

## УРАХУВАННЯ ВПЛИВУ ТОРЦЕВОГО ЗАРЯДУ ВИПРОМІНЮВАЧА У ХВИЛЕВОДІ ПРИ ВИКОРИСТАННІ НИТКОПОДІБНОЇ МОДЕЛІ СТРУКТУРИ

© Захарія Й.А., 2008

На основі електродинамічного аналізу пропонується алгоритм урахування впливу торцевого заряду випромінювача у прямокутному хвилеводі за допомогою еквівалентного продовження розподілу струму у випромінювачі. Проведено оцінку впливу торцевого заряду на вхідний імпеданс випромінювача у випадку однопровідної моделі випромінювача. Дано рекомендації щодо такого аналізу при використанні багатопровідної моделі структури.

The waveguide radiator top-charge is considered. Use the radiator longitudinal current distribution prolongation the charge influence in the case of radiator filament model is evaluated. An calculating algorithm for multifilament radiator model is proposed.

### Вступ

На кінцях тонкого провідника випромінювача найчастіше приймають нульову краєву умову для функції, що описує поздовжній розподіл струму у провіднику випромінювача. Однак за збільшеного радіуса циліндричного провідника випромінювача ( $a$ ) його закінчення (торець) може бути плоским з площею  $s = \pi a^2$  або напівсферичним. На такій поверхні змінюється розподіл поверхневого струму або нагромаджується електричний заряд. За таких умов краєва умова для функції розподілу поздовжнього струму не є нульовою, тобто струм на кінці випромінювача не дорівнює нулеві. Водночас дещо змінюється і поздовжній розподіл струму, що впливає на параметри випромінювача і структури загалом.

Для лінійних випромінювачів у вільному просторі відповідна електродинамічна задача розглянута в [4, 5]. У разі циліндричного провідника випромінювача, розташованого у прямокутному хвилеводі, задача ускладнюється нерівномірним розподілом струму по периметру провідника, а також некоординатністю відповідної електродинамічної задачі. У зв'язку з цим виникає необхідність проаналізувати поставлену задачу на основі введення торцевого заряду  $Q$  на площі торця  $s$ , заокругленій на краях малим радіусом  $a_o \ll a$ . Розподіл напруженості електричного поля на заокругленні вважаємо рівномірним. Вплив заряду  $Q$  на розподіл поздовжнього струму частково залежить від вигляду апроксимуючої цей розподіл функції. Для порівняно невеликого радіуса провідника  $a$ , коли можна застосувати однопровідну модель, розподіл поздовжнього струму записують виразом

$$I_x = I_1 \sin\left(\frac{\pi(h'-x)}{2h'}\right); \quad I_1 = I_1 i_1(x); \quad h' = h + l_o, \quad (1)$$

де  $x = h$  – висота випромінювача у хвилеводі з прямокутним перерізом  $A \times B$ ;  $A > B$ ;  $x$  – координата висоти хвилевода, паралельна до вузької стінки ( $B$ ).

**Мета роботи** – визначити еквівалентний вплив заряду  $Q$  на розподіл струму у вигляді продовження цього розподілу на  $l_o$ .

За вказаних вище умов доцільно вважати розподіл густини поверхневого торцевого заряду симетричним стосовно осі циліндричного провідника випромінювача і записати його у вигляді [6]:

$$\sigma(r) = \frac{\sigma_c}{2\sqrt{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2}}, \quad (2)$$

де  $\sigma_c$  – деяке середнє значення поверхневої густини заряду;  $r$  – радіальна координата площі торця.

Густина поверхневого заряду максимальна ( $\sigma(r) = \sigma_m$ ) за  $r = a - a_o$ :

$$\sigma_m = \frac{\sigma_c}{2\sqrt{\xi(2-\xi)}}; \quad \xi = \frac{a_o}{a}. \quad (3)$$

Густина заряду  $\sigma_m$  практично залишається такою самою на заокругленні країв площі торця.

### Поле випромінювання торцевого заряду

Максимальне значення поверхневої густини заряду взаємопов'язане з напруженостями поля граничною умовою. Відповідна напруженість електричного поля має три складові: від поверхневого заряду  $E_{qx}$ , від струму нитки моделі  $E_x$ , від апертури живлення випромінювача  $E_{ax}$ . Зауважимо, що першу напруженість інколи знаходять у квазістатичному наближенні [2].

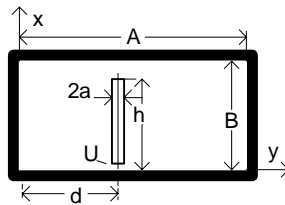


Рис. 1. Циліндричний вібратор у хвилеводі

Спочатку визначимо першу із названих напруженостей поля. У нашому випадку торцевий заряд є змінний з високою (робочою) частотою. Для визначення поля випромінювання використаємо найпростішу модель, у якій торцевий заряд є зосереджений як точкоподібний в центрі площі торця. Така модель, так само, як і ниткоподібна модель струму випромінювача, дає змогу уникнути сингулярності відповідної функції Гріна [1].

Напруженість електричного поля випромінюваного електричним зарядом записують виразом

$$E_{qx} = \frac{I}{j\omega\epsilon_o\mu_o} \text{grad}_x(\text{div}\bar{A}), \quad (4)$$

де  $\bar{A}$  – векторний потенціал магнітного поля;  $\omega$  – робоча колова частота поля;  $\epsilon_o, \mu_o$  – діелектрична і магнітна проникності вакууму. Відповідно до умови Лоренца векторний потенціал взаємопов'язаний зі скалярним потенціалом поля  $\varphi$ :

$$\text{div}\bar{A} = -j\omega\epsilon_o\mu_o\varphi. \quad (5)$$

Тому напруженість електричного поля випромінювання високочастотного заряду подано відомим співвідношенням:

$$E_{qx} = -\text{grad}\varphi. \quad (6)$$

Необхідний скалярний потенціал знайдемо на основі розв'язання відповідного рівняння Гельмгольца:

$$\nabla^2\varphi + k^2\varphi = -\frac{\rho_c}{\epsilon_o}, \quad (7)$$

де  $k^2 = \omega^2\epsilon_o\mu_o$ ;  $\rho_c$  – об'ємна густина заряду як джерела поля. Для точкоподібного заряду у нашому випадку цю густину запишемо за допомогою дельта-функцій:

$$\rho_c = Q\delta(x-h)\delta(y-d)\delta(z), \quad (8)$$

де  $\delta(x-h)$  – дельта-функція визначена у площині  $x=h$ , тобто на висоті розташування торця;  $\delta(y-d)$  – у площині розташування осі випромінювача  $y=d$ ;  $\delta(z)$  – у площині  $z=0$ ; координата у паралельна до ширини хвилевода ( $A$ );  $z$  – координата довжини хвилевода. Отже, об'ємна густина заряду визначена в точці  $(h,d,0)$  об'єму хвилевода. Розв'язок рівняння (7) методом функції Гріна має вигляд

$$\varphi = -\frac{Q}{\varepsilon_0 v'} \int G(\bar{r}/\bar{r}') \rho_c dV', \quad (9)$$

де  $G(\bar{r}/\bar{r}')$  – відповідна функція Гріна. Дійсно, підставляючи розв'язок (9) у рівняння (7), отримаємо рівняння Гельмгольца для функції Гріна:

$$\nabla^2 G(\bar{r}/\bar{r}') + k^2 G(\bar{r}/\bar{r}') = \delta(\bar{r} - \bar{r}'). \quad (10)$$

Останнє рівняння задовольняється функцією Гріна у вигляді

$$G(\bar{r}/\bar{r}') = \sum_{m=l}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} g \sin\left(\frac{m\pi y}{A}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{B}\right) \exp(-\gamma(z-z')). \quad (11)$$

Дійсно, похідна виразу (11) відповідно до формули (6) задовольняє граничні умови на ідеально провідних стінках хвилевода. При цьому скалярний потенціал на стінках хвилевода дорівнює нулю. Сталий множник  $g$  знаходять відомим методом, підставляючи функцію (11) у вираз (9), а далі у рівняння (7), та інтегруючи по об'єму, зайнятому густиною заряду  $\rho_c$  [1]:

$$g = -\frac{1}{\gamma AB} \sin\left(\frac{m\pi d}{A}\right) \sin\left(\frac{n\pi h}{B}\right), \quad (12)$$

де  $\gamma$  – стала поширення у хвилеводі:

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{A}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{B}\right)^2 - k^2}. \quad (13)$$

Отже, стає відомою напруженість електричного поля, випромінюваного торцевим зарядом (5):

$$E_{qx} = \frac{2Q}{\varepsilon_0 AB} \sum_{m=l}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma} \frac{n\pi}{B} \sin\left(\frac{m\pi d}{A}\right) \sin\left(\frac{n\pi h}{B}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{A}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{B}\right) \exp(-\gamma|z|). \quad (14)$$

Характерно, що для  $n=0$  (основний вид хвилі) напруженість  $E_{qx}$  дорівнює нулю, тобто поле випромінювання є полем хвиль вищих порядків.

Необхідне значення торцевого заряду  $Q$  визначимо з умови неперервності густини струму, яка в нашому випадку має відомий вигляд:

$$I_x(h) = I_l i_l(h) = j\omega Q, \quad (15)$$

де  $I_x(h)$  – струм нитки моделі за  $x=h$ . Значення заряду у виразі (15) є інтегральним, тобто виражається інтегралом густини заряду (2) по площі торця ( $r=0...(a-a_o)$ ) з урахуванням рівномірно розподіленого заряду для  $r=(a-a_o)...a$ , тобто

$$Q = \frac{\sigma_c}{2} \int_0^{a-a_o} \frac{2\pi r dr}{\sqrt{1-\left(\frac{r}{a}\right)^2}} + \sigma_m (a-a_o) 2\pi \left(a - \frac{a_o}{2}\right). \quad (16)$$

Максимальне значення поверхневої густини заряду  $\sigma_m$  дано виразом (3), з якого визначимо  $\sigma_c$  і підставимо у вираз (16):

$$Q = \sigma_m \pi a^2 K_o, \quad (17)$$

де

$$K_o = 2\sqrt{\xi(2-\xi)}(1-2\sqrt{\xi(2-\xi)}) + 2(1-\xi)\left(1-\frac{\xi}{2}\right). \quad (18)$$

З виразу (17) знайдемо максимальну густину заряду  $\sigma_m$ :

$$\sigma_m = \frac{I_1 i_1(h)}{j\omega\pi a^2 K_o}; \quad \frac{\sigma_m}{\varepsilon_o} = I_1 \rho_o i_1(h) S(a); \quad S(a) = \frac{-j}{k\pi a^2 K_o}. \quad (19)$$

Водночас можемо записати сталий множник у виразі для напруженості електричного поля (14):

$$\frac{2Q}{\varepsilon_o AB} = -j \frac{I_1 i_1(h) \rho_o}{kAB}. \quad (20)$$

Спрощено напруженість  $E_{qx}$  запишеться тепер у вигляді

$$E_{qx} = I_1 \rho_o e_q(x) = I_1 \rho_o i_1(h) e_q'(x), \quad (21)$$

де

$$e_q'(x) = -\frac{j2}{kAB} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma} \frac{n\pi}{B} \sin\left(\frac{m\pi d}{A}\right) \sin\left(\frac{n\pi h}{B}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{A}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{B}\right) \exp(-\gamma|z|). \quad (22)$$

Аналогічно можна знайти напруженість  $E_x$ . Стороння напруженість від апертури живлення випромінювача є пропорційна не до струму випромінювача, а до напруги живлення випромінювача  $U$ :

$$E_x = I_1 \rho_o e_x(x); \quad E_{ax} = U e_a(x). \quad (23)$$

Очевидно, величини  $e_x(x)$ ,  $e_a(x)$  також виражаються подвійними сумами, але тут на їх визначенні не зупинятимеось. Методика їх виведення відома і, зокрема, подана у [3].

### Еквівалентне продовження розподілу струму

Продовження поздовжнього розподілу струму ( $I_o$ ) випромінювача є основним проявом впливу торцевого заряду випромінювача. Поряд з цим в аналізі структури необхідно враховувати поле випромінювання цього заряду. Як бачимо з формули (15), величина торцевого заряду  $Q$  однозначно взаємопов'язана з ненульовою краєвою умовою для функції розподілу струму за  $x = h$ . Гранична умова на площі торця, записана для максимального значення густини поверхневого заряду  $\sigma_m$ , має тепер такий вигляд:

$$\sigma_m = \varepsilon_o (E_x + E_{qx} + E_{ax}). \quad (24)$$

Тому і напруженості електричного поля у виразі (24) записуються для  $x = h$ ,  $y = d$ ,  $z = r = a - a_o$ . Функція розподілу струму у явній формі  $i_1(h)$  з'являється у виразах для напруженості поля  $E_{qx}$  і густини заряду  $\sigma_m$ . Тепер граничну умову (24) можна виразити через струм  $I_1$  і напругу живлення  $U$ :

$$I_1 \rho_o i_1(h) S(a) = I_1 \rho_o e_x(h) + I_1 \rho_o i_1(h) e_q'(h) + U e_a(h). \quad (25)$$

Враховуючи, що відношення  $U / I_1 \rho_o$  дорівнює нормованому вхідному імпедансу випромінювача  $Z / \rho_o$ , з останнього рівняння знаходимо

$$i_1(h) = \left| \frac{e_x(h) + (Z / \rho_o) e_a(h)}{S(a) - e_q'(h)} \right|. \quad (26)$$

Отримане рівняння є трансцендентним, тому що від еквівалентного продовження залежить як величина  $i_1(h)$ , так і величина  $e_x(h)$  та нормований вхідний імпеданс  $Z / \rho_o$ . Вхідний імпеданс у цьому випадку, як відомо, знаходять з нульової граничної умови на поверхні випромінювача.

За наведеним вище алгоритмом можна врахувати вплив торцевого заряду у разі багатониткової моделі провідника випромінювача. При цьому розподіл заряду на площі торця збігається з розподілом у разі однопровідної моделі випромінювача, а функція розподілу поздовжнього струму усіх ниток моделі є однакою. Отже, і еквівалентне продовження  $l_o$  є ідентичне для усіх ниток струму моделі. Умова неперервності силових ліній густини струму виражається тепер сумою  $N$  струмів ниток моделі, тобто

$$i_l(h) \sum_{i=1}^N I_i = j\omega Q = j\omega \sigma_m \pi a^2 K_o. \quad (27)$$

Відповідно максимальне значення поверхневої густини заряду і напруженість поля випромінювання цього заряду також визначається сумою струмів ниток моделі:

$$\sigma_m = \frac{i_l(h)}{j\omega \pi a^2 K_o} \sum_{i=1}^N I_i; \quad E_{qx} = \rho_o i_l(h) \left( \sum_{i=1}^N I_i \right) e'_a(x), \quad (28)$$

Напруженість поля випромінювання апертури живлення залишається незмінною, але напруженість поля випромінювання ниток моделі залежить від струмів ниток

$$E_x = \rho_o \sum_{i=1}^N I_i e_{xi}(x), \quad (29)$$

однак суму струмів тут не можна виокремити. Отже, трансцендентне рівняння для визначення еквівалентного продовження розподілу струмів набуває вигляду

$$i_l(h) = \left| \frac{\left( \sum_{i=1}^N I_i e_{xi}(h) \right) / \sum_{i=1}^N I_i + e_a(h) Z / \rho_o}{S(a) - e'_q(h)} \right|, \quad (30)$$

де вхідний імпеданс визначається сумою струмів  $\left( Z / \rho_o = U / \sum_{i=1}^N I_i \right)$ .

Отже, у цьому випадку, крім вхідного імпедансу, необхідно розраховувати струми живлення ниток моделі або їх відношення  $I_i / I_1$ .

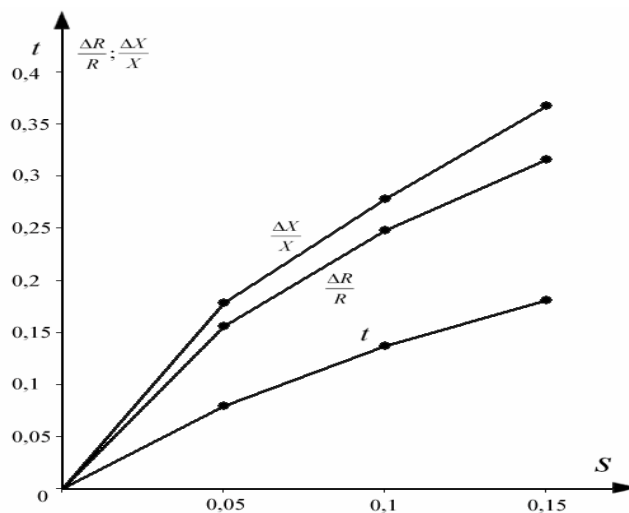


Рис. 2. Залежність еквівалентного продовження ( $t$ ) і відповідних змін вхідного імпедансу випромінювача від радіуса ( $s$ )

Функцію поздовжнього розподілу струмів ниток моделі переважно подають сумою просторових гармонік. Відповідно до запропонованого вище алгоритму еквівалентне до продовження необхідно визначати для кожної просторової гармоніки окремо. В аналізі структури торцевого заряду потрібно вважати сумою зарядів, взаємозв'язаних зі струмами окремих просторових гармонік.

### Еквівалентне продовження розподілу струму для однопровідної моделі

Однопровідна модель хвилевідного лінійного випромінювача є найпростішою і достатньо адекватною для  $a/A < 0,05$ . У наведеному нижче прикладі еквівалентне продовження розраховане і для відношень  $a/A = 0,1; 0,15$  з метою виявлення загальної тенденції зростання еквівалентного продовження  $l_0/h = t$  із збільшенням радіуса провідника випромінювача  $a$  (відношення  $a/A = s$ ). Циліндричний випромінювач заввишки  $h$  ( $h/B = 0,7$ ) розташований у прямокутному хвилеводі з відношенням сторін перерізу  $B/A = 0,44$  на відстані від бокової стінки  $d$  ( $d/A = 0,4$ ). Його торцеві кінці мають заокруглення, яке характеризується параметром  $(\Delta R/R, \Delta X/X)$  параметром  $\xi = 0,1$ . Випромінювач працює на хвилі  $\lambda$  ( $\lambda/2A = 0,7$ ). Структуру живлення випромінювача змодельовано дельта-генератором, напруга якого прикладена у площині  $x=0$  (долішня стінка хвилевода). Така модель живлення ускладнює визначення напруженості поля  $E_{ax}$  наявністю дельта-функції. Тому тут використано скалярні добутки усіх членів рівняння (25) і функції  $i_1(x)$  (1). Як бачимо з рис. 2, еквівалентне продовження ( $t$ ) початково зростає швидше, ніж радіус провідника випромінювача, однак за  $s > 0,1$  це зростання сповільнюється. Крім того,  $t > s$ . Еквівалентне продовження розподілу струму призводить до збільшення робочої і реактивної (ємнісної) складових вхідного імпедансу випромінювача. Як бачимо з рис. 2, таке збільшення ( $\Delta X, \Delta R$ ) може досягати 30 % від значення окремих складових за  $t=0$ . Отже, адекватність аналізу вимагає урахування еквівалентного продовження розподілу струму. Якщо не враховувати впливу торцевого заряду, то вже за  $s = 0,03$  ця обставина вносить похибку у 5 % за визначення вхідного імпедансу, а параметри збуджувача, знайдені за допомогою вхідного імпедансу, супроводжуються значно більшими похибками.

### Висновки

Лінійні випромінювачі у хвилеводах мають здебільшого значне відношення радіуса провідника до його висоти і тоді вплив торцевого заряду зростає. При застосуванні ниткоподібної моделі першим етапом аналізу є визначення еквівалентного продовження розподілу струму, яке потрібно використовувати в подальшому аналізі структури. Урахування впливу торцевого заряду необхідне також, якщо випромінювач застосовується як пасивний елемент у хвилеводі.

1. Захарія Й.А. Методи прикладної електродинаміки. – Львів: Вид-во “Бескид-Біт”, 2003. – С. 352.
2. Захарія Й.А. Торцеве навантаження хвилевідного штиря // Вісник ДУ “Львівська політехніка” “Теорія і проектування напівпровідникових та радіоелектронних пристроїв”. – 1995. – № 289. – С. 32–36.
3. Захарія Й.А. Вплив структури живлення на випромінювання збуджувачів електромагнітних хвиль // Вісник НУ “Львівська політехніка” “Радіоелектроніка та телекомунікації”. – 2005. – № 534. – С. 69–83.
4. Olov Einarsen. A comparison between tube shaped and solid cylinder antennas / IEEE Trans. on Antennas and Propagation. – Vol. AP-14. – № 1. – Jan. 1966. – P. 31–37.
5. Chung Ju Ting. Theoretical study of cylindrical antenna with hemispherically cap / IEEE Trans. on Antennas and Propagation. – Vol. AP-17. – № 6. – 1969. – P. 715–721.
6. Wunsh A.D. Transverse current on strip dipole antennas / Electronic letters. – Vol. 18. – № 15. – 1982. – P. 664–666.