ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.643 № 643, (2009) с. 24–29

JOURNAL OF LVIV POLITECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical & mathematical sciences"
Vol.643 No 643, (2009) 24–29

ОБЧИСЛЕННЯ НЕВЛАСТИВИХ ІНТЕГРАЛІВ МЕТОДОМ ГІБРИДНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ (КОНТОРОВИЧА-ЛЄБЄДЄВА)-ФУР'Є НА ПОЛЯРНІЙ ОСІ $r \geq R_0 > 0$

М. Ленюк[a], М. Шинкарик [b]

[a] *Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича*
вул. Коцюбинського, 2, 58012, Чернівці, Україна
[b] *Тернопільський національний економічний університет*
вул. Львівська, 11, 46000, Тернопіль, Україна

(Отримано 29 листопада 2008 р.)

Методом порівняння розв'язків крайової задачі на полярній осі $r \geq R_0 > 0$ з точкою спряження для сепаратної системи модифікованих диференціальних рівнянь Бесселя (з виродженням при старшій похідній) та Фур'є обчислено поліпараметричні невластиві інтеграли від функцій Бесселя по індексу й тригонометричних функцій.

Ключові слова: гібридне інтегральне перетворення, невластиві інтеграли, фундаментальна система розв'язків, диференціальні рівняння Бесселя, Фур'є, крайова задача

2000 MSC: 44A15, 44A45

УДК: 517.443

I. Аналіз публікацій, в яких започатковано розв'язання проблеми. Новизна одержаного результату

У сучасних довідниках з математичної літератури [1, 2] наведені невластиві інтеграли, в структурі яких беруть участь спеціальні функції одного характеру (спецфункції, що є розв'язками одного й того самого диференціального рівняння Фур'є, Бесселя, Лежандра і т.д.). Задачі математичної фізики для неоднорідних середовищ (під час моделювання фізико-механічних характеристик за різними законами) приводять до невластивих інтегралів, в яких підінтегральна функція є суперпозицією спеціальних функцій математичної фізики різного характеру. Сьогодні формули обчислення таких інтегралів відсутні в довідниковій літературі.

Новизна цієї роботи полягає в тому, що запропоновано формули обчислення певного класу невластивих інтегралів методом одного із типів гібридних інтегральних перетворень.

Гібридне інтегральне перетворення, породжене на полярній осі $r \geq R_0 > 0$ з однією точкою спряження $r = R_1 > R_0$ гібридним диференціальним оператором Бесселя-Фур'є, запроваджено в роботі [3] під назвою гібридне інтегральне перетворення типу (Конторовича-Лєбєдєва)-Фур'є. У роботі [4] запропоновано методику обчислення невластивих інтегралів за власними елементами гібридних диференціальних операторів, утворених сполученням диференціальних операторів Бесселя $B_{\nu,\alpha}$ та Фур'є d^2/dr^2 на інтервалі (a, b) з однією точкою спряження. Ця робота присвячена обчисленню поліпараметричної сім'ї невластивих інтегралів за власними елементами гібридного диференціального оператора, утвореного сполучення в точці $r = R_1 > R_0$ диференціальних операторів Бесселя B_α та Фур'є d^2/dr^2 на полярній осі $r \geq R_0 > 0$.

II. Основний матеріал дослідження

Побудуємо обмежений на множині $I_1^+ = \{r : r \in (R_0, R_1) \bigcup (R_1, \infty); R_0 > 0\}$ розв'язок сепаратної системи диференціальних рівнянь Бесселя й Фур'є

$$(B_{\nu_1,\alpha} - \lambda^2)u_1(r) = -g_1(r)r^{-2},$$
$$r \in (R_0, R_1), \tag{1}$$
$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \nu_2^2\right)u_2(r) = -g_2(r), r \in (R_1, \infty)$$

за крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{d}{dr} + \beta_{11}^0\right)u_1(r)\bigg|_{r=R_0} = g_0$$
$$\frac{du_2}{dr}\bigg|_{r=\infty} = 0 \tag{2}$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^1 \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^1\right)u_1(r) - \left(\alpha_{j2}^1 \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^1\right)u_2(r)\right]\bigg|_{r=R_1} = 0, j = 1, 2. \tag{3}$$

Вважаємо, що $\nu_j \geq 0$, $\lambda \in (0, \infty)$, $\alpha \geq -1/2$, $\nu_1 \geq \alpha$, $|\alpha_{11}^0| + |\beta_{11}^0| \neq 0$; $c_{11} \cdot c_{21} > 0$; $c_{j1} = \alpha_{2j}^1\beta_{1j}^1 - \alpha_{1j}^1\beta_{2j}^1$, $j = 1, 2$; $B_{\nu,\alpha} = d^2/dr^2 + (2\alpha+1)r^{-1}d/dr - (\nu^2-\alpha^2)r^{-2}$; $B_{\nu,\alpha}$ – диференціальний оператор Бесселя.

Фундаментальну систему розв'язків для рівняння Бесселя $(B_{\nu,\alpha}-\lambda^2)u=0$ утворюють функції $I_{\nu,\alpha}(\lambda r)$ та $K_{\nu,\alpha}(\lambda r)$ [3], а для рівняння Фур'є $(d^2/dr^2-\lambda^2)u = 0$ – функції $\exp(-\lambda r)$ та $\exp(\lambda r)$ (або $\operatorname{ch}\lambda r$ та $\operatorname{sh}\lambda r$).

Визначимо функції:

$$U^{m1}_{\nu,\alpha;j1}(\lambda R_m)=\left(\alpha^m_{j1}\frac{\nu-\alpha}{R_m}+\beta^m_{j1}\right)\times$$
$$\times I_{\nu,\alpha}(\lambda R_m)+\alpha^m_{j1}R_m\lambda^2 I_{\nu+1,\alpha+1}(\lambda R_m),$$
$$U^{m2}_{\nu,\alpha;j1}(\lambda R_m)=\left(\alpha^m_{j1}\frac{\nu-\alpha}{R_m}+\beta^m_{j1}\right)\times$$
$$\times K_{\nu,\alpha}(\lambda R_m)-\alpha^m_{j1}R_m\lambda^2 K_{\nu+1,\alpha+1}(\lambda R_m),$$
$$\Psi^{m*}_{\nu,\alpha;j1}(\lambda R_m,\lambda r)=U^{m1}_{\nu,\alpha;j1}(\lambda R_m)K_{\nu,\alpha}(\lambda r)-$$
$$-U^{m2}_{\nu,\alpha;j1}(\lambda R_m)I_{\nu,\alpha}(\lambda r),$$
$$\Delta_{\nu,\alpha;j1}(\lambda R_0,\lambda R_1)=U^{01}_{\nu,\alpha;11}(\lambda R_0)\times$$
$$\times U^{12}_{\nu,\alpha;j1}(\lambda R_1)-$$
$$-U^{02}_{\nu,\alpha;11}(\lambda R_0)U^{11}_{\nu,\alpha;j1}(\lambda R_1),$$

$I_{\nu,\alpha}(\lambda r)=(\lambda r)^{-\alpha}I_\nu(\lambda r)$, $K_{\nu,\alpha}(\lambda r)=(\lambda r)^{-\alpha}K_\nu(\lambda r)$; $I_\nu(x)$, $K_\nu(x)$ – модифіковані функції Бесселя.

Наявність фундаментальної системи розв'язків дає можливість будувати розв'язок крайової задачі (1) – (3) за такими правилами:

$$u_1(r)=A_1 I_{\nu_1,\alpha}(\lambda r)+B_1 K_{\nu_1,\alpha}(\lambda r)+$$
$$+\int\limits_{R_0}^{R_1}\mathcal{E}^*_{\nu_1,\alpha}(r,\rho)g_1(\rho)\rho^{2\alpha-1}d\rho,$$
$$u_2(r)=B_2\exp[-\nu_2(r-R_1)]+$$
$$+\int\limits_{R_1}^{\infty}\mathcal{E}^*_2(r,\rho)g_2(\rho)d\rho. \qquad (4)$$

Тут беруть участь функції Коші:

$$\mathcal{E}^*_{\nu_1,\alpha}(r,\rho)=\frac{\lambda^{2\alpha}}{\Delta_{\nu_1,\alpha;11}(\lambda R_0,\lambda R_1)}\times$$
$$\times\begin{cases}\Psi^{0*}_{\nu_1,\alpha;11}(\lambda R_0,\lambda r)\Psi^{1*}_{\nu_1,\alpha;11}(\lambda R_1,\lambda\rho),\\ \Psi^{0*}_{\nu_1,\alpha;11}(\lambda R_0,\lambda\rho)\Psi^{1*}_{\nu_1,\alpha;11}(\lambda R_1,\lambda r),\end{cases}$$
$$R_0<r<\rho<R_1,$$
$$R_0<\rho<r<R_1;$$
$$\mathcal{E}^*_2(r,\rho)=\frac{1}{\nu_2(\alpha^1_{12}\nu_2-\beta^1_{12})}\times$$
$$\times\begin{cases}e^{-\nu_2(\rho-R_1)}\Phi^1_{12}(\nu_2R_1,\nu_2 r),\\ e^{-\nu_2(r-R_1)}\Phi^1_{12}(\nu_2R_1,\nu_2\rho),\end{cases}$$
$$R_1<r<\rho<\infty,$$
$$R_1<\rho<r<\infty.$$
$$\Phi^1_{j2}(\nu_2R_1,\nu_2x)=\alpha^1_{j2}\nu_2\operatorname{ch}\nu_2(x-R_1)-$$
$$-\beta^1_{j2}\operatorname{sh}\nu_2(x-R_1),\quad j=1,2.$$

Крайові умови (2) й умови спряження (3) для визначення сталих A_1, B_1, B_2 дають алгебраїчну систему:

$$U^{01}_{\nu_1,\alpha;11}(\lambda R_0)A_1+U^{02}_{\nu_1,\alpha;11}(\lambda R_0)B_1=g_0$$
$$U^{11}_{\nu_1,\alpha;11}(\lambda R_1)A_1+U^{12}_{\nu_1,\alpha;11}(\lambda R_1)B_1+$$
$$+(\alpha^1_{12}\nu_2-\beta^1_{12})B_2=0;$$
$$U^{11}_{\nu_1,\alpha;21}(\lambda R_1)A_1+U^{12}_{\nu_1,\alpha;21}(\lambda R_1)B_1+$$
$$+(\alpha^1_{22}\nu_2-\beta^1_{22})B_2=G_{12}. \qquad (5)$$

У системі (5) бере участь функція

$$G_{12}=\frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha+1}}\int\limits_{R_0}^{R_1}\frac{\Psi^{0*}_{\nu_1,\alpha;11}(\lambda R_0,\lambda\rho)}{\Delta_{\nu_1,\alpha;11}(\lambda R_0,\lambda R_1)}g_1(\rho)\times$$
$$\times\rho^{2\alpha-1}d\rho-c_{21}\int\limits_{R_1}^{\infty}e^{-\nu_2(\rho-R_1)}\frac{g_2(\rho)d\rho}{\alpha^1_{12}\nu_2-\beta^1_{12}}.$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності крайової задачі (1) – (3): визначник алгебраїчної системи (5)

$$\Delta_\alpha(\nu_1,\nu_2)\equiv(\alpha^1_{22}\nu_2-\beta^1_{22})\Delta_{\nu_1,\alpha;11}(\lambda R_0,\lambda R_1)-$$
$$-(\alpha^1_{12}\nu_2-\beta^1_{12})\Delta_{\nu_1,\alpha;21}(\lambda R_0,\lambda R_1)\neq 0. \qquad (6)$$

У результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (5) і підстановки одержаних значень A_1, B_1, B_2 у формули (4) отримуємо єдиний розв'язок крайової задачі (1) – (3):

$$u_j(t)=W_{(\nu),\alpha;1j}(r)g_0+\int\limits_{R_0}^{R_1}H_{(\nu),\alpha;j1}(r,\rho)\times$$
$$\times g_1(\rho)\rho^{2\alpha-1}d\rho+\int\limits_{R_1}^{\infty}H_{(\nu),\alpha;j2}(r,\rho)g_2(\rho)d\rho;$$
$$(\nu)=(\nu_1,\nu_2);\quad j=1,2. \qquad (7)$$

У рівностях (7) беруть участь породжені крайовою умовою в точці $r=R_0$ функції Гріна

$$W_{(\nu),\alpha;11}(r)=\frac{1}{\Delta_\alpha(\nu_1,\nu_2)}[(\alpha^1_{12}\nu_2-\beta^1_{12})\times$$
$$\times\Psi^{1*}_{\nu_1,\alpha;21}(\lambda R_1,\lambda r)-(\alpha^1_{22}\nu_2-\beta^1_{22})\times$$
$$\times\Psi^{1*}_{\nu_1,\alpha;11}(\lambda R_1,\lambda r)], \qquad (8)$$
$$W_{(\nu),\alpha;12}(r)=-\frac{c_{11}}{\lambda^{2\alpha}R_1^{2\alpha+1}}\frac{1}{\Delta_\alpha(\nu_1,\nu_2)}\times$$
$$\times\exp[-\nu_2(r-R_1)];$$

та породжені неоднорідністю системи (1) функції впливу

$$H_{(\nu),\alpha;11}(r,\rho)=-\lambda^{2\alpha}\begin{cases}\Psi^{0*}_{\nu_1,\alpha;11}(\lambda R_0,\lambda r)\times\\ \Psi^{0*}_{\nu_1,\alpha;11}(\lambda R_0,\lambda\rho)\times\end{cases}$$
$$\times W_{(\nu),\alpha;11}(\rho),\quad R_1<r<\rho<R_1;$$
$$\times W_{(\nu),\alpha;11}(r),\quad R_1<\rho<r<R_1;$$

$$H_{(\nu),\alpha;12}(r,\rho)=\frac{c_{21}}{\Delta_\alpha(\nu_1,\nu_2)}\times$$

$$\times\Psi^{0*}_{\nu_1,\alpha;11}(\lambda R_0,\lambda r)\exp[-\nu_2(\rho-R_1)]; \quad (9)$$

$$H_{(\nu),\alpha;21}(r,\rho)=\frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha+1}}\frac{1}{\Delta_\alpha(\nu_1,\nu_2)}\times$$

$$\times\Psi^{0*}_{\nu_1,\alpha;11}(\lambda R_0,\lambda\rho)\exp[-\nu_2(r-R_1)];$$

$$H_{(\nu),\alpha;22}(r,\rho)=\frac{1}{\nu_2\Delta_\alpha(\nu_1,\nu_2)}\times$$

$$\times\left\{\begin{array}{l}\exp[-\nu_2(\rho-R_1)][\Delta_{\nu_1,\alpha;11}(\lambda R_0,\lambda R_1)\times\\ \exp[-\nu_2(r-R_1)][\Delta_{\nu_1,\alpha;11}(\lambda R_0,\lambda R_1)\times\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l}\times\Phi^1_{22}(\nu_2R_1,\nu_2r)-\Delta_{\nu_1,\alpha;21}(\lambda R_0,\lambda R_1)\times\\ \times\Phi^1_{22}(\nu_2R_1,\nu_2\rho)-\Delta_{\nu_1,\alpha;21}(\lambda R_0,\lambda R_1)\times\end{array}$$

$$\begin{array}{l}\times\Phi^1_{12}(\nu_2R_1,\nu_2r), R_1<r<\rho<\infty,\\ \times\Phi^1_{12}(\nu_2R_1,\nu_2\rho), R_1<\rho<r<\infty.\end{array}$$

Побудуємо розв'язок крайової задачі (1) – (3) методом гібридного інтегрального перетворення типу (Конторовича-Лєбєдєва)-Фур'є, породженого на множині I_1^+ диференціальним оператором

$$M_\alpha=\theta(r-R_0)\theta(R_1-r)B_\alpha+$$

$$+\theta(r-R_1)d^2/dr^2,$$

$\theta(x)$ – одинична функція Гевісайда, B_α – диференціальний оператор Бесселя:

$$B_\alpha=r^2d^2/dr^2+(2\alpha+1)rd/dr+\alpha^2-\lambda^2r^2,$$

$$\alpha\geq-1/2, \lambda\in(0,\infty).$$

Визначимо величини та функції:

$$\sigma_1=\frac{c_{11}}{c_{21}}\frac{1}{R_1^{2\alpha+1}}, \sigma_2=1, b_j(\beta)=\sqrt{\beta^2+k_j^2},$$

$$k_j^2\geq0, \beta\in(0,\infty);$$

$$V_{\alpha;1}(r,\beta)=c_{21}b_2(\beta)\Psi^0_{\alpha;11}(\lambda R_0,\lambda r,b_1)\equiv$$

$$\equiv c_{21}b_2[X^{01}_{\alpha;11}(\lambda R_0,b_1)D_\alpha(\lambda r,b_1)-$$

$$-X^{02}_{\alpha;11}(\lambda R_0,b_1)C_\alpha(\lambda r,b_1)],$$

$$V_{\alpha;2}(r,\beta)=\omega_{\alpha;2}(\beta)b_2\cos b_2(r-R_1)-$$

$$-\omega_{\alpha;1}(\beta)\sin b_2(r-R_1);$$

$$\omega_{\alpha;1}(\beta)=\beta^1_{22}\delta_{\alpha;11}(\lambda R_0,\lambda R_1,b_1)-$$

$$-\beta^1_{12}\delta_{\alpha;21}(\lambda R_0,\lambda R_1,b_1);$$

$$\omega_{\alpha;2}(\beta)=\alpha^1_{22}\delta_{\alpha;11}(\lambda R_0,\lambda R_1,b_1)-$$

$$-\alpha^1_{12}\delta_{\alpha;21}(\lambda R_0,\lambda R_1,b_1);$$

$$\delta_{\alpha;j1}(\lambda R_0,\lambda R_1,b_1)=X^{01}_{\alpha;11}(\lambda R_0,b_1)\times$$

$$\times X^{12}_{\alpha;j1}(\lambda R_1,b_1)-X^{02}_{\alpha;11}(\lambda R_0,b_1)\times$$

$$\times X^{11}_{\alpha;j1}(\lambda R_1,b_1); j=1,2.$$

Тут прийняті позначення:

$$C_\alpha(x,b(\beta))=I_{ib,\alpha}(x)+iD_\alpha(x,b),$$

$$D_\alpha(x,b)=\pi^{-1}\mathrm{sh}\, b\pi K_{ib,\alpha}(x),$$

$$X^{m1}_{\alpha;j1}=\left(\alpha^m_{j1}\frac{d}{dr}+\beta^m_{j1}\right)C_\alpha(\lambda r,b_1)\Bigg|_{r=R_m};$$

$$X^{m2}_{\alpha;j1}=\left(\alpha^m_{j1}\frac{d}{dr}+\beta^m_{j1}\right)D_\alpha(\lambda r,b_1)\Bigg|_{r=R_m};$$

$$m=0,1.$$

Наявність спектральної функції

$$V_\alpha(r,\beta)=\theta(r-R_0)\theta(R_1-r)V_{\alpha;1}(r,\beta)+$$

$$+\theta(r-R_1)V_{\alpha;2}(r,\beta),$$

вагової функції

$$\sigma_\alpha(r)=\theta(r-R_0)\theta(R_1-r)\sigma_1r^{2\alpha-1}+$$

$$+\theta(r-R_1)\sigma_2$$

та спектральної щільності

$$\Omega_\alpha(\beta)=\beta b_2^{-1}(\beta)([\omega_{\alpha;1}(\beta)]^2+b_2^2[\omega_{\alpha;2}(\beta)]^2)^{-1}$$

дає змогу запровадити гібридне інтегральне перетворення типу (Конторовича-Лєбєдєва)-Фур'є:

$$H_\alpha[f(r)]=\int\limits_{R_0}^{\infty}f(r)V_\alpha(r,\beta)\sigma_\alpha(r)dr\equiv\tilde f(\beta); \quad (10)$$

$$H_\alpha^{-1}[\tilde f(\beta)]=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\tilde f(\beta)V_\alpha(r,\beta)\times$$

$$\times\Omega_\alpha(\beta)d\beta\equiv f(r); \quad (11)$$

$$H_\alpha[M_\alpha[f(r)]]=-\beta^2\tilde f(\beta)-\sigma_1R_0^{2\alpha+1}\times$$

$$\times(\alpha^0_{11})^{-1}V_{\alpha;1}(R_0,\beta)(\alpha^0_{11}d/dr+$$

$$+\beta^0_{11})f_1(r)\Bigg|_{r=R_0}-k_1^2\int\limits_{R_0}^{R_1}f_1(r)V_{\alpha;1}(r,\beta)\times$$

$$\times\sigma_1r^{2\alpha-1}dr-k_2^2\int\limits_{R_1}^{\infty}f_2(r)V_{\alpha;2}(r,\beta)dr. \quad (12)$$

Нехай $\max\{\nu_1^2;\nu_2^2\}=\nu_2^2$. Приймемо $k_1^2=\nu_2^2-\nu_1^2\geq 0$, $k_2^2=\nu_2^2-\nu_2^2=0$.

Єдиний розв'язок крайової задачі (1)–(3), побудований методом гібридного інтегрального перетворення, запровадженого формулами (10) – (12), має структуру:

$$u_j(r)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{\sigma_1R_0^{2\alpha+1}V_{\alpha;1}(R_0,\beta)}{(-\alpha^0_{11})(\beta^2+\nu_2^2)}\times$$

$$\times V_{\alpha;j}(r,\beta)\Omega_\alpha(\beta)d\beta g_0+$$

$$+\int\limits_{R_0}^{R_1}\left(\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{V_{\alpha;j}(r,\beta)V_{\alpha;1}(\rho,\beta)}{\beta^2+\nu_2^2}\Omega_\alpha(\beta)d\beta\right)\times$$

$$\times g_1(\rho)\sigma_1\rho^{2\alpha-1}d\rho+$$

$$+\int_{R_1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{V_{\alpha;j}(r,\beta)V_{\alpha;2}(\rho,\beta)}{\beta^2+\nu_2^2}\Omega_\alpha(\beta)d\beta\right)\times$$
$$\times g_2(\rho)d\rho; j=1,2. \tag{13}$$

Порівнюючи внаслідок єдиності розв'язки (5) та (13), отримуємо значення поліпараметричної сім'ї невластивих інтегралів:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{V_{\alpha;1}(R_0,\beta)}{(-\alpha_{11}^0)(\beta^2+\nu_2^2)}V_{\alpha;j}(r,\beta)\Omega_\alpha(\beta)d\beta=$$
$$=\frac{1}{\sigma_1 R_0^{2\alpha+1}}W_{(\nu),\alpha;1j}(r); j=1,2, \tag{14}$$
$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{V_{\alpha;j}(r,\beta)V_{\alpha;k}(\rho,\beta)}{\beta^2+\nu_2^2}\Omega_\alpha(\beta)d\beta=$$
$$=\frac{1}{\sigma_k}H_{(\nu),\alpha;jk}(r,\rho); j,k=1,2. \tag{15}$$

Внаслідок того, що

$$V_{\alpha,1}(R_0,\beta)=-\frac{c_{21}b_2(\beta)\alpha_{11}^0\mathrm{sh}(\pi b_1(\beta))}{\pi\lambda^{2\alpha}R_0^{2\alpha+1}},$$

рівність (14) набуває вигляду

$$\frac{2}{\pi^2}\int_0^{\infty}\frac{b_2(\beta)\mathrm{sh}\,\pi b_1(\beta)}{\beta^2+\nu_2^2}V_{\alpha;j}(r,\beta)\Omega_\alpha(\beta)d\beta=$$
$$=\frac{\lambda^{2\alpha}}{c_{11}}R_1^{2\alpha+1}W_{(\nu),\alpha;1j}(r). \tag{16}$$

Оскільки праві частини в рівностях (12), (13) не залежать від нерівності $(\nu_2^2-\nu_1^2)\geq 0$ чи нерівності $(\nu_1^2-\nu_2^2)\geq 0$ (за умови, що $\max\{\nu_1^2,\nu_2^2\}=\nu_1^2$), то можна прийняти, за потреби, $\nu_1=\nu_2\equiv\nu=0$, звужуючи сім'ю невластивих інтегралів.

Наведемо структуру рівностей (15), (16) для випадку, коли $\alpha_{11}^0=0$, $\beta_{11}^0=1$, $\alpha_{11}^1=\beta_{21}^1=\alpha_{12}^2=\beta_{22}^1=0$, $\alpha_{21}^1=1$, $\alpha_{22}^1=a>0$, $\nu_1=\nu_2\equiv\nu$. Безпосередньо згідно з формулами (8), (9) маємо

$$W_{\nu,\alpha;11}(r)=-\frac{1}{\Delta_\alpha(\nu)}\left[\left(\nu\alpha+\frac{\nu-\alpha}{R_1}\right)\times\right.$$
$$\left.\times U_{\nu,\alpha}(\lambda R_1,\lambda r)+R_1\lambda^2 V_{\nu,\alpha}(\lambda R_1,\lambda r)\right]\equiv$$
$$\equiv-\frac{\Psi_{\nu_1,\alpha;1}(\lambda R_1,\lambda r)}{\Delta_\alpha(\nu)},$$
$$W_{\nu,\alpha;12}(r)=-\frac{1}{\lambda^{2\alpha}R_1^{2\alpha+1}}\frac{1}{\Delta_\alpha(\nu)}e^{-\nu(r-R_1)}$$
$$H_{\nu,\alpha;11}(r,\rho)=\frac{\lambda^{2\alpha}}{\Delta_\alpha(\nu)}\begin{cases}U_{\nu,\alpha}(\lambda R_0,\lambda r)\times\\ U_{\nu,\alpha}(\lambda R_0,\lambda\rho)\times\end{cases}$$
$$\begin{matrix}\times\Psi_{\nu,\alpha;1}(\lambda R_1,\lambda\rho), & R_0<r<\rho<R_1,\\ \times\Psi_{\nu,\alpha;1}(\lambda R_1,\lambda r), & R_0<r<\rho<R_1,\end{matrix}$$

$$H_{\nu,\alpha;12}(r,\rho)=$$
$$=\frac{a}{\Delta_\alpha(\nu)}e^{-\nu(\rho-R_1)}U_{\nu,\alpha}(\lambda R_0,\lambda r); \tag{17}$$
$$H_{\nu,\alpha;21}(r,\rho)=$$
$$=\frac{\exp[-\nu(r-R_1)]}{R_1^{2\alpha+1}\Delta_\alpha(\nu)}U_{\nu,\alpha}(\lambda R_0,\lambda\rho);$$
$$H_{\nu,\alpha;22}(r,\rho)=\frac{1}{\nu\Delta_\alpha(\nu)}\begin{cases}\exp[-\nu(\rho-R_1)]\times\\ \exp[-\nu(r-R_1)]\times\end{cases}$$
$$\begin{matrix}\times\Psi_{\nu,\alpha;2}(r), & R_1<r<\rho<\infty,\\ \times\Psi_{\nu,\alpha;2}(\rho), & R_1<r<\rho<\infty;\end{matrix}$$

У рівностях (17) прийняті позначення:

$$U_{\nu,\alpha}(\lambda R,\lambda x)=I_{\nu,\alpha}(\lambda R)K_{\nu,\alpha}(\lambda x)-$$
$$-I_{\nu,\alpha}(\lambda x)K_{\nu,\alpha}(\lambda R);$$
$$V_{\nu,\alpha}(\lambda R,\lambda x)=I_{\nu+1,\alpha+1}(\lambda R)K_{\nu,\alpha}(\lambda x)+$$
$$+K_{\nu+1,\alpha+1}(\lambda R)I_{\nu,\alpha}(\lambda x);$$
$$\Delta_\alpha(\nu)=\left(a\nu+\frac{\nu-\alpha}{R_1}\right)U_{\nu,\alpha}(\lambda R_0,\lambda R_1)-$$
$$-\lambda^2 R_1 V_{\nu,\alpha}(\lambda R_1,\lambda R_0)\neq 0,$$
$$\Psi_{\nu,\alpha;2}(r)=\nu a U_{\nu,\alpha}(\lambda R_0,\lambda R_1)\mathrm{ch}\,\nu(r-R_1)+$$
$$+\left(\frac{\nu-\alpha}{R_1}U_{\nu,\alpha}(\lambda R_0,\lambda R_1)-\right.$$
$$\left.-\lambda^2 R_1 V_{\nu,\alpha}(\lambda R_1,\lambda R_0)\right)\mathrm{sh}\nu(r-R_1).$$

Звідси при $\nu=\alpha=0$ одержуємо

$$\Delta_0(0)=-\lambda V_0(\lambda R_1,\lambda R_0)\equiv-\lambda[I_1(\lambda R_1)\times$$
$$\times K_0(\lambda R_0)+K_1(\lambda R_1)I_0(\lambda R_0)];$$
$$W_{0;11}(r)=\frac{V_0(\lambda R_1,\lambda r)}{V_0(\lambda R_1,\lambda R_0)};$$
$$W_{0;12}(r)=\frac{1}{\lambda R_1 V_0(\lambda R_1,\lambda R_0)}=const;$$
$$H_{0;11}(r,\rho)=-\frac{1}{V_0(\lambda R_1,\lambda R_0)}\times$$
$$\times\begin{cases}U_0(\lambda R_0,\lambda r)V_0(\lambda R_1,\lambda\rho),\\ U_0(\lambda R_0,\lambda\rho)V_0(\lambda R_1,\lambda r),\end{cases}$$
$$\begin{matrix}R_0<r<\rho<R_1,\\ R_0<\rho<r<R_1,\end{matrix} \tag{18}$$
$$H_{0;12}(r,\rho)=-\frac{a}{\lambda}\frac{U_0(\lambda R_0,\lambda r)}{V_0(\lambda R_1,\lambda R_0)};$$
$$H_{0;21}(r,\rho)=-\frac{1}{\lambda R_1}\frac{U_0(\lambda R_0,\lambda\rho)}{V_0(\lambda R_1,\lambda R_0)};$$
$$U_0(\lambda R_0,\lambda x)=I_0(\lambda R_0)K_0(\lambda x)-$$
$$-K_0(\lambda R_0)I_0(\lambda x);$$
$$H_{0;22}(r,\rho)=-\frac{1}{\lambda V_0(\lambda R_1,\lambda R_0)}\times$$

$$\times\begin{cases} aU_0(\lambda R_0,\lambda R_1)-\lambda V_0(\lambda R_1,\lambda R_0)\times \\ aU_0(\lambda R_0,\lambda R_1)-\lambda V_0(\lambda R_1,\lambda R_0)\times \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \times(r-R_1), & R_1<r<\rho<\infty, \\ \times(\rho-R_1), & R_1<\rho<r<\infty \end{matrix} =$$

$$=\begin{cases} r-R_0, & R_1<r<\rho<\infty \\ \rho-R_0, & R_1<\rho<r<\infty \end{cases} -$$

$$-\frac{a}{\lambda}\frac{U_0(\lambda R_0,\lambda R_1)}{V_0(\lambda R_1,\lambda R_0)}.$$

З іншого боку, безпосередньо отримуємо:

$$V_{\alpha;1}(r,\beta)=a\beta\pi^{-1}\mathrm{sh}\,\pi\beta U_{i\beta,\alpha}(\lambda R_0,\lambda r);$$

$$b_1(\beta)=b_2(\beta)\equiv\beta;$$

$$V_{\alpha;2}(r,\beta)=a\pi^{-1}\mathrm{sh}\,\pi\beta\Bigg[a\beta U_{i\beta,\alpha}(\lambda R_0,\lambda r)\times$$

$$\times\cos\beta(r-R_1)+\Bigg(\frac{i\beta-\alpha}{R_1}U_{i\beta,\alpha}(\lambda R_0,\lambda R_1)-$$

$$-\lambda^2R_1V_{i\beta,\alpha}(\lambda R_1,\lambda R_0)\Bigg)\sin\beta(r-R_1)\Bigg];$$

$$\Omega_\alpha(\beta)=\frac{\pi^2}{\mathrm{sh}^2\pi\beta}\Bigg(\Bigg[\frac{i\beta-\alpha}{R_1}U_{i\beta,\alpha}(\lambda R_0,\lambda R_1)-$$

$$-\lambda^2R_1V_{i\beta,\alpha}(\lambda R_1,\lambda R_0)\Bigg]^2+$$

$$+a^2\beta^2[U_{i\beta,\alpha}(\lambda R_0,\lambda R_1)]^2\Bigg)^{-1}$$

Підставивши (17) і (19) в (15), (16), маємо такі формули обчислення невластивих інтегралів:

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{\beta^2V^*_{\alpha,1}(r,\beta)d\beta}{(\beta^2+\nu^2)\omega_\alpha(\beta)}=$$

$$=\lambda^{2\alpha}R_1^{2\alpha+1}\frac{\Psi_{\nu_1,\alpha;1}(\lambda R_1,\lambda r)}{a\Delta_\alpha(\nu)}, \tag{20}$$

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{\beta V^*_{\alpha,2}(r,\beta)d\beta}{(\beta^2+\nu^2)\omega_\alpha(\beta)}=$$

$$=-\frac{\exp[-\nu(r-R_1)]}{\Delta_\alpha(\nu)}, \tag{21}$$

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{\beta^2V^*_{\alpha,1}(r,\beta)V^*_{\alpha,1}(\rho,\beta)d\beta}{(\beta^2+\nu^2)\omega_\alpha(\beta)}=$$

$$=\frac{\lambda^{2\alpha}R_1^{2\alpha+1}}{a\Delta_\alpha(\nu)}, \tag{22}$$

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{\beta^2V^*_{\alpha,2}(r,\beta)V^*_{\alpha,2}(\rho,\beta)d\beta}{(\beta^2+\nu^2)\omega_\alpha(\beta)}=$$

$$=\frac{U_{\nu,\alpha}(\lambda R_0,\lambda r)}{\Delta_\alpha(\nu)}e^{-\nu(\rho-R_1)}, \tag{23}$$

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{V^*_{\alpha,2}(r,\beta)V^*_{\alpha,2}(\rho,\beta)d\beta}{(\beta^2+\nu^2)\omega_\alpha(\beta)}=$$

$$=\frac{(\nu a)^{-1}}{\Delta_\alpha(\beta)}\begin{cases} e^{-\nu(\rho-R_1)}\Psi_{\nu,\alpha;2}(r), \\ e^{-\nu(r-R_1)}\Psi_{\nu,\alpha;2}(\rho), \end{cases}$$

$$\begin{matrix} R_1<r<\rho<\infty, \\ R_1<\rho<r<\infty; \end{matrix} \tag{24}$$

Із формул (20) – (24) при $\nu=\alpha=0$ одержуємо:

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{U_{i\beta}(\lambda R_0,\lambda r)}{\omega_0(\beta)}d\beta=$$

$$=\frac{R_1}{a}\frac{V_0(\lambda R_1,\lambda r)}{V_0(\lambda R_1,\lambda R_0)}, \tag{25}$$

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{V^*_{0,2}(r,\beta)}{\omega_0(\beta)}\frac{d\beta}{\beta}=$$

$$=\frac{1}{\lambda V_0(\lambda R_1,\lambda R_1)}, \tag{26}$$

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty U_{i\beta}(\lambda R_0,\lambda r)U_{i\beta}(\lambda R_0,\lambda\rho)\frac{d\beta}{\beta}=$$

$$=-\frac{R_1}{aV_0(\lambda R_0,\lambda R_1)}\times$$

$$\times\begin{cases} U_0(\lambda R_0,\lambda r)V_0(\lambda R_1,\lambda\rho), \\ U_0(\lambda R_0,\lambda\rho)V_0(\lambda R_1,\lambda r), \end{cases}$$

$$\begin{matrix} R_0<r<\rho<R_1, \\ R_0<\rho<r<R_1 \end{matrix} \tag{27}$$

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty V^*_{0,2}(r,\beta)U_{i\beta}(\lambda R_0,\lambda\rho)\frac{d\beta}{\beta\omega_0}=$$

$$=-\frac{1}{\lambda}\frac{U_0(\lambda R_0,\lambda\rho)}{V_0(\lambda R_0,\lambda R_1)}, \tag{28}$$

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{V^*_{0,2}(r,\beta)V^*_{0,2}(\rho,\beta)}{\omega_0(\beta)}\frac{d\beta}{\beta^2}=$$

$$=\begin{cases} r-R_1, & R_1<r<\rho, \\ \rho-R_1, & R_1<\rho<r<\infty \end{cases} -$$

$$-\frac{aU_0(\lambda R_0,\lambda R_1)}{\lambda V_0(\lambda R_1,\lambda R_0)}. \tag{29}$$

У рівностях (25) – (29) беруть участь функції:

$$U_{i\beta}(\lambda R_0,\lambda x)=I_{i\beta}(\lambda R_0)K_{i\beta}(\lambda x)-$$

$$-I_{i\beta}(\lambda x)K_{i\beta}(\lambda R_0);$$

$$V_{i\beta}(\lambda R_1,\lambda R_0)=I_{i\beta+1}(\lambda R_1)K_{i\beta}(\lambda R_0)+$$

$$+I_{i\beta}(\lambda R_0)K_{i\beta+1}(\lambda R_1);$$

$$Z_{i\beta}(\lambda R_0,\lambda R_1)=i\beta R_1^{-1}U_{i\beta}(\lambda R_0,\lambda R_1)-$$

$$-\lambda V_{i\beta}(\lambda R_0,\lambda R_1),$$

$$\omega_0(\beta)=[Z_{i\beta}(\lambda R_0,\lambda R_1)]^2+$$

$$+a^2\beta^2[U_{i\beta}(\lambda R_0,\lambda R_1)]^2,$$

$$V^*_{0,2}(r,\beta)=Z_{i\beta}(\lambda R_0,\lambda R_1)\sin\beta(r-R_1)+$$

$$+a\beta U_{i\beta}(\lambda R_0,\lambda R_1)\cos\beta(r-R_1).$$

При інших значеннях коефіцієнтів α^m_{jk} та β^m_{jk} в межах цієї моделі одержуватимемо значення невластивих інтегралів безпосередньо із загальних структур (15), (16).

Література

[1] Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.

[2] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Марычев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. – М.: Наука, 1983. – 798 с.

[3] Міхалевська Г.І. Запровадження інтегральних перетворень (Фур'є, Канторовича-Лєбєдєва) на кусково-однорідних проміжках // Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Чернівці, 1996. – 152 с.

[4] Ленюк М.П., Літовченко В.А. Обчислення невласних інтегралів методом гібридних інтегральних перетворень. Том 1. – К.: Ін-т математики НАН України, 1994. – 244 с.

CALCULATION OF INFINITE INTEGRALS BY METHOD OF HYBRID INTEGRAL TRANSFORMATION OF (KONTOROVICH-LEBEDEV)-FOURIER TYPE ON POLAR AXIS $r \geq R_0 > 0$

M. Lenjuk[a], M. Shinkarik[b]

[a] *Yurij Fedkovych Chernivtsi National University, Kotsubinsky Str., 2, 58012, Chernivtsi, Ukraine*
[b] *Ternopil National Economic University, Lvivska Str., 11, 46000, Ternopil, Ukraine*

Polyparametric infinity integrals from Bessel functions by index and trigonometric functions are calculated be the method of comparison of solutions of boundary problem on polar axis $r \geq R_0 > 0$ with contact point for separate system of modificated differential Bessel equation (with degeneration at senior derivative) and Fourier equation.

Keywords: hibrid integral transformation, infinite integrals, fundamental system of solutions, Bessel differential equation, Fourier differential equation.

2000 MSC: 44A15, 44A45

УДК: 517.443