

УДК 621.01:621-868

В.М. ГУРСЬКИЙ

Національний університет “Львівська політехніка”

## ВИЗНАЧЕННЯ ВЛАСНИХ ЧАСТОТ КОЛИВАНЬ ДВОМАСОВОЇ ВІБРАЦІЙНОЇ МАШИНИ З ЕЛЕКТРОМАГНІТНИМ ПРИВОДОМ ТА ПРОСТОРОВИМ РУХОМ РОБОЧОГО ОРГАНА

© Гурський В.М., 2007

*Наведено методику визначення власних частот коливань двомасової коливальної системи з чотирма ступенями вільності. Здійснено порівняння значень власних частот з врахуванням маси пружного елемента. Проведено порівняльний частотний аналіз твердотільної моделі двомасової коливальної системи методом скінченних елементів у програмному продукті CosmosWorks для SolidWorks 2006.*

*This article describes the method of determination of own frequencies and forms of vibrations of the same double-mass oscillating system is resulted with four degrees of liberty. Comparison of values of own frequencies is carried out in view of weight of an elastic element. The comparative frequency analysis of computer model of double-mass oscillating system is carried out by the method of eventual elements in the software product of CosmosWorks for SolidWorks 2006.*

**Вступ.** Машинобудівна промисловість широко використовує на операціях об'ємної обробки деталей (а саме – для поверхневого зміцнення, зняття задирок та облою, шліфування, полірування, нанесення покриття, очищення від нагару тощо) вібраційні машини з електромагнітним приводом за робочою частотою 25 або 50 Гц. Для реалізації циркуляційно-просторового руху завантаження двомасові вібраційні машини з електромагнітним приводом використовують пружні системи у вигляді нахилених (рис. 1, а) [1] та вертикально розташованих (рис. 1, б) [2, 3] пружних стрижнів, що розташовані симетрично стосовно осі вібромашини по колу з певним кроком, залежно від кількості пружних елементів. Використовуються двомасові вібромашини з  $U$ -подібними контейнерами [4], які виконані з двома коловими вібророзбудниками, в яких використано поперечну та поздовжню циркуляції (рис. 3, а) середовища в межах камери у разі різниці змушувальної сили (амплітуди коливань) вздовж осі вібромашини. Особливості двомасових динамічних схем вібромашин з електромагнітним приводом відомі з [5, 6].

**Постановка проблеми.** Як розширення можливості використання двомасових динамічних схем вібромашин з електромагнітним приводом та з метою спрощення існуючих пружних систем доцільно розробити методику розрахунку вертикальної пружної системи у вигляді одного стрижня, розташованого вздовж осі вібромашини. Значення власних частот коливань вібраційної машини визначатиметься геометричними параметрами пружного стрижня та інерційними параметрами коливальних мас, що утворюють двомасову систему з чотирма ступенями вільності.

**Постановка проблеми.** Використання відомих методів функцій Крилова та початкових параметрів [7, 8] дасть змогу визначити власні частоти та форми коливань двомасової коливальної системи та встановити характер впливу маси пружного стрижня на значення цих частот.

**Динамічна схема двомасової вібраційної машини з електромагнітним приводом та просторовим рухом робочого органа.** У вібраційній машині (рис. 2) силове збурення відбувається коловим електромагнітним вібророзбудником між робочим органом 1 та реактивною масою 2, що з'єднані вертикальною пружною системою 3 у вигляді одного стрижня завдовжки  $L$  з параметрами жорсткості  $EJ$ , який наділений двома ступенями вільності у разі закріплення одного з кінців –

лінійним зміщенням  $x$  та кутом повороту  $\varphi$  щодо горизонтальної осі. Реактивна коливальна маса 3 за периметром встановлена через віброізолятори 4 із осьюовою жорсткістю  $c_{i3}$  на основу 5.

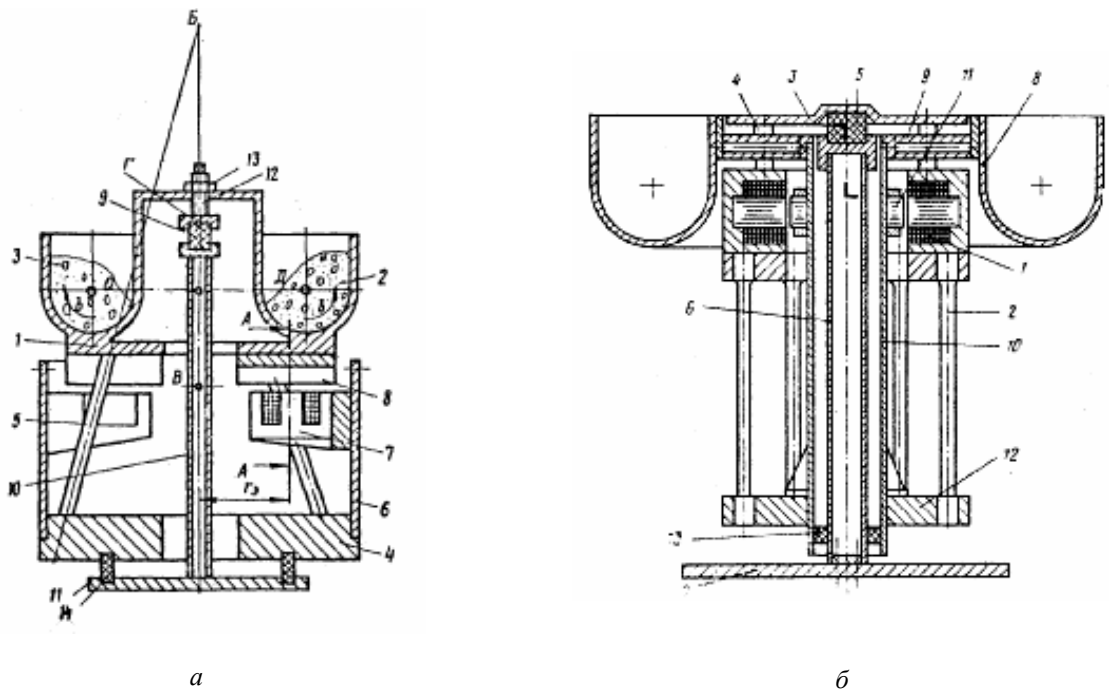


Рис. 1. Двомасові вібраційні машини з електромагнітним приводом та просторовим рухом робочого органа з пружною системою у вигляді нахилених (а) та вертикально розташованих (б) пружних стрижнів

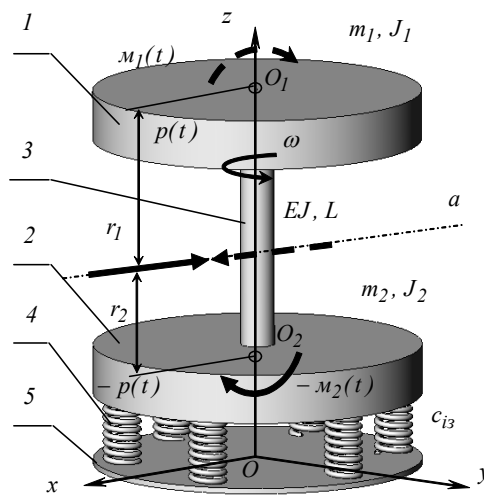


Рис. 2. Динамічна схема двомасової вібраційної машини

Такі вібраційні машини розраховуватимуться на необхідну власну частоту коливань  $\omega_0$  визначенням жорсткісних параметрів пружного стрижня за двомасовою коливальною схемою з чотирма ступенями вільності.

Інерційні параметри коливальних тіл 1 та 2 відповідно: маси  $m_1$  і  $m_2$  та моменти інерції  $J_1$  та  $J_2$  щодо горизонтальних осей, що проходять через їх центри мас  $O_1$  і  $O_2$ . Силовий вплив на

робочий орган та реактивну масу на динамічній схемі (рис. 2) зображений векторами зусилля  $p(t)$  і  $-p(t)$ , векторами згинальних моментів  $M_1(t)$  і  $-M_2(t)$ , що діють в одній площині  $xOy$ . Вектори згинальних моментів  $M_1(t)$  і  $-M_2(t)$  утворюються в результаті рознесення центрів мас робочого органа 1 та реактивної маси 2 щодо лінії  $a$  дії зусиль  $p(t)$  і  $-p(t)$  відповідно на відстані  $r_1$  та  $r_2$ . В момент вмикання одного з електромагнітів робочий орган 1 та реактивна маса 2 здійснюють одночасно поступальний рух вздовж осі  $x$  та провертаються щодо власних центрів ваги. У результаті почергового вмикання кожного з електромагнітів силові фактори (вектори) обертаються навколо горизонтальної осі  $Oz$  із коловою частотою  $\omega$  живлення електромагнітного вібробудника, а коливальні тіла повторюють свій поступальний та обертальний рухи під дією відповідних силових чинників. Коливальні маси обкочуються навколо осі вібромашини за колами деяких радіусів, утворених нахилами на певні кути у вертикальній площині, із частотою живлення, синфазною до горизонтальних переміщень. Отримавши складні коливання, контейнер забезпечує циркуляційно-просторовий рух завантаження як вздовж своєї кругової осі (гвинтової у разі торово-гвинтових контейнерів), так і в радіальному напрямку (рис. 3, б).

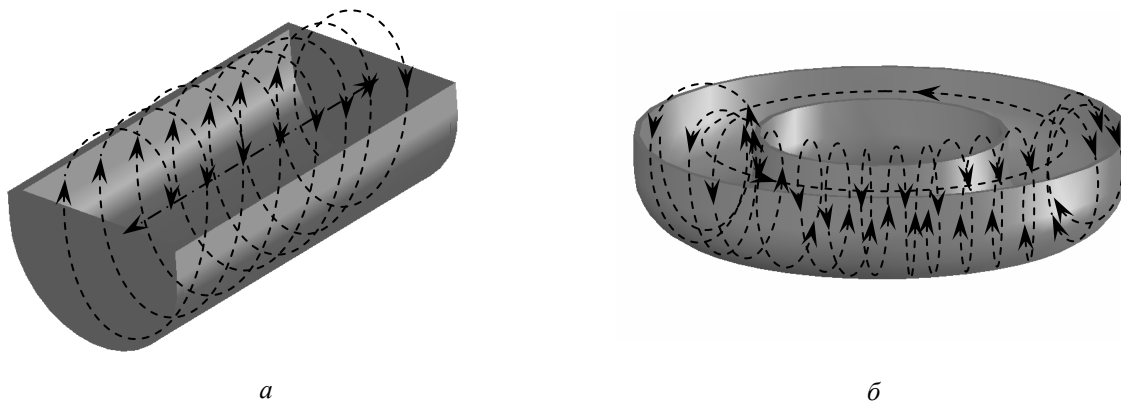


Рис. 3. Рух завантаження в U-подібному (а) та торовому (б) контейнерах

Для розрахунку стрижня, що працює на згин по колу, достатньо розглянути динамічну модель руху двомасової коливальної системи з чотирма ступенями вільності (рис. 4) для плоского руху за відносними узагальненими координатами  $x_1, \varphi_1, x_2, \varphi_2$ , де  $x_1$  – миттєве переміщення вздовж осі  $x$  центра мас  $O_1$  маси  $m_1$  внаслідок силового збурення  $-p(t) = -P \sin \omega t$ ;  $\varphi_1$  – миттєвий кут повороту маси  $m_1$  навколо власного центра мас  $O_1$ , викликаний дією згинального моменту  $-M_1(t) = -M \sin \omega t$ ;  $x_2$  – миттєве переміщення вздовж осі  $x$  центра мас  $O_2$  маси  $m_2$  внаслідок силового збурення  $p(t) = P \sin \omega t$ ;  $\varphi_2$  – миттєвий кут повороту маси  $m_2$  навколо власного центра мас  $O_2$ , викликаний дією згинального моменту  $M_2(t) = M \sin \omega t$ .

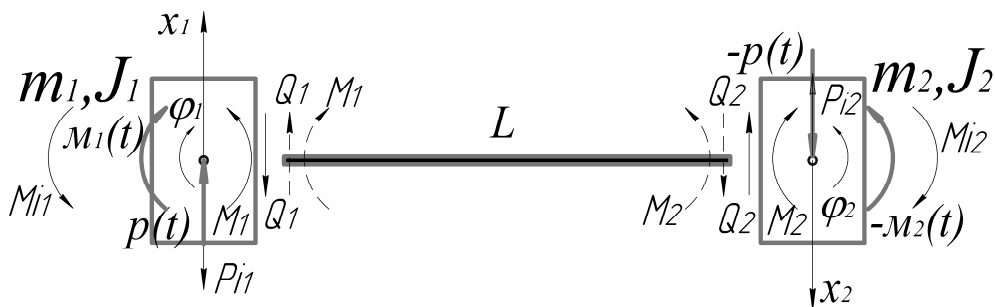


Рис. 4. Сили, що діють на двомасову коливальну систему

Умова рівноваги за принципом Даламбера:

$$\begin{cases} P_{i1} + Q_1 = p(t); \\ M_{i1} + M_1 = m_1(t); \\ P_{i2} + Q_2 = -p(t); \\ M_{i2} + M_2 = -m_2(t), \end{cases} \quad (1)$$

де  $P_{i1}, P_{i2}, M_{i1}, M_{i2}$  – відповідно сили та моменти інерції, що діють на робочий орган та реактивну масу;  $Q_1, Q_2, M_1, M_2$  – поперечні сили та згинальні моменти в крайніх місцях перерізу стрижня.

Згідно з методом скінченних елементів [9], запишуватимемо вирази внутрішніх сил, що передаються на вузли стрижня:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} Q_1 \\ M_1 \end{pmatrix} &= \frac{2EJ}{L^3} \begin{pmatrix} 6 & -3L \\ -3L & 2L^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} + \frac{2EJ}{L^3} \begin{pmatrix} -6 & -3L \\ 3L & L^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} Q_2 \\ M_2 \end{pmatrix} &= \frac{2EJ}{L^3} \begin{pmatrix} -6 & 3L \\ -3L & L^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} + \frac{2EJ}{L^3} \begin{pmatrix} 6 & 3L \\ 3L & 2L^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2)$$

Система диференціальних рівнянь руху двомасової коливальної системи за чотирма ступенями вільності:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + c_{11} \cdot x_1 + c_{12} \cdot \varphi_1 + c_{13} \cdot x_2 + c_{14} \cdot \varphi_2 = P \sin \omega t; \\ J_1 \ddot{\varphi}_1 + c_{21} \cdot x_1 + c_{22} \cdot \varphi_1 + c_{23} \cdot x_2 + c_{24} \cdot \varphi_2 = M \sin \omega t; \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_{31} \cdot x_1 + c_{32} \cdot \varphi_1 + c_{33} \cdot x_2 + c_{34} \cdot \varphi_2 = -P \sin \omega t; \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 + c_{41} \cdot x_1 + c_{42} \cdot \varphi_1 + c_{43} \cdot x_2 + c_{44} \cdot \varphi_2 = -M \sin \omega t, \end{cases} \quad (3)$$

де отримано коефіцієнти жорсткості, розписавши внутрішні силові фактори в рівнянні (2):

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{12EJ}{L^3}, & c_{12} &= \frac{-6EJ}{L^2}, & c_{13} &= \frac{-12EJ}{L^3}, & c_{14} &= \frac{-6EJ}{L^2}, & c_{21} &= \frac{-6EJ}{L^2}, & c_{22} &= \frac{4EJ}{L}, & c_{23} &= \frac{6EJ}{L^2}, \\ c_{24} &= \frac{2EJ}{L}, & c_{31} &= \frac{-12EJ}{L^3}, & c_{32} &= \frac{6EJ}{L^2}, & c_{33} &= \frac{12EJ}{L^3}, & c_{34} &= \frac{6EJ}{L^2}, & c_{41} &= \frac{-6EJ}{L^2}, & c_{42} &= \frac{2EJ}{L}, \\ c_{43} &= \frac{6EJ}{L^2}, & c_{44} &= \frac{4EJ}{L}. \end{aligned}$$

Запишемо систему (3) у матричному вигляді:

$$\begin{bmatrix} -m_1 \cdot \omega^2 + c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & -J_1 \cdot \omega^2 + c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & -m_2 \cdot \omega^2 + c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & -J_2 \cdot \omega^2 + c_{44} \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} P \\ M \\ -P \\ -M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \Phi_1 \\ X_2 \\ \Phi_2 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Прирівнявши визначник системи рівнянь (4) до нуля, отримаємо частотне рівняння

$$-\frac{12\omega^4}{L} \cdot \left[ \begin{aligned} &\left( (L^2 m_2 + J_2 + J_1) m_1 + m_2 (J_2 + J_1) \right) J^2 E^2 - \rightarrow \\ &\rightarrow -\frac{1}{3} J \omega^2 \times \left( (L^2 (J_2 + J_1) m_2 + 3J_2 J_1) m_1 + 3J_2 J_1 m_2 \right) L E + \rightarrow \\ &\rightarrow + \frac{1}{12} J_2 \omega^4 L^4 J_1 m_1 m_2 \end{aligned} \right] = 0, \quad (5)$$

з якого можна визначити значення двох додатних власних частот коливань  $\omega_{0i}$  системи з чотирма ступенями вільності:

$$\omega_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{L^2 m_1 m_2 J_1 J_2} \cdot \left( m_1 m_2 J_1 J_2 L J E \cdot \left( m_1 L^2 m_2 J_2 + m_1 L^2 m_2 J_1 + \right. \right. \\ \left. \left. + 3 m_1 J_2 J_1 + 3 m_2 J_2 J_1 + A^{1/2} \right) \right)^{1/2}, \quad (6)$$

$$\text{де } A = \begin{pmatrix} m_1^2 L^4 m_2^2 J_2^2 - m_1^2 L^4 m_2^2 J_2 J_1 + 3 m_1^2 L^2 m_2 J_2^2 J_1 + 3 m_1 L^2 m_2^2 J_2^2 J_1 + \\ + m_1^2 L^4 m_2^2 J_1^2 + 3 m_1^2 L^2 m_2 J_1^2 J_2 + 3 m_1 L^2 m_2^2 J_1^2 J_2 + \\ + 9 m_1^2 J_2^2 J_1^2 + 18 m_1 m_2 J_2^2 J_1^2 + 9 m_2^2 J_2^2 J_1^2 \end{pmatrix}.$$

Для того, щоб система знаходилась в резонансі, потрібно, щоб значення однієї із власних колових частот  $\omega_{0i}$  збіглося із значенням колової частоти вимушених коливань  $\omega$ . За частотним рівнянням можна здійснити підбір геометричних параметрів стрижня на забезпечення необхідної власної частоти коливань системи  $\omega_0$  за її резонансним налагодженням  $z = \frac{\omega}{\omega_0}$ . Значення моменту інерції  $J$  поперечного перерізу стрижня:

$$J = \frac{L(m_1 L^2 m_2 J_2 + m_1 L^2 m_2 J_1 + 3 m_1 J_2 J_1 + 3 m_2 J_2 J_1 + A^{1/2})}{6 E (m_1 m_2 L^2 + m_1 J_2 + m_1 J_1 + m_2 J_2 + m_2 J_1)} \cdot \left( \frac{\omega}{z} \right)^2. \quad (7)$$

Значення діаметра  $d$  пружного стрижня, що забезпечує задане резонансне налагодження  $z$ , становить  $d = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot J}{\pi \cdot k_3}}$ , де значення  $J$  приймається за виразом (7); коефіцієнт защемлення на практиці приймається  $k_3 = 0,5$ .

Виконаємо перевірку виведених аналітичних значень для власних колових частот коливань  $\omega_{0i}$  системи вібраційної синфазної машини числовим способом. Виведення цих аналітичних виразів та відповідні розрахунки здійснювалися за допомогою програми *Maple 10*.

Для здійснення такої перевірки використаємо відповідні параметри двомасової коливальної системи вібраційної синфазної машини. Інерційні параметри робочого органа:  $m_1 = 41,86 \text{ кг}$ ,  $J_1 = 0,41 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ; інерційні параметри реактивної коливальної маси:  $m_2 = 116,73 \text{ кг}$ ,  $J_2 = 3,52 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$  та довжина стрижня  $L = 0,46 \text{ м}$ .

Визначаємо значення моменту поперечного перерізу (конструктивний розрахунок) стрижня на забезпечення власної колової частоти коливань за резонансного налагодження системи  $z = 0,98$ :

$$\omega_0 = \frac{\omega}{z} = \frac{2 \cdot 3,1415 \cdot 50}{0,98} = 320,56 \text{ с}^{-1}; \quad J = 2,162 \cdot 10^{-7} \text{ м}^4, \quad d = 45,81 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Правильність наведених аналітичних виразів підтверджують АЧХ двомасової коливальної системи за чотирма ступенями вільності (рис. 5 та 6). Для таких параметрів коливальної системи її перша власна колова частота коливань, згідно з виразом (6), становитиме  $\omega_{01} = 320,56 \text{ с}^{-1}$  або  $\nu_{01} = 51,02 \text{ Гц}$ . Значення амплітуд коливань за лінійними та кутовими координатами, коли  $P = 300 \text{ Н}$  і  $M = 15,366 \text{ Н} \cdot \text{м}$ , становлять  $x_1 = 0,0006 \text{ м}$ ,  $x_2 = -0,0002 \text{ м}$ ,  $\varphi_1 = 0,0057 \text{ рад}$ ,  $\varphi_2 = -0,0045 \text{ рад}$ .

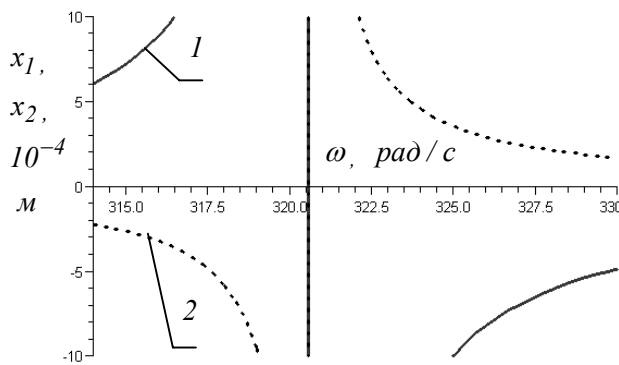


Рис. 5. АЧХ поступального руху двомасової коливальної системи за координатами  $x_1$  (1) та  $x_2$  (2)

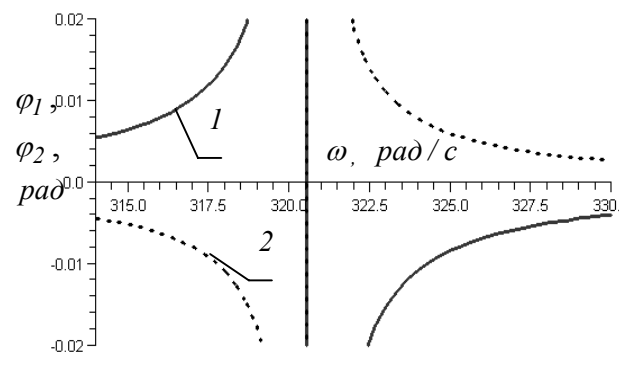


Рис. 6. АЧХ обертального руху двомасової коливальної системи за координатами  $\varphi_1$  (1) та  $\varphi_2$  (2)

**Розрахунок власних частот коливань двомасової системи методом початкових параметрів.** Метод початкових параметрів [7, 8] використовується для визначення власних частот і форм коливань балок з кількома ділянками.

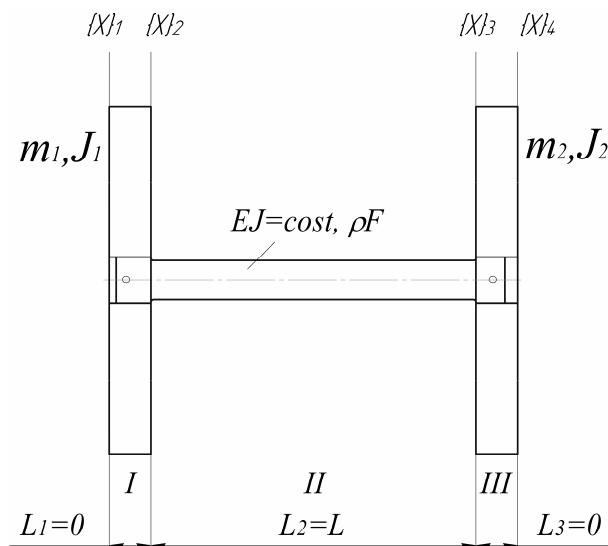


Рис. 7. Стрижень із трьома ділянками

Амплітудний вектор стану довільного перерізу балки (рис. 7) визначається чотирма компонентами: прогином  $W(x)$ , кутом повороту  $\Theta(x)$ , згинальним моментом  $M(x)$  і поперечною силою  $Q(x)$ . Формула переходу від початку до кінця ділянки запишеться так:

$$X_4 = M_{43}M_{32}M_{21}X_1, \tag{8}$$

де  $M_{43}$ ,  $M_{32}$ ,  $M_{21}$  – матриці переходу відповідно через ділянки балки III, II та I;  $X_4$ ,  $X_1$  – вектори (стовпці) стану в крайньому правому та лівому перерізах.

Матриця переходу  $M_{43}$  через ділянку балки III, де зосереджена проміжна маса  $m_2$  з моментом інерції  $J_2$ :

$$M_{43} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -J_2\omega^2 & 1 & 0 \\ m_2\omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Без врахування маси стрижня ( $\rho FL = 0$ ) матриця переходу  $M_{32}$  через ділянку балки II визначається так:

$$M_{32} = \begin{bmatrix} 1 & L & \frac{L^2}{2EJ} & \frac{L^3}{6EJ} \\ 0 & 1 & \frac{L}{EJ} & \frac{L^2}{2EJ} \\ 0 & 0 & 1 & L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Матриця переходу  $M_{21}$  через ділянку балки I, де зосереджена маса  $m_1$  (маховик) з моментом інерції  $J_1$ :

$$M_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -J_1\omega^2 & 1 & 0 \\ m_1\omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Перехід від правого до лівого кінця стрижня запишемо у вигляді

$$\begin{Bmatrix} W_4 \\ \Theta_4 \\ M_4 \\ Q_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -J_2\omega^2 & 1 & 0 \\ m_2\omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & L & \frac{L^2}{2EJ} & \frac{L^3}{6EJ} \\ 0 & 1 & \frac{L}{EJ} & \frac{L^2}{2EJ} \\ 0 & 0 & 1 & L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -J_1\omega^2 & 1 & 0 \\ m_1\omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} W_1 \\ \Theta_1 \\ M_1 \\ Q_1 \end{Bmatrix}. \quad (12)$$

Записавши у рівняння (12) граничні умови  $M_4 = Q_4 = 0$  та  $M_1 = Q_1 = 0$  на вільних кінцях, отримаємо вектор стану  $X_4$  в крайньому правому положенні:

$$\begin{Bmatrix} W_4 \\ \Theta_4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \left( 1 + m_1\omega^2 \frac{L^3}{6EJ} \right) \cdot w_1 + \left( L - J_1\omega^2 \frac{L^2}{2EJ} \right) \cdot \varphi_1 \\ m_1\omega^2 \frac{L^2}{2EJ} \cdot w_1 + \left( 1 - J_1\omega^2 \frac{L}{EJ} \right) \cdot \varphi_1 \\ \left( -J_2\omega^2 \frac{L^2}{2EJ} + L \right) m_1\omega^2 \cdot w_1 + \left( -J_2\omega^2 - \left( 1 - J_2\omega^2 \frac{L}{EJ} \right) J_1\omega^2 \right) \cdot \varphi_1 \\ \left( m_2\omega^2 + \left( m_2\omega^2 \frac{L^3}{6EJ} + 1 \right) m_1\omega^2 \right) \cdot w_1 + \left( m_2\omega^2 L - m_2 J_1\omega^4 \frac{L^2}{2EJ} \right) \cdot \varphi_1 \end{array} \right\}. \quad (13)$$

Останні два вирази дають можливість отримати частотне рівняння

$$\begin{aligned} & \left(-J_2\omega^2 \frac{L^2}{2EJ} + L\right) m_1\omega^2 \cdot \left(m_2\omega^2 L - m_2 J_1\omega^4 \frac{L^2}{2EJ}\right) \rightarrow \\ & \rightarrow -\left(m_2\omega^2 + \left(m_2\omega^2 \frac{L^3}{6EJ} + 1\right) m_1\omega^2\right) \cdot \left(-J_2\omega^2 - \left(1 - J_2\omega^2 \frac{L}{EJ}\right) J_1\omega^2\right) = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

з якого можна отримати значення двох власних частот коливань та здійснити підбір геометричних параметрів стрижня на забезпечення необхідної власної частоти коливань  $\omega_0$  за резонансним налагодженням  $z$ . Отримані аналітичні вирази повністю збігаються з відповідними формулами (5) та (6). За відомих інерційних параметрів двомасової коливальної системи з чотирма ступенями вільності та геометричних параметрів стрижня ( $E = 1,91 \cdot 10^{11}$  Па,  $L = 0,46$  м,  $d = 45,81 \cdot 10^{-3}$  м) перші дві власні частоти її коливань, що знайдені числовим способом, становитимуть:  $\omega_1 = 320,56 \text{ c}^{-1}$  (51,02 Гц),  $\omega_2 = 1017,06 \text{ c}^{-1}$  (161,87 Гц).

**Розрахунок власних частот коливань системи з врахуванням маси стрижня.** Матриця переходу  $M_{32}$  через ділянку стрижня  $II$  завдовжки  $L$ , жорсткістю  $EJ = const$  з врахуванням його маси ( $\rho FL$ ) визначається так:

$$M_{32} = \begin{bmatrix} K_1(kL) & \frac{1}{k} K_2(kL) & \frac{1}{k^2 EJ} K_3(kL) & \frac{1}{k^3 EJ} K_4(kL) \\ k K_4(kL) & K_1(kL) & \frac{1}{k EJ} K_2(kL) & \frac{1}{k^2 EJ} K_3(kL) \\ EJ k^2 K_3(kL) & EJ k K_4(kL) & K_1(kL) & \frac{1}{k} K_2(kL) \\ EJ k^3 K_2(kL) & EJ k^2 K_3(kL) & k K_4(kL) & K_1(kL) \end{bmatrix}, \quad (15)$$

де  $K_1(kL)$ ,  $K_2(kL)$ ,  $K_3(kL)$ ,  $K_4(kL)$  – функції Крилова, що є такими комбінаціями частинних розв’язків:  $K_{1,3} = \frac{chkx \pm \cos kx}{2}$ ;  $K_{2,4} = \frac{shkx \pm \sin kx}{2}$ .

Запишемо рівняння стану, враховуючи відповідні матриці переходу:

$$\begin{Bmatrix} W_4 \\ \Theta_4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left[ K_1(kL) + \frac{K_4(kL) m_1 \omega^2}{k^3 EJ} \right] \cdot w_1 + \left[ \frac{K_2(kL)}{k} - \frac{K_3(kL) J_1 \omega^2}{k^2 EJ} \right] \cdot \varphi_1 \\ \left[ k K_4(kL) + \frac{K_3(kL) m_1 \omega^2}{k^2 EJ} \right] \cdot w_1 + \left[ K_1(kL) - \frac{K_2(kL) J_1 \omega^2}{k EJ} \right] \cdot \varphi_1 \\ \left[ -J_2 \omega^2 k K_4(kL) + k^2 E J K_3(kL) + \left( -\frac{K_3(kL) J_2 \omega^2}{k^2 EJ} + \frac{K_2(kL)}{k} \right) m_1 \omega^2 \right] \cdot w_1 + \\ + \left[ -J_2 \omega^2 K_1(kL) + k E J K_4(kL) - \left( -\frac{K_2(kL) J_2 \omega^2}{k EJ} + K_1(kL) \right) J_1 \omega^2 \right] \cdot \varphi_1 \\ \left[ m_2 \omega^2 K_1(kL) + k^3 E J K_2(kL) + \left( \frac{K_4(kL) m_2 \omega^2}{k^3 EJ} + K_1(kL) \right) m_1 \omega^2 \right] \cdot w_1 + \\ + \left[ \frac{K_2(kL) m_2 \omega^2}{k} + k^2 E J K_3(kL) - \left( \frac{K_3(kL) m_2 \omega^2}{k^2 EJ} + k K_4(kL) \right) J_1 \omega^2 \right] \cdot \varphi_1 \end{Bmatrix}. \quad (16)$$



Отримаємо частотне рівняння

$$y_1(k) - y_2(k) = 0, \tag{17}$$

де відповідно прийняті позначення:

$$y_1(k) = \left[ -J_2 \omega^2 k K_4(kL) + k^2 E J K_3(kL) + \left( -\frac{K_3(kL) J_2 \omega^2}{k^2 E J} + \frac{K_2(kL)}{k} \right) m_1 \omega^2 \right] \times$$

$$\times \left[ \frac{K_2(kL) m_2 \omega^2}{k} + k^2 E J K_3(kL) - \left( \frac{K_3(kL) m_2 \omega^2}{k^2 E J} + k K_4(kL) \right) J_1 \omega^2 \right];$$

$$y_2(k) = \left[ -J_2 \omega^2 K_1(kL) + k E J K_4(kL) - \left( -\frac{K_2(kL) J_2 \omega^2}{k E J} + K_1(kL) \right) J_1 \omega^2 \right] \times$$

$$\times \left[ m_2 \omega^2 K_1(kL) + k^3 E J K_2(kL) + \left( \frac{K_4(kL) m_2 \omega^2}{k^3 E J} + K_1(kL) \right) m_1 \omega^2 \right].$$

Значення власних частот у рівняннях (16) визначається за формулою

$$\omega_i = k_i^2 \cdot \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}}. \tag{18}$$

Рівняння (17) розв'язується графічно. Отримані значення  $k_i$  підставляють у вираз (18) для знаходження власних частот коливань системи.

Для поданих параметрів коливальної системи графічні залежності для знаходження розв'язків частотного рівняння (17) зображено на рис. 8 та 9. Отримано такі значення  $k_i$ :  $k_1 = 2,367$  і  $k_2 = 4,184$ , що дають значення власних частот коливань вібраційної машини з врахуванням маси стрижня  $\omega_1 = 319,282 \text{ c}^{-1}$  (50,82 Гц),  $\omega_2 = 997,208 \text{ c}^{-1}$  (158,72 Гц).

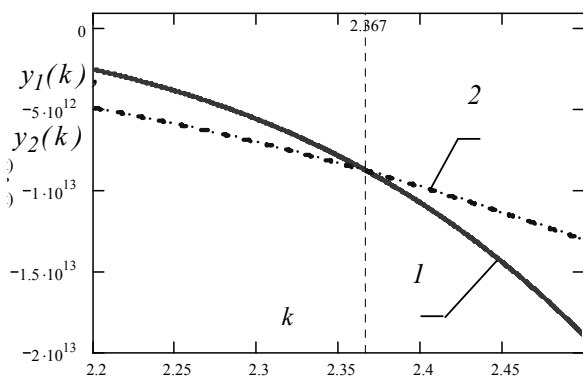


Рис. 8. Розв'язок частотного рівняння для  $k_1$

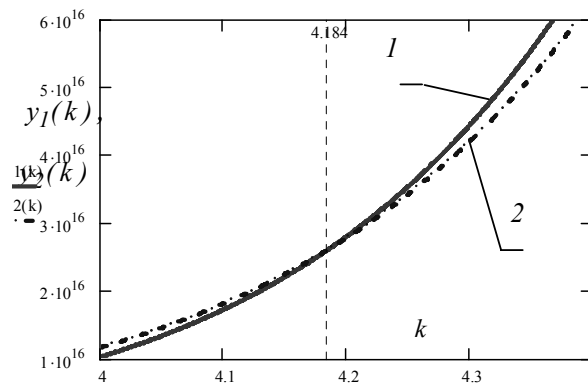


Рис. 9. Розв'язок частотного рівняння для  $k_2$

Рівняння  $i$ -ї власної форми коливань складаємо в такий спосіб. Із 3-го або 4-го рівняння (16) знаходимо відношення

$$a = \frac{\varphi_1}{w_1} = - \frac{\left[ m_1 \omega^2 K_1(kL) + k^3 E J K_2(kL) + \left( \frac{K_4(kL) m_1 \omega^2}{k^3 E J} + K_1(kL) \right) m_2 \omega^2 \right]}{\left[ \frac{K_2(kL) m_1 \omega^2}{k} + k^2 E J K_3(kL) - \left( \frac{K_3(kL) m_1 \omega^2}{k^2 E J} + k K_4(kL) \right) J_2 \omega^2 \right]},$$

яке після підстановки в 1-ше та 2-ге рівняння (16) дає змогу отримати залежності для прогину  $W(x)$  та кута повороту  $\Theta(x)$  за певних значень  $k_i$ :

$$W(x) = \left[ K_1(kx) + \frac{K_4(kx)m_2\omega^2}{k^3 EJ} \right] \cdot w_1 + \left[ \frac{K_2(kx)}{k} - \frac{K_3(kx)J_2\omega^2}{k^2 EJ} \right] \cdot a \cdot w_1;$$

$$\Theta(x) = \left[ kK_4(kx) + \frac{K_3(kx)m_2\omega^2}{k^2 EJ} \right] \cdot w_1 + \left[ K_1(kx) - \frac{K_2(kx)J_2\omega^2}{kJ} \right] \cdot a \cdot w_1.$$

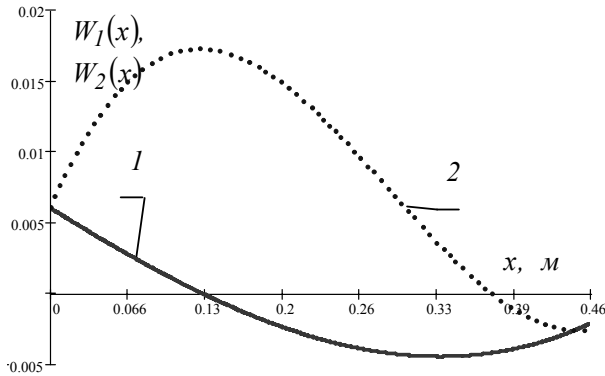


Рис. 10. Перша  $W_1(x)$  (1) та друга  $W_2(x)$  (2) власні форми прогинів

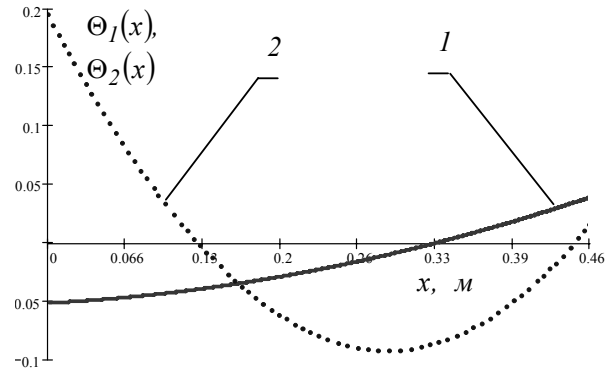


Рис. 11. Перша  $\Theta_1(x)$  (1) та друга  $\Theta_2(x)$  (2) власні форми кутів повороту

Врахування маси стрижня у розрахунку власних частот коливань системи з чотирма ступенями вільності порівняно із значеннями частот, які не враховують його маси, дає такі результати: зменшення першої власної частоти коливань на  $\Delta\nu_1 = 0,2 \text{ Гц}$  та другої – на  $\Delta\nu_2 = 3,15 \text{ Гц}$ , що у відсотковому співвідношенні становить різницю відповідно  $\delta\nu_1 = 0,39 \%$  і  $\delta\nu_2 = 1,95 \%$ .

Тип зпору: Частотный Построение7  
 Форма колебаний : 7 Значение = 48.05 Гц  
 Шкала деформации: 0.460123



Рис. 12. Перша власна форма коливань двомасової системи

Тип зпору: Частотный Построение10  
 Форма колебаний : 10 Значение = 155.14 Гц  
 Шкала деформации: 0.252957



Рис. 13. Друга власна форма коливань двомасової системи

Розрахунок власних частот коливань з використанням методу скінченних елементів частотним аналізом у програмному забезпеченні *CosmosWorks*, що працює в оболонці *SolidWorks 2006*. Для наступних параметрів розбиття двомасової коливальної системи на кінцеві елементи  $Global\ Size=13,84\ мм$ ;  $Tolerance=0,69\ мм$ ;  $53139\ elements$ ;  $83591\ corner\ nodes$ , отримано значення власних частот коливань на рис. 12 та 13:  $\omega_1=301,91\ c^{-1}$  ( $48,05\ Гц$ ) та  $\omega_2=974,77\ c^{-1}$  ( $155,14\ Гц$ ).

Різниця в частотах між результатами розрахунків з використанням методу скінченних елементів (рис. 12 та 13) та теоретичним значенням частот коливань системи з чотирма ступенями вільності (без врахування маси стрижня) становить у відсотковому відношенні  $\delta\nu_1=5,82\ \%$  для першої власної частоти і  $\delta\nu_2=4,16\ \%$  – для другої власної частоти. Це підтверджує достовірність виведених аналітичних виразів та можливість проведення частотного аналізу у програмному забезпеченні *CosmosWorks* для *SolidWorks 2006* для таких коливальних систем.

**Висновок.** У цій роботі викладено методику розрахунку власних частот коливань двомасової коливальної системи вібраційної машини з чотирма ступенями вільності методом функцій Крилова. Розглянуто вплив маси стрижня на значення власних частот коливань системи. Встановлено, що маса стрижня впливає на власні частоти коливань системи. Тому під час створення двомасових віброструн із вертикальною пружною системою у вигляді одного стрижня є необхідним врахування коефіцієнта його зацемлення, що певною мірою збільшує жорсткість стрижня на практиці і виключає можливість отримання значення власних частот коливань, менших за необхідну величину.

1. Устройство для вибрационной обработки: А. с. №1311857 А1 СССР, МКИ В 24 В 31/073 / В.А. Щигель (СССР). – №3965991/31-08; Заявлено 21.10.85; Опубл. 23.05.87, Бюл. № 19. – 6 с., ил.  
2. Устройство для вибрационной обработки: А. с. №1090540 А СССР, МКИ В 24 В 31/06./ В.А. Повидайло (СССР). – №2856513/25-08; Заявлено 21.12.79; Опубл. 07.05.84, Бюл. № 17. – 4 с., ил.  
3. Устройство для вибрационной обработки: А. с. №1345512 А СССР, МКИ В 24 В 31/073./ В.А. Повидайло, Б.Н. Картышев, Р.Я. Сахно и Картышев Е.Б. (СССР). – №3906370/40-08; Заявлено 09.04.85. – 4 с., ил.  
4. Повидайло В. Вібраційні процеси та обладнання: Навч. посібник. – Львів: Вид-во НУ “Львівська політехніка”, 2004. – 248 с.  
5. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. – М.: Машиностроение, 1978–1981. – Т. 4: Вибрационные процессы и машины. – 1981. – 509 с.  
6. Вайсберг Л.А. Проектирование и расчет вибрационных грохотов. – М.: Недра, 1986. – 144 с.  
7. Бабаков И.М. Теория колебаний. – М.: Наука, 1968.  
8. Василенко М.В., Алексейчук О.М. Теорія коливань і стійкості руху: Підручник. – К.: Вища шк., 2004. – 525 с.  
9. Клаф Р., Пензиен Дж. Динамика сооружений / Пер. с англ. – М.: Стройиздат, 1979. – 320 с.