

## НЕЯВНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПОСЛІДОВНОГО ДВОТАКТНОГО ТИРИСТОРНОГО ІНВЕРТОРА

*Ї Дзелендзяк У.Ю., Самотий В.В., Павельчак А.Г., 2008*

**Наведено дискретну математичну модель послідовного двотактного тиристорного інвертора, орієнтовану на неявні методи числового інтегрування. Моделювання вентилів виконується за схемою ідеального ключа. Аналіз усталених режимів здійснюється екстраполяційним е-алгоритмом.**

**The discrete mathematical model of consecutive duple thyristor inverter directed to implicit methods of numerical integration is present. The valve modeling is done by ideal switch scheme. The steady-state analysis is done by extrapolation e-algorithm.**

**Вступ.** Одним з найпоширеніших перетворень в системах керування є перетворення форми та параметрів сигналів напруги. Це, зокрема, перетворення постійної напруги на змінну, змінної на постійну, постійної на постійну та змінної на змінну. Такі перетворювачі використовуються у блоках живлення як модулятори, а також для частотного керування електричними двигунами. Базовими елементами у вказаних перетворювачах є перетворювачі змінної напруги на постійну та перетворювачі постійної напруги на змінну, тобто випрямлячі та інвертори. Схемотехнічні рішення та питання експлуатації таких перетворювачів сьогодні достатньо опрацьовані. Натомість питання аналізу динаміки їхньої роботи і надалі викликають значний інтерес і є дискусійними. Це пов'язано з нелінійністю характеристик складових елементів досліджуваних перетворювачів напруги, що істотно ускладнює аналіз перехідних і усталених процесів їхньої роботи.

**1. Аналіз публікацій.** Для аналізу динаміки роботи електромагнетних пристроїв з керуваними і некеруваними напівпровідниковими вентилями розроблено багато математичних моделей, які використовують різноманітні числові методи.

У роботі [5] для аналізу перехідного режиму роботи нелінійного трансформатора струму застосовується метод малого параметра з апроксимацією кривої намагнечування. Найбільша похибка у разі використання цього методу може виникнути внаслідок неточного визначення кривої намагнечування. Однак під час аналізу істотно нелінійних об'єктів також виникають проблеми, пов'язані з розділенням рівнянь на лінійні та нелінійні частини і їхнім розкладом за степенями малого параметра. Питання математичного опису перехідних процесів в лінійних колах з урахуванням змінного опору ключа і ненульової тривалості комутації розглянуто в [4] і запропоновано варіанти розв'язку на основі застосування виродженої гіпергеометричної функції і функцій Бесселя. У роботі [1] запропоновано методика розрахунку перехідних процесів на основі використання розривних функцій для описання моменту комутації, напруг та струмів в електричній мережі. Немає необхідності у використанні законів комутації, тому що вони виявляються вже врахованими у диференціальних рівняннях та розв'язку загального вигляду, які записуються за допомогою розривних функцій. Проте ця методика орієнтована на явні методи числового інтегрування. Для аналізу перехідних процесів електромагнетних пристроїв, які описуються жорсткими диференціальними рівняннями, використовують неявні методи числового інтегрування, а саме неявні методи Ейлера та трапецій [2], методи формул диференціювання назад (ФДН).

Для аналізу стаціонарних режимів динамічних систем пропонується узагальнений метод січних у формулюванні Бройдена [7]. Цей метод приблизно однаковий за економічністю з неявними методами числового інтегрування, але в алгоритмічному аспекті є значно складнішим, бо він вимагає формування, крім основної системи диференціальних рівнянь, системи у варіаціях. Аналіз стаціонарних режимів також здійснюють методами гармонічного балансу [3], Ейприла-Трика та екстраполяційними методами [6].

**2. Виведення рівнянь динаміки.** Розглянемо схему послідовного інвертора, яка називається двотактною або з розділеним конденсатором (рис. 1). Особливість її роботи полягає в тому, що при розряджанні конденсатора  $C_2$  при відкритому тиристорі  $T_2$  конденсатор  $C_1$  буде заряджатися від джерела, створюючи через навантаження струм такого самого напрямку. Заряд цього конденсатора забезпечує неперервність струму, що віддає джерело.

Розглянемо три можливі комбінації відкритих і закритих тиристорів. Перша, коли тиристор  $T_1$  – відкритий, а  $T_2$  – закритий. Друга:  $T_1$  – закритий, а  $T_2$  – відкритий. Третя, коли обидва тиристори відкриті. Розрахункова схема першої комбінації подана на рис. 2, а. Рівняння електричного контуру має вигляд

$$\frac{d\Psi_1}{dt} = u_{C1} + (r_1 + r_H)i_H, \quad (1)$$

де  $u_{C1}$  – напруга на конденсаторі  $C_1$ ;  $r_1$ ,  $r_H$  – опори обвиток дроселя і навантаження;  $\Psi_1$  – повне потокозчеплення першої обвитки;  $i_H$  – струм навантаження.

Струм навантаження визначаємо з рівняння стану магнетного контуру дроселя, або згідно з контурами розсіяння

$$i_H = -\alpha'\psi, \quad i_H = -\alpha_1(\Psi_1 - \psi), \quad (2 \text{ а,б})$$

Конденсатори описуються рівняннями

$$\frac{du_{C1}}{dt} = C_1^{-1} \left( \frac{E - u_{C1} - u_{C2}}{r_0} + i_H \right), \quad \frac{du_{C2}}{dt} = C_2^{-1} \frac{E - u_{C1} - u_{C2}}{r_0}, \quad (3)$$

де  $C_1$ ,  $C_2$  – ємності конденсаторів.

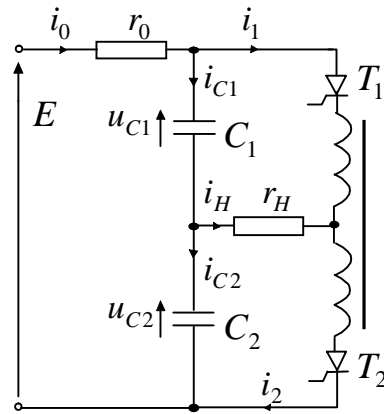


Рис. 1. Принципова схема послідовного двотактного інвертора

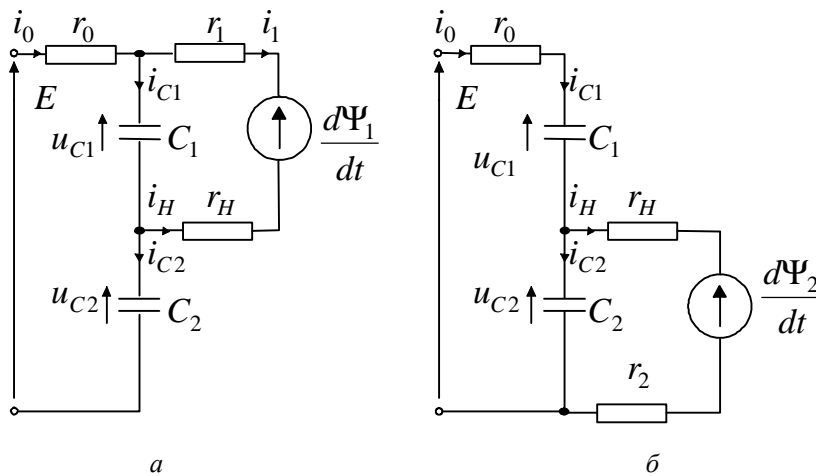


Рис. 2. Розрахункові схеми:

а) відкритий тиристор  $T_1$ ; б) відкритий тиристор  $T_2$

Умова закривання тиристора  $T_1$  визначається струмом навантаження

$$\frac{di_H}{dt} > 0, \quad i_H = 0 \quad (4)$$

Рівняння (1), (3) розкладемо за неявним методом Ейлера.

Отримаємо

$$\Psi_1 = \Psi_1^0 + (u_{C1} + (r_1 + r_H)i_H)\Delta t, \quad (5)$$

$$u_{C1} = u_{C1}^0 + \left( \frac{E - u_{C1} - u_{C2}}{r_0} + i_H \right) \frac{\Delta t}{C_1}, \quad u_{C2} = u_{C2}^0 + \left( \frac{E - u_{C1} - u_{C2}}{r_0} \right) \frac{\Delta t}{C_2}. \quad (6)$$

Підставимо (2 б) в (5), (6) і розв'яжемо їх відносно  $u_{C1}$ ,  $u_{C2}$  і  $\Psi_1$ . Введемо позначення

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= 1 + \frac{\Delta t}{r_0 C_1}, \quad k_2 = 1 + \frac{\Delta t}{r_0 C_2}, \quad k_3 = \left( u_{C1}^0 + E \frac{\Delta t}{r_0 C_1} \right) / k_1, \quad k_4 = \left( u_{C2}^0 + E \frac{\Delta t}{r_0 C_2} \right) / k_2, \\ k_5 &= \frac{\Delta t}{k_1 r_0 C_1}, \quad k_6 = \frac{\Delta t}{k_2 r_0 C_2}, \quad k_7 = \frac{\alpha_1 \Delta t}{k_1 C_1}, \quad k_9 = (k_3 - k_4 k_5) / (1 - k_5 k_6), \quad k_{10} = k_7 / (1 - k_5 k_6), \\ k_{12} &= k_{10}, \quad k_{13} = k_4 - k_6 k_9, \quad k_{14} = k_6 k_{10}, \quad k_{16} = -k_6 k_{12}, \quad k_{17} = 1 + (k_{10} + (r_1 + r_H)\alpha_1)\Delta t, \\ k_{19} &= \Psi_1^0 + k_9 \Delta t, \quad k_{20} = (k_{12} + (r_1 + r_H)\alpha_1)\Delta t, \quad k_{25} = k_{19} / k_{17}, \quad k_{26} = k_{20} / k_{17}. \end{aligned} \right\} (7)$$

Тоді напруги на конденсаторах  $u_{C1}$ ,  $u_{C2}$  будуть визначатися за формулами

$$u_{C1} = k_9 - k_{10} \Psi_1 + k_{12} \Psi, \quad u_{C2} = k_{13} + k_{14} \Psi_1 + k_{16} \Psi, \quad (8)$$

а повне потокозчеплення першої обвитки  $\Psi_1$  за формулою

$$\Psi_1 = k_{25} + k_{26} \Psi. \quad (9)$$

Підставимо (8) в (2) і запишемо отриманий результат у вигляді рівняння

$$F(\Psi) = \alpha'(\Psi)\Psi + A\Psi + B = 0, \quad \text{де } A = \alpha_1(k_{26} - 1) - \alpha', \quad B = \alpha_1 k_{25}. \quad (10)$$

Розрахункова схема другої комбінації подана на рис. 2, б. Рівняння електричного контуру має вигляд

$$\frac{d\Psi_2}{dt} = u_{C2} - (r_2 + r_H)i_H, \quad (11)$$

Струм навантаження буде визначатись за формулами

$$i_H = \alpha' \Psi, \quad i_H = \alpha_2 (\Psi_2 - \Psi), \quad (12 \text{ а, б})$$

Конденсатори описуються рівняннями

$$\frac{du_{C1}}{dt} = C_1^{-1} \left( \frac{E - u_{C1} - u_{C2}}{r_0} \right), \quad \frac{du_{C2}}{dt} = C_2^{-1} \left( \frac{E - u_{C1} - u_{C2}}{r_0} - i_H \right) \quad (13)$$

Умова закривання тиристора  $T_2$  визначається струмом навантаження (4).

Рівняння (11), (13) розкладемо за неявним методом Ейлера.

$$\Psi_2 = \Psi_2^0 + (u_{C2} - (r_2 + r_H)i_H)\Delta t, \quad (14)$$

$$u_{C1} = u_{C1}^0 + \left( \frac{E - u_{C1} - u_{C2}}{r_0} \right) \frac{\Delta t}{C_1}, \quad u_{C2} = u_{C2}^0 + \left( \frac{E - u_{C1} - u_{C2}}{r_0} - i_H \right) \frac{\Delta t}{C_2}. \quad (15)$$

Підставимо (12 б) в (14), (15) і розв'яжемо їх відносно напруг на конденсаторах  $u_{C1}$ ,  $u_{C2}$  і повного потокозчеплення другої обвитки  $\Psi_2$ . Отримаємо

$$u_{C1} = k_9 + k_{11}\Psi_2 + k_{12}\psi, \quad u_{C2} = k_{13} - k_{15}\Psi_2 + k_{16}\psi. \quad (16)$$

$$\Psi_2 = k_{27} + k_{28}\psi, \quad (17)$$

де

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= 1 + \frac{\Delta t}{r_0 C_1}, \quad k_2 = 1 + \frac{\Delta t}{r_0 C_2}, \quad k_3 = \left( u_{C1}^0 + E \frac{\Delta t}{r_0 C_1} \right) / k_1, \quad k_4 = \left( u_{C2}^0 + E \frac{\Delta t}{r_0 C_2} \right) / k_2, \\ k_5 &= \frac{\Delta t}{k_1 r_0 C_1}, \quad k_6 = \frac{\Delta t}{k_2 r_0 C_2}, \quad k_8 = \frac{\alpha_2 \Delta t}{k_2 C_2}, \quad k_9 = (k_3 - k_4 k_5) / (1 - k_5 k_6), \quad k_{11} = k_5 k_8 / (1 - k_5 k_6), \\ k_{12} &= -k_{11}, \quad k_{13} = k_4 - k_6 k_9, \quad k_{15} = k_8 + k_6 k_{11}, \quad k_{16} = k_{15}, \quad k_{22} = 1 + (k_{15} + (r_2 + r_H) \alpha_2) \Delta t, \\ k_{23} &= \Psi_2^0 + k_{13} \Delta t, \quad k_{24} = k_{16} \Delta t + (r_2 + r_H) \alpha_2 \Delta t, \quad k_{27} = k_{23} / k_{22}, \quad k_{28} = k_{24} / k_{22}. \end{aligned} \right\} (18)$$

Підставимо (17) в (12) і запишемо одержаний результат у вигляді рівняння (10), де

$$A = \alpha_2 (k_{28} - 1) - \alpha', \quad B = \alpha_2 k_{27}. \quad (19)$$

Виконавши аналогічні розрахунки для третьої комбінації і підсумувавши отримані результати, виведемо формули для узагальненого варіанта. Для цього введемо додаткові логічні змінні  $m_1$ ,  $m_2$ , що набувають значень 0, 1. Перша комбінація буде відповідати таким значенням:  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = 0$ , друга –  $m_1 = 0$ ,  $m_2 = 1$ , третя –  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = 1$ . Тоді узагальнені вирази для коефіцієнтів будуть мати вигляд

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= 1 + \frac{\Delta t}{r_0 C_1}, \quad k_2 = 1 + \frac{\Delta t}{r_0 C_2}, \quad k_3 = \left( u_{C1}^0 + E \frac{\Delta t}{r_0 C_1} \right) / k_1, \quad k_4 = \left( u_{C2}^0 + E \frac{\Delta t}{r_0 C_2} \right) / k_2, \\ k_5 &= \frac{\Delta t}{k_1 r_0 C_1}, \quad k_6 = \frac{\Delta t}{k_2 r_0 C_2}, \quad k_7 = m_1 \frac{\alpha_1 \Delta t}{k_1 C_1}, \quad k_8 = m_2 \frac{\alpha_2 \Delta t}{k_2 C_2}, \quad k_9 = \frac{k_3 - k_4 k_5}{1 - k_5 k_6}, \\ k_{10} &= \frac{k_7}{1 - k_5 k_6}, \quad k_{11} = \frac{k_5 k_8}{1 - k_5 k_6}, \quad k_{12} = \frac{k_7 - k_5 k_8}{1 - k_5 k_6}, \quad k_{13} = k_4 - k_6 k_9, \\ k_{14} &= k_6 k_{10}, \quad k_{15} = k_8 + k_6 k_{11}, \quad k_{16} = k_8 - k_6 k_{12}, \quad k_{17} = 1 + (k_{10} + m_1 (r_1 + r_H) \alpha_1) \Delta t, \\ k_{18} &= m_1 m_2 (k_{11} + r_H \alpha_2) \Delta t, \quad k_{19} = m_1 (\Psi_1^0 + k_9 \Delta t), \\ k_{20} &= 1 - m_1 + m_1 (k_{12} + (r_1 + r_H) \alpha_1 - m_2 r_H \alpha_2) \Delta t, \\ k_{21} &= m_1 m_2 (k_{14} + r_H \alpha_1), \quad k_{22} = 1 + m_2 (k_{15} + (r_2 + r_H) \alpha_2) \Delta t, \quad k_{23} = m_2 (\Psi_2^0 + k_{13} \Delta t), \\ k_{24} &= 1 - m_2 + m_2 (k_{16} - m_1 r_H \alpha_1 + (r_2 + r_H) \alpha_2) \Delta t, \quad k_{25} = \Delta_1 / \Delta, \quad k_{26} = \Delta_2 / \Delta, \\ k_{27} &= \Delta_3 / \Delta, \quad k_{28} = \Delta_4 / \Delta, \quad \Delta = k_{17} k_{22} - k_{18} k_{21}, \quad \Delta_1 = k_{18} k_{23} + k_{19} k_{22}, \\ \Delta_2 &= k_{18} k_{24} + k_{20} k_{22}, \quad \Delta_3 = k_{17} k_{23} + k_{19} k_{21}, \quad \Delta_4 = k_{17} k_{24} + k_{20} k_{21}. \end{aligned} \right\} (20)$$

Рівняння (10) розв'язуємо ітераційним методом Ньютона. Маючи робоче потокозчеплення  $\psi$ , обчислюємо решту змінних. Для цього порівнюємо вирази для  $\Psi_1$ ,  $\Psi_2$ ,  $u_{C1}$ ,  $u_{C2}$ ,  $i_H$  для трьох комбінацій і узагальнимо їх за допомогою додаткових логічних змінних  $m_1$ ,  $m_2$ . Тоді узагальнені формули будуть мати вигляд:

$$u_{C1} = k_9 - m_1 k_{10} \Psi_1 + m_2 k_{11} \Psi_2 + k_{12} \psi, \quad u_{C2} = k_{13} + m_1 k_{14} \Psi_1 - m_2 k_{15} \Psi_2 + k_{16} \psi, \quad (22)$$

$$\Psi_1 = m_1 (k_{25} + k_{26} \psi), \quad \Psi_2 = m_2 (k_{27} + k_{28} \psi), \quad i_H = m_2 \alpha_2 (\Psi_2 - \psi) - m_1 \alpha_1 (\Psi_1 - \psi) \quad (23)$$

**3. Результати комп'ютерного симулювання.** На рис. 3–6 наведено результати розрахунку усталеного режиму послідовного двотактного тиристорного інвертора. Усталений режим в такому разі був нав'язаний частотою перемикання тиристорів, яка була прийнятою  $f = 25$  Гц, тобто період коливань становить  $T = 0.04$  с. Розрахунок виконувався екстраполяційним методом для таких вхідних даних:  $E = 311$  В,  $r_0 = 2$  Ом,  $r_1 = 2$  Ом,  $r_2 = 3.6$  Ом,  $r_H = 20$  Ом,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 270$  Гн<sup>-1</sup>,  $C_1 = C_2 = 50$  мкФ. Крива намагнечування апроксимована кубічним сплайном, де  $a_1 = 0.25$  Гн<sup>-1</sup>,  $a_2 = 3$  Гн<sup>-1</sup>,  $\psi_1 = 0.2$  Вб,  $\psi_2 = 0.9$  Вб,  $\phi(\psi_1) = 0.05$  А,  $\phi(\psi_2) = 0.9$  А,  $\alpha''(\psi_1) = a_1$ ,  $\alpha''(\psi_2) = a_2$ .

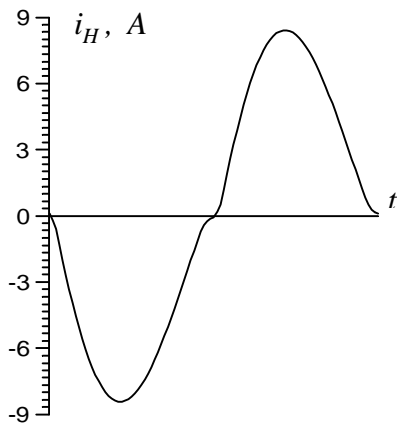


Рис. 3. Розрахункова крива струму навантаження  $i_H$  при  $C_1 = C_2 = 50$  мкФ

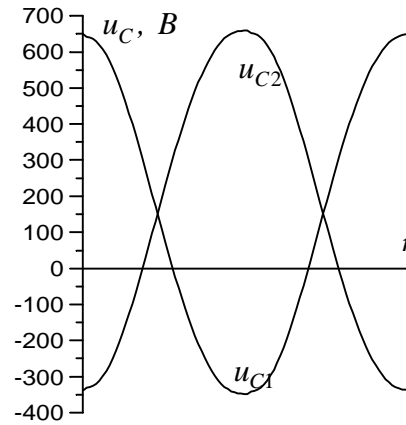


Рис. 4. Розрахункові криві напруг на конденсаторах при  $C_1 = C_2 = 50$  мкФ

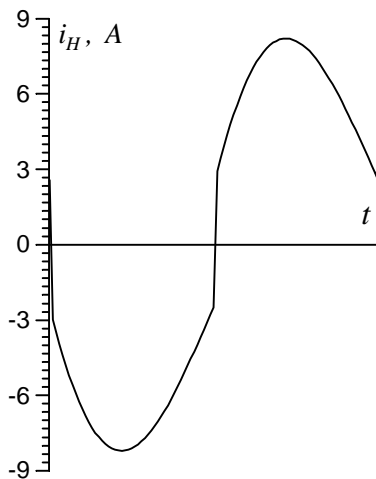


Рис. 5. Розрахункова крива струму навантаження  $i_H$  при  $C_1 = C_2 = 90$  мкФ

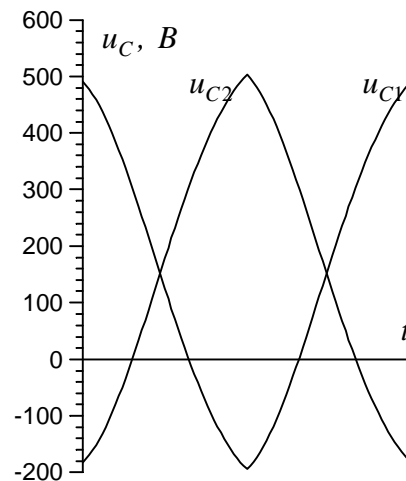


Рис. 6. Розрахункові криві напруг на конденсаторах при  $C_1 = C_2 = 90$  мкФ

На рис. 3 наведено розрахункову криву усталеного режиму для струму навантаження  $i_H$  при  $C_1 = C_2 = 50$  мкФ. Як видно з рисунка, при цих параметрах інвертора та частоті комутації тиристорів струм навантаження  $i_H$  є близьким до синусоїдальної залежності. Це означає, що власна

частота коливань інвертора практично збігається з частотою перемикання тиристорів. Криві напруг на конденсаторах  $u_{C1}$  і  $u_{C2}$  при  $C_1 = C_2 = 50$  мкФ зображені на рис. 4. Ці криві також близькі до синусоїдальної залежності і містять постійну складову, яка наближено дорівнює 160 В.

На рис. 5 наведено розрахункову криву усталеного режиму для струму навантаження  $i_H$  при  $C_1 = C_2 = 90$  мкФ. Змінивши ємності конденсаторів за незмінної частоти перемикання тиристорів, ми отримали криву струму навантаження  $i_H$ , яка вже істотно відрізняється від синусоїди. Іншими словами, власна частота коливань інвертора відмінна від частоти перемикання тиристорів. На рис. 6 зображені криві напруг на конденсаторах  $u_{C1}$  і  $u_{C2}$  при  $C_1 = C_2 = 90$  мкФ. Їхня форма також відмінна від синусоїдальної і є трикутною. Це означає, що конденсатори не встигають зарядитися до амплітуди живлячої напруги.

**4. Висновок.** Розроблено математичну модель послідовного двотактного тиристорного інвертора, яка ґрунтується на неявному методі Ейлера. Робота напівпровідникових вентилів моделювалася за схемою ідеального ключа введенням у дискретні рівняння додаткових логічних змінних, які набувають значень 0, 1, що значно спрощує алгоритм аналізу і скорочує обсяг обчислень. Розрахунок усталених процесів виконувався екстраполяційним  $\varepsilon$ -алгоритмом. Запропонована математична модель дає можливість за допомогою числового експерименту підбирати параметри інвертора, а також частоту перемикання тиристорів, щоб досягти синусоїдальності вихідного сигналу.

1. Боев В.М. Использование разрывных функций для расчета переходных процессов и импульсных воздействий в линейных электрических цепях // *Электронное моделирование*. – 2002. – № 6. – С. 67–79. 2. Васьковский Ю.Н. Перспектива моделирования динамических режимов электромеханических преобразователей на основе цепно-полевых методов // *Электротехника і електромеханіка*. – 2003. – № 1. – С. 23–25. 3. Глухивский Л. И. Расчет периодических процессов электротехнических устройств. – Львов: Вища школа, 1984. – 164 с. 4. Глухов О.А. Переходные процессы в линейных цепях с сосредоточенными параметрами при "мягкой" коммутации // *Электричество*. – 2001. – № 11. – С. 52–56. 5. Стогний Б.С., Шидловская Н.А., Сопель М.Ф. Переходный режим работы нелинейного трансформатора тока // *Электронное моделирование*. – 2000. – № 1. – С. 74–79. 6. Чабан В.И., Самотый В.В. Применение экстраполяционного метода в задачах ускоренного поиска стационарных процессов электромагнитных устройств // *Изв. вузов. Электромеханика*. – 1987. – № 8. – С. 13–17. 7. Broyden C.G. A class of methods for solving nonlinear simultaneous equations // *Math. Comp.* – 1965. – Vol. 19 – P. 577–593.