \begin{vmatrix} 10 & \text{---} > & 0 \\ 12 & \text{---} > & 0 \\ 17 & \text{---} > & 0 \end{vmatrix}$$

Координати вершин “9”, “14” і “8” будуть такими:  $j=4$ ,

$$X_9 = 45,5\text{мм}, \quad X_{14} = 24,5\text{мм}, \quad X_8 = 66,5\text{мм},$$

$$Y_9 = 87,5\text{мм}, \quad Y_{14} = 87,5\text{мм}, \quad Y_8 = 87,5\text{мм}.$$

Координати решти вершин будуть такими:  $j=3$ ,

$$X_{10} = 56\text{мм}, \quad X_{12} = 35\text{мм}, \quad X_{17} = 77\text{мм},$$

$$Y_{10} = 66,5\text{мм}, \quad Y_{12} = 66,5\text{мм}, \quad Y_{17} = 66,5\text{мм}.$$

Вершини останнього ярусу розташуються в одному рядку  $j=5$ . Їх координати будуть такими:

$$X_1 = 56\text{мм}, \quad X_2 = 35\text{мм}, \quad X_5 = 77\text{мм}, \quad X_{11} = 14\text{мм},$$

$$Y_1 = 108,5\text{мм}, \quad Y_2 = 108,5\text{мм}, \quad Y_5 = 108,5\text{мм}, \quad Y_{11} = 108,5\text{мм}.$$

Результат розташування вершин наведено на рис. 2.

Можна зауважити, що отриманий рисунок відповідає сформованим критеріям відображення, а, отже, є оптимальним для сприйняття та оцінювання [11].

### Висновок

Запропонований новий метод розміщення вершин графів типу „дерево”, заданих матрицями суміжності, дає змогу ефективно розташувати вершини графу як на екрані монітора, так і на шпальті видання з забезпеченням сформованих критеріїв відтворення. За його допомогою відбувається оптимальне розташування вершин графу на площині для адекватного оцінювання представленої ним структури та відповідних перетворень над нею.

1. Дистель Р. Теория графов. – Новосибирск: Изд-во Института математики, 2002. – 336 с.
2. Харари Ф. Теория графов. 2 изд. – М.: УРСС, 2003. – 296 с.
3. Касьянов В.Н., Евстегнеев В.А. Графы в программировании: обработка, визуализация и применение. – СПб.: БХВ, 2003. – 1104 с.
4. Басюк Т.М. Аналіз та класифікація методів візуалізації // Поліграфія і видавнича справа. – 2003. – Вип. 40. – С. 109–114.
5. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричний аналіз. — М.: Мир, 1989. — 655 с.
6. Дунець Р.Б. Аналіз та синтез топологій комп'ютерних видавничо-поліграфічних систем: НВФ „Українські технології”. – Львів – 2003. – 192 с.
7. Lin X. Analysis of algorithms for drawing graphs: PhD thesis – Dep. of Comput. Sci. Univ. of Queensland. – 1992.
8. Muller-Hannemann M. Drawing trees, series-parallel digraphs, and Lattices // Lect. Notes Comput. Sci. – 2001. Vol. 2025. – P.46–70.
9. Басюк Т.М. Метод зображення зв'язків між вершинами графа // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2005. – №1. – С.144–150.
10. Дунець Р.Б., Басюк Т.М. Метод розташування вершин деревоподібних графів на площині в процесі їхньої візуалізації // Вісник Національного університету „Львівська політехніка”. – 2006. – №573. – С.77–82.
11. Басюк Т.М. Критерії відображення графів в процесі візуалізації. // Наукові записки УАД. – 2004. – Вип. 7.
12. Басюк Т.М. Метод розміщення вершин графа в процесі візуалізації // Вісник Національного університету „Львівська політехніка”. – 2004. – №519. – С. 3–10.
13. Дунець Р.Б., Басюк Т.М. Структура програми перетворення графів у ярусно-паралельну форму // Комп'ютерні технології друкарства: Зб. наук. праць. – 2002. – №7. – С.97–102.
14. Басюк Т.М. Аналіз та класифікація методів візуалізації // Поліграфія і видавнича справа. – 2003. – Вип. 40. – С. 109–114.