ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.643 № 643, (2009) с. 37–44

JOURNAL OF LVIV POLITECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical & mathematical sciences"
Vol.643 No 643, (2009) 37–44

КОМПАКТНІСТЬ НОСІЯ РОЗВ'ЯЗКУ ОДНОГО НЕЛІНІЙНОГО ЕВОЛЮЦІЙНОГО РІВНЯННЯ

О.Т. Панат

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1, 79001, Львів, Україна

(Отримано 14 липня 2008 р.)

У роботі розглянуто мішану задачу для нелінійного гіперболічного рівняння високого порядку. За певних умов на вихідні дані задачі встановлено компактність носія її узагальненого розв'язку.

Ключові слова: нелінійне гіперболічне рівняння високого порядку, компактність носія розв'язку

2000 MSC: 2000: 35L75, 35G25

УДК: 517.95

Вступ

Одним із важливих питань під час дослідження задач для нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними є вивчення якісних властивостей їхніх розв'язків. Серед таких властивостей є, зокрема, існування обмеженого носія розв'язку та оцінки його розмірів. У роботах [1–2] запропоновано енергетичний метод доведення та одержано згадувані властивості для деяких класів параболічних рівнянь з виродженням. Пізніше автор робіт [3–4] розширив запропонований метод для рівнянь вищого порядку з виродженням.

Дослідження якісних властивостей розв'язків для квазілінійних параболічних рівнянь другого та вищих порядків виконано в [5–10].

Об'єктом дослідження у роботі є мішана задача для нелінійного рівняння високого порядку з другою похідною за часом. Вивчається компактність носія узагальненого розв'язку такої задачі за додатним напрямком однієї просторової змінної. Використано енергетичний метод [3].

I. Формулювання задачі

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – необмежена область з межею $\partial\Omega \in C^1$, $T > 0$, $p > 1$, $m, n, l \in \mathbb{N}$. Позначимо $Q_\tau = \Omega \times (0, \tau)$, $\Omega_\tau = \{(x, t) : x \in \Omega, t = \tau\}$, $\tau \in [0, T]$, $D_x^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \partial x_n^{\alpha_n}}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, ν – зовнішня одинична нормаль до поверхні $\partial\Omega \times (0, T)$.

В області Q_T розглядаємо задачу для рівняння

$$u_{tt} + (-1)^m \sum_{|\alpha|=m} D_x^\alpha(a_\alpha(x,t)|D_x^\alpha u_t|^{p-2} D_x^\alpha u_t) +$$

$$+(-1)^l \sum_{|\alpha|=l} D_x^\alpha(b_\alpha(x,t)|D_x^\alpha u_t|^{p-2} D_x^\alpha u_t) +$$

$$+(-1)^l \sum_{|\alpha|=l} D_x^\alpha(c_\alpha(x,t)|D_x^\alpha u|^{p-2} D_x^\alpha u) +$$

$$+h(x,t)|u_t|^{r(x)-2} u_t = f(x,t), \tag{1}$$

з умовами

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x); \tag{2}$$

$$u\Big|_{\partial\Omega\times(0,T)} = \ldots = \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu^{m-1}}\Big|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0. \tag{3}$$

Введемо функційні простори:
якщо $k = m$ чи $k = l$, то

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \Big\{ v : D_x^\alpha v \in L^p(\Omega),\ |\alpha| = k,$$

$$\frac{\partial^i v}{\partial \nu^i}\Big|_{\partial\Omega} = 0,\ \ i \in \{0, 1, \ldots, k-1\} \Big\},$$

$$||v; W_0^{k,p}(\Omega)|| = \Big(\int_\Omega \sum_{|\alpha|=k} |D_x^\alpha v|^p \, dx \Big)^{1/p};$$

якщо $g \in L^\infty(\Omega)$ і майже всюди виконуються нерівності $1 < g_1 \le g(x) \le g_2 < +\infty$, то

$$L^{g(\cdot)}(\Omega) = \Big\{ v : \int_\Omega |v|^{g(x)} \, dx < +\infty \Big\}.$$

Простір $L^p(\Omega)$ є простором Лебега, а $L^{g(\cdot)}(\Omega)$ називається узагальненим простором Лебега [11]. Відомо, що останній є банаховим простором з нормою

$$||v; L^{g(\cdot)}(\Omega)|| = \inf \Big\{ \lambda > 0 : \int_\Omega |v(x)/\lambda|^{g(x)} dx \le 1 \Big\}.$$

Подібно визначимо простір $L^{g(\cdot)}(Q_T)$.

Говоритимемо, що виконуються умови **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(H)**, **(R)**, **(U)**, якщо:

(**A**): $a_\alpha \in L^\infty(Q_T)$, $a_\alpha(x,t) \geq A_0 > 0$ для всіх $\alpha, |\alpha| = m$, та майже для всіх $(x,t) \in Q_T$;

(**B**): $b_\alpha \in L^\infty(Q_T)$, $b_\alpha(x,t) \geq B_0 > 0$ для всіх $\alpha, |\alpha| = l$, та майже для всіх $(x,t) \in Q_T$;

(**C**): $c_\alpha, c_{\alpha t} \in L^\infty(Q_T)$, $c_\alpha(x,t) \geq c_0 > 0$, $|c_{\alpha t}(x,t)| \leq c_1 < +\infty$ для всіх $\alpha, |\alpha| = l$, та майже для всіх $(x,t) \in Q_T$;

(**H**): $h \in L^\infty(Q_T)$, $h(x,t) \geq H > 0$ майже для всіх $(x,t) \in Q_T$;

(**R**): $r \in L^\infty(\Omega)$, $1 < \overline{r} \leq \widehat{r} < +\infty$, де $\overline{r} = \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} r(x)$, $\widehat{r} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} r(x)$;

(**U**): $u_0 \in \overset{\circ}{W}{}^{l,p}(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$, $f \in L^2(Q_T)$.

Означення 1. Під узагальненим розв'язком задачі (1)–(3) в області Q_T розуміємо функцію u, що задовольняє умову $u(x,0) = u_0(x)$, включення $u \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^p(0,T; \overset{\circ}{W}{}^{l,p}(\Omega))$, $u_t \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^p(0,T; \overset{\circ}{W}{}^{m,p}(\Omega)) \cap L^{r(x)}(Q_T)$, та рівність

$$\int_{\Omega_T} u_t v dx - \int_{\Omega_0} u_1(x) v dx + \int_{Q_T} \Big[-u_t v_t + \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x,t) |D_x^\alpha u_t|^{p-2} D_x^\alpha u_t D_x^\alpha v + \sum_{|\alpha|=l} b_\alpha(x,t) |D_x^\alpha u_t|^{p-2} D_x^\alpha u_t D_x^\alpha v + \sum_{|\alpha|=l} c_\alpha(x,t) |D_x^\alpha u|^{p-2} D_x^\alpha u D_x^\alpha v + h(x,t) |u_t|^{r(x)-2} u_t v \Big] dxdt = \int_{Q_T} f(x,t) v \, dxdt \tag{4}$$

для всіх функцій $v \in L^p(0,T; \overset{\circ}{W}{}^{m,p}(\Omega)) \cap L^{r(x)}(Q_T)$, $v_t \in L^2(Q_T)$, $\operatorname{supp} v \subset Q_T$.

Із означення 1 зрозуміло, що для узагальненого розв'язку задачі (1)–(3) виконується також умова $u_t\big|_{t=0} = u_1$.

II. Основні результати

Нехай $x=(x_1,\ldots,x_n)=(x',z)$, де $x'=(x_1,\ldots,x_{n-1})$; $z = x_n$; $\Omega^{z_0} = \Omega \cap \{z > z_0\}$, $\Omega_\tau^{z_0} = \Omega_\tau \cap \{z > z_0\}$, $z_0 \geq 0$; $\varrho(z) = \begin{cases} (z-z_0)^s, & z \geq z_0, \\ 0, & z \leq z_0, \end{cases}$ $mp \leq s < mp+1$ і $s-p$ – додатне ціле число.

Зробимо деякі позначення:

$$S_u(t) = \sup\{z : (x',z) \in \operatorname{supp} u(\cdot,t)\},$$

$$S_u^1(t) = \sup\{z : (x',z) \in \operatorname{supp} u_t(\cdot,t)\},$$

$$S_f = \sup\{z : (x',z,t) \in \operatorname{supp} f\},$$

$$S = \sup\{S_f, S_u(0), S_u^1(0)\}.$$

Тут $u = u(x,t)$ – узагальнений розв'язок задачі (1)–(3) в області Q_T (ми вважаємо, що він існує).

Якщо α, β - мультиіндекси, $\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_{n-1})$, $\alpha = (\beta_1,\ldots,\beta_{n-1},j)$, $k \in \mathbb{N}$, то

$$\sum_{|\alpha|=k} D_x^\alpha w = \sum_{j=0}^{k} \sum_{|\beta|=k-j} D_x^\alpha w = \sum_{j=0}^{k} \sum_{|\beta|=k-j} D_{x'}^\beta D_z^j w.$$

Оскільки $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$, то

$$D_x^\alpha(\varrho w) = \varrho D_x^\alpha w + \sum_{i=1}^{j} \binom{j}{i} \varrho^{(i)} D_z^{j-i} D_{x'}^\beta w.$$

Нехай $|\mathcal{D}_x^k w|_\sigma = \Big(\sum_{|\alpha|=k} |D_x^\alpha w|^\sigma \Big)^{1/\sigma}$ для $\sigma \geq 1$.

Теорема 1. (компактність носія розв'язку). *Нехай u – узагальнений розв'язок задачі (1)–(3),* $m > l$, $p > 2 + 2(m-l)$, $\dfrac{\frac{p-2(l-m+1)}{n+s-p}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{p} + \frac{m}{n+s-p}} < \dfrac{2}{m-1}$ *і виконуються умови* (**A**), (**B**), (**C**), (**H**), (**R**), (**U**). *Якщо $S = 0$, то носій розв'язку u в додатному напрямку осі z – компактний, тобто існує число $z_1 > 0$ таке, що $\max_{t\in[0,T]} S_u(t) \leq z_1$.*

□ *Доведення.* Оскільки u – розв'язок задачі (1)–(3) в області Q_T і $S = 0$, то $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $f = 0$ при $z > 0$ і, прийнявши в (4) $v = u_t \varrho e^{-\mu t}$, $\mu > 0$, одержимо рівність

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_\tau^0} u_t^2 \varrho e^{-\mu\tau} dx + \int_0^\tau \int_{\Omega^0} \Big[\frac{\mu}{2} u_t^2 \varrho + \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x,t) |D_x^\alpha u_t|^{p-2} D_x^\alpha u_t D_x^\alpha(\varrho u_t) + \sum_{|\alpha|=l} b_\alpha(x,t) |D_x^\alpha u_t|^{p-2} D_x^\alpha u_t D_x^\alpha(\varrho u_t) + \sum_{|\alpha|=l} c_\alpha(x,t) |D_x^\alpha u|^{p-2} D_x^\alpha u D_x^\alpha(\varrho u_t) + h(x,t) |u_t|^{r(x)} \varrho \Big] e^{-\mu t} dxdt = 0, \quad \tau \in (0,T]. \tag{5}$$

Перетворимо (5), враховуючи умови теореми. Згідно з умовою **(A)**

$$\int_0^\tau \int_{\Omega^0} \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha |D_x^\alpha u_t|^{p-2} D_x^\alpha u_t D_x^\alpha(\varrho u_t) e^{-\mu t} dxdt = I_1 + I_2,$$

де $I_1 = \int_0^\tau \int_{\Omega^0} \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha |D_x^\alpha u_t|^p \varrho e^{-\mu t} dxdt$,

$$I_2 = \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\beta|=m-j} \sum_{i=1}^{j} \binom{j}{i} \int_0^\tau \int_{\Omega^0} a_\alpha \varrho^{(i)} |D_x^\alpha u_t|^{p-2} \times D_x^\alpha u_t D_z^{j-i} D_{x'}^\beta u_t e^{-\mu t} dxdt,$$

тому

$$|I_2| \le C_m \int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega^0} \sum_{i=1}^m |\mathcal{D}_x^m u_t|_{p-1}^{p-1} |\varrho^{(i)}| |\mathcal{D}_x^{m-i} u_t|_1 e^{-\mu t} dxdt,$$

C_m – стала, що залежить лише від m.
На підставі умови **(B)**

$$\int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega^0} b_\alpha \sum_{|\alpha|=l} |D_x^\alpha u_t|^{p-2} D_x^\alpha u_t D_x^\alpha(\varrho u_t) e^{-\mu t} dxdt = I_3 + I_4,$$

де $I_3 = \int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega^0} \sum_{|\alpha|=l} b_\alpha |D_x^\alpha u_t|^p \varrho e^{-\mu t} dxdt$,

$$I_4 = \int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega^0} \sum_{j=1}^l \sum_{|\beta|=l-j} \sum_{i=1}^j \binom{j}{i} b_\alpha \varrho^{(i)} |D_x^\alpha u_t|^{p-2} D_x^\alpha u_t \times$$
$$\times D_z^{j-i} D_{x'}^\beta u_t e^{-\mu t} dxdt,$$

отже,

$$|I_4| \le C_l \int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega^0} \sum_{i=1}^l |\mathcal{D}_x^l u_t|_{p-1}^{p-1} |\varrho^{(i)}|\, |\mathcal{D}_x^{l-i} u_t|_1 e^{-\mu t} dxdt.$$

За умовою **(C)**

$$\int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega^0} \sum_{|\alpha|=l} c_\alpha |D_x^\alpha u|^{p-2} D_x^\alpha u D_x^\alpha(\varrho u_t) e^{-\mu t} dxdt = I_5 + I_6,$$

де $$I_5 = \int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega^0} \sum_{|\alpha|=l} c_\alpha |D_x^\alpha u|^{p-2} D_x^\alpha u D_x^\alpha u_t \varrho e^{-\mu t} dxdt,$$

$$I_6 = \int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega^0} \sum_{j=1}^l \sum_{|\beta|=l-j} \sum_{i=1}^j c_\alpha \varrho^{(i)} |D_x^\alpha u|^{p-2} D_x^\alpha u \times$$
$$\times D_z^{j-i} D_{x'}^\beta u_t e^{-\mu t} dxdt,$$

тому

$$I_5 = \frac{1}{p} \int\limits_{\Omega_\tau^0} \sum_{|\alpha|=l} c_\alpha |D_x^\alpha u|^p \varrho e^{-\mu\tau} dx +$$
$$+\frac{\mu}{p} \int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega^0} \sum_{|\alpha|=l} c_\alpha |D_x^\alpha u|^p \varrho e^{-\mu t} dxdt -$$
$$-\frac{1}{p} \int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega^0} \sum_{|\alpha|=l} c_{\alpha t} |D_x^\alpha u|^p \varrho e^{-\mu t} dxdt,$$

$$I_6 \le C_l \int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega^0} \sum_{i=1}^l |\mathcal{D}_x^l u|_{p-1}^{p-1} |\varrho^{(i)}| |\mathcal{D}_x^{l-i} u_t|_1 e^{-\mu t} dxdt.$$

Нарешті, згідно з умовою **(H)**

$$\int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega^0} h |u_t|^{r(x)} \varrho e^{-\mu t} dxdt \ge 0.$$

З вигляду функції ρ та з нерівності Юнга для довільних $\delta_1 > 0,\ \delta_2 > 0$ матимемо

$$|I_2| \le C_m \delta_1 \int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega^{z_0}} |\mathcal{D}_x^m u_t|_p^p (z-z_0)^s e^{-\mu t} dxdt +$$
$$+C_m C(\delta_1) \int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega^{z_0}} \sum_{i=1}^m |\mathcal{D}_x^{m-i} u_t|_p^p (z-z_0)^{s-pi} e^{-\mu t} dxdt,$$

$$|I_4| \le C_l \delta_1 \int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega^{z_0}} |\mathcal{D}_x^l u_t|_p^p (z-z_0)^s e^{-\mu t} dxdt +$$
$$+C_l C(\delta_1) \int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega^{z_0}} \sum_{i=1}^l |\mathcal{D}_x^{l-i} u_t|_p^p (z-z_0)^{s-pi} e^{-\mu t} dxdt,$$

$$|I_6| \le C_l \delta_2 \int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega^{z_0}} |\mathcal{D}_x^l u|_p^p (z-z_0)^s e^{-\mu t} dxdt +$$
$$+C_l C(\delta_2) \int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega^{z_0}} \sum_{i=1}^l |\mathcal{D}_x^{l-i} u_t|_p^p (z-z_0)^{s-pi} e^{-\mu t} dxdt.$$

Введемо функціонали

$$E_s(z_0) = \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega^{z_0}} (z-z_0)^s \Big[|\mathcal{D}_x^m u_t|_p^p + |\mathcal{D}_x^l u_t|_p^p \Big] dxdt,$$

$$F_s(z_0) = \frac{1}{2} \sup_{t\in[0,T]} \int\limits_{\Omega_t^{z_0}} (z-z_0)^s u_t^2\, dx.$$

Враховуючи оцінки інтегралів $I_1 - I_6$, з (5) одержимо

$$F_s(z_0) + \int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega^{z_0}} \Big[\frac{\mu}{2} u_t^2 + (A_0 - C_m\delta_1) |\mathcal{D}_x^m u_t|_p^p +$$
$$+(B_0 - C_l\delta_1) |\mathcal{D}_x^l u_t|_p^p + \Big(\frac{\mu c_0 - c_1}{p} - C_l\delta_2 \Big) |\mathcal{D}_x^l u|_p^p \Big] \times$$
$$\times (z-z_0)^s e^{-\mu t} dxdt +$$
$$+\frac{c_0}{p} \int\limits_{\Omega^{z_0}} |\mathcal{D}_x^l u|_p^p (z-z_0)^s e^{-\mu\tau} dx \le$$
$$\le C_{m,l,\delta_1,\delta_2} \int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega^{z_0}} \Big[\sum_{i=1}^m |\mathcal{D}_x^{m-i} u_t|_p^p (z-z_0)^{s-pi} +$$
$$+ \sum_{i=1}^l |\mathcal{D}_x^{l-i} u_t|_p^p (z-z_0)^{s-pi} \Big] e^{-\mu t} dxdt. \qquad (6)$$

Виберемо параметри $\delta_1,\ \delta_2,\ \mu$ так:

$$\mu = 1, \quad \delta_1 = \max\Big\{ \frac{A_0}{2C_m}, \frac{B_0}{2C_l} \Big\}, \quad \delta_2 = \frac{c_0 - c_1}{2pC_l}.$$

Тоді з (6) матимемо нерівність

$$F_s(z_0)+E_s(z_0)\le$$

$$\le C_{m,l}\Big[\int_0^\tau\int_{\Omega^{z_0}}\sum_{i=1}^m|\mathcal{D}_x^{m-i}u_t|_p^p(z-z_0)^{s-pi}dxdt+$$

$$+\int_0^\tau\int_{\Omega^{z_0}}\sum_{i=1}^l|\mathcal{D}_x^{l-i}u_t|_p^p(z-z_0)^{s-pi}dxdt\Big].$$

Продовжимо функцію u нулем на $\mathbb{R}^n$ для майже всіх $t\in[0,T]$. Нехай $H_{z_0}=\{x\in\mathbb{R}^n : x_n>z_0\}$. На підставі нерівності Харді (лема А2 [3], с. 345) $\forall\,\alpha$, $|\alpha|=k-i$, $i\ge 2$, матимемо

$$\int_{H^{z_0}}|D_x^\alpha u_t|^p(z-z_0)^{s-pi}\,dx\le$$

$$\le C_1\int_{H^{z_0}}|D_z^{(1)}D_x^\alpha u_t|^p\times(z-z_0)^{s-pi+p}\,dx\le\ldots\le$$

$$\le C_{i-1}\int_{H^{z_0}}|D_z^{(i-1)}D_x^\alpha u_t|^p\times(z-z_0)^{s-p}\,dx,$$

де $C_1,\ldots,C_{i-1}$ – додатні сталі (для $i=1$ ця нерівність очевидна). Тому

$$\int_{H^{z_0}}\sum_{i=1}^k|\mathcal{D}_x^{k-i}u_t|_p^p(z-z_0)^{s-pi}dxdt\le$$

$$\le C_{s,p,k}\int_{H^{z_0}}|\mathcal{D}_x^{k-1}u_t|_p^p(z-z_0)^{s-p}dxdt,$$

де $k=m$ або $k=l$.

Отже,

$$F_s(z_0)+E_s(z_0)\le \tag{7}$$

$$\le C_{m,l,s,p}\int_0^\tau\int_{\Omega^{z_0}}\Big[|\mathcal{D}_x^{m-1}u_t|_p^p+|\mathcal{D}_x^{l-1}u_t|_p^p\Big](z-z_0)^{s-p}dxdt.$$

Застосовуючи ще раз нерівність Харді, одержимо

$$F_s(z_0)\le C_{m,l,s,p}\,E_s(z_0). \tag{8}$$

Крім того, з (7) матимемо

$$E_s(z_0)\le C_{m,l,s,p}\int_0^\tau\int_{\Omega^{z_0}}\Big[|\mathcal{D}_x^{m-1}u_t|_p^p+$$

$$+|\mathcal{D}_x^{l-1}u_t|_p^p\Big](z-z_0)^{s-p}dxdt. \tag{9}$$

Надалі всі сталі, які не залежать від узагальненого розв'язку u, позначатимемо C.

На підставі леми А1 ([3], с. 345) для цілого $k\ge 0$ отримаємо

$$\int_{H_{z_0}}(z-z_0)^k|\mathcal{D}_x^{m-1}u_t|_p^p\,dx\le \tag{10}$$

$$\le C\Big(\int_{H_{z_0}}(z-z_0)^k|\mathcal{D}_x^m u_t|_p^p\,dx\Big)^a\Big(\int_{H_{z_0}}(z-z_0)^k u_t^2dx\Big)^{\frac{(1-a)p}{2}},$$

де $\frac{m-1}{m}\le a<1$, $\frac1p=\frac{m-1}{n+k}+a\Big(\frac1p-\frac{m}{n+k}\Big)+\frac{1-a}{2}$,

$$\int_{H_{z_0}}(z-z_0)^k|\mathcal{D}_x^{l-1}u_t|_p^p\,dx\le \tag{11}$$

$$\le C\Big(\int_{H_{z_0}}(z-z_0)^k|\mathcal{D}_x^m u_t|_p^p dx\Big)^b\Big(\int_{H_{z_0}}(z-z_0)^k u_t^2dx\Big)^{\frac{(1-b)p}{2}},$$

де $\frac{l-1}{m}\le b<1$, $\frac1p=\frac{l-1}{n+k}+b\Big(\frac1p-\frac{m}{n+k}\Big)+\frac{1-b}{2}$.

Приймемо $k=s-p$, тоді

$$a=\frac{\dfrac12-\dfrac1p+\dfrac{m-1}{n+s-p}}{\dfrac12-\dfrac1p+\dfrac{m}{n+s-p}},\quad b=\frac{\dfrac12-\dfrac1p+\dfrac{l-1}{n+s-p}}{\dfrac12-\dfrac1p+\dfrac{m}{n+s-p}}.$$

Очевидно, що $b<a$, а, отже, $1-a<1-b$.

Оскільки $\frac{1}{1/a}+\frac{1}{1/(1-a)}=1$, то зінтегрувавши (10) за $t\in(0,T)$ та використавши нерівність Гельдера, отримаємо

$$\int_0^T\int_{\Omega^{z_0}}(z-z_0)^{s-p}|\mathcal{D}_x^{m-1}u_t|_p^pdxdt\le$$

$$\le C\Big(\int_0^T\int_{\Omega^{z_0}}(z-z_0)^{s-p}|\mathcal{D}_x^m u_t|_p^pdxdt\Big)^a\times$$

$$\times\Big(\int_0^T\Big(\int_{\Omega^{z_0}}(z-z_0)^{s-p}u_t^2dx\Big)^{\frac p2}dt\Big)^{1-a}\le$$

$$\le CT^{1-a}\Big(\int_0^T\int_{\Omega^{z_0}}(z-z_0)^{s-p}|\mathcal{D}_x^m u_t|_p^pdxdt\Big)^a[F_{s-p}(z_0)]^{\frac{p(1-a)}{2}}.$$

Аналогічно з (11) одержимо

$$\int_0^T\int_{\Omega^{z_0}}(z-z_0)^{s-p}|\mathcal{D}_x^{l-1}u_t|_p^pdxdt\le$$

$$\le C\Big(\int_0^T\int_{\Omega^{z_0}}(z-z_0)^{s-p}|\mathcal{D}_x^m u_t|_p^pdxdt\Big)^b\times$$

$$\times\Big(\int_0^T\Big(\int_{\Omega^{z_0}}(z-z_0)^{s-p}u_t^2dx\Big)^{\frac p2}dt\Big)^{1-b}\le$$

$$\le CT^{1-b}\Big(\int_0^T\int_{\Omega^{z_0}}(z-z_0)^{s-p}|\mathcal{D}_x^m u_t|_p^pdxdt\Big)^b[F_{s-p}(z_0)]^{\frac{p(1-b)}{2}}.$$

Отже, згідно з (9),

$$E_s(z_0)\le C\Bigg[\Bigg(\int_0^T\int_{\Omega^{z_0}}(z-z_0)^{s-p}|\mathcal{D}_x^m u_t|_p^p dxdt\Bigg)^a\times$$

$$\times[F_{s-p}(z_0)]^{\frac{(1-a)p}{2}}+\Bigg(\int_0^T\int_{\Omega^{z_0}}(z-z_0)^{s-p}|\mathcal{D}_x^m u_t|_p^p dxdt\Bigg)^b\times$$

$$\times[F_{s-p}(z_0)]^{\frac{(1-b)p}{2}}\Bigg]\le \tag{12}$$

$$\le C\Bigg[\Bigg(\int_0^T\int_{\Omega^{z_0}}(z-z_0)^{s-p}|\mathcal{D}_x^m u_t|_p^p dxdt\Bigg)^a+$$

$$+\Bigg(\int_0^T\int_{\Omega^{z_0}}(z-z_0)^{s-p}|\mathcal{D}_x^m u_t|_p^p dxdt\Bigg)^b\Bigg]\times$$

$$\times\Bigg[(F_{s-p}(z_0))^{\frac{(1-a)p}{2}}+(F_{s-p}(z_0))^{\frac{(1-b)p}{2}}\Bigg].$$

Оскільки $E_{s-p}(0)<+\infty$, $F_{s-p}(0)<+\infty$ то існує таке $y>0$, що для всіх $z_0\ge y$

$$\max\Bigg\{\int_0^T\int_{\Omega^{z_0}}(z-z_0)^{s-p}|\mathcal{D}_x^m u_t|_p^p dxdt,\ \ 2F_{s-p}(z_0)\Bigg\}\le 1.$$

Тоді, використовуючи те, що $b<a$, $1-a<1-b$, з (12) та (8) матимемо

$$E_s(z_0)\le C\Bigg(\int_0^T\int_{\Omega^{z_0}}(z-z_0)^{s-p}|\mathcal{D}_x^m u_t|_p^p\, dxdt\Bigg)^b\times$$

$$\times[F_{s-p}(z_0)]^{\frac{(1-a)p}{2}}\le C[E_{s-p}(z_0)]^b[F_{s-p}(z_0)]^{\frac{(1-a)p}{2}}\le$$

$$\le C[E_{s-p}(z_0)]^{\Theta},$$

де $\Theta=b+\dfrac{(1-a)p}{2}$.

За теоремою Фубіні перепишемо $E_s(z_0)$ у вигляді

$$E_s(z_0)=$$

$$=\int_{z_0}^{+\infty}(z-z_0)^s\Bigg(\int_0^T\int_{\Omega^{z_0}\cap\{x_n=z\}}\Big[|\mathcal{D}_x^m u_t|_p^p+|\mathcal{D}_x^l u_t|_p^p\Big]dx'dt\Bigg)dz.$$

Оскільки $\Theta=1+\dfrac{\dfrac{p-2+2l-2m}{2(n+s-p)}}{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{p}+\dfrac{m}{n+s-p}}>1$ і $\frac{\Theta}{\Theta-1}>m$, то функціонал E_s задовольняє умови леми А4 ([3], с. 349). Отже, носій E_0 обмежений, а саме існує число $z_1>0$ таке, що $E_0(z)=0$ при $z\ge z_1$. Тому $u(x',z,t)=0$ при $(x',z,t)\in\Omega^{z_1}\times(0,T)$, тобто носій u в додатному напрямку осі oz – компактний. ■

У наступних теоремах 2, 3 встановлено оцінки для функціонала E_1 у випадках $p=2$ та $m=l$.

Теорема 2. *Нехай u – узагальнений розв'язок задачі (1)–(3), $m>l$, $p=2$, $S=0$ і виконуються умови* (**A**), (**B**), (**C**), (**H**), (**R**), (**U**). *Тоді правильна нерівність*

$$E_1(z_2)\ge\Bigg[\frac{C(1-\alpha_0)}{\alpha_0}(z_2-z_1)+$$

$$+[E_1(z_1)]^{\frac{\alpha_0-1}{\alpha_0}}\Bigg]^{\frac{\alpha_0}{\alpha_0-1}},\quad 0\le z_1<z_2, \tag{13}$$

де

$$\alpha_0=\frac{l}{2m(m^2-(m-1)l)}+\frac{2m-1}{2m}.$$

□ *Доведення.* З нерівності (9), коли $p=2$, отримаємо оцінку

$$E_s(z_0)\le C_{m,s,p,l}\int_0^T\int_{\Omega^{z_0}}(|\mathcal{D}_x^{m-1}u_t|_2^2+$$

$$+|\mathcal{D}_x^{l-1}u_t|_2^2)(z-z_0)^{s-2}dxdt.$$

На підставі леми А1 ([3], с. 345) для $p=2$ та цілого $k\ge 0$ матимемо

$$\int_{H_{z_0}}(z-z_0)^s|\mathcal{D}_x^{m-1}u_t|_2^2dx\le$$

$$\le C\Bigg(\int_{H_{z_0}}(z-z_0)^s|\mathcal{D}_x^m u_t|_2^2dx\Bigg)^a\Bigg(\int_{H_{z_0}}(z-z_0)^s u_t^2dx\Bigg)^{1-a},$$

де $\frac{m-1}{m}\le a<1$, $\frac12=\frac{m-1}{n+s-p}+a\Big(\frac12-\frac{m}{n+s-p}\Big)+\frac{1-a}{2}$,

$$\int_{H_{z_0}}(z-z_0)^s|\mathcal{D}_x^{l-1}u_t|_2^2dx\le$$

$$\le C\Bigg(\int_{H_{z_0}}(z-z_0)^s|\mathcal{D}_x^m u_t|_2^2dx\Bigg)^b\Bigg(\int_{H_{z_0}}(z-z_0)^s u_t^2dx\Bigg)^{1-b},$$

де $\frac{l-1}{m}\le b<1$, $\frac12=\frac{l-1}{n+s-p}+b\Big(\frac12-\frac{m}{n+s-p}\Big)+\frac{1-b}{2}$,

$$a=\frac{m-1}{m},\quad b=\frac{l-1}{m},\quad b<a.$$

Оскільки $p=2$, то $s=2m$ і оцінка (12) має вигляд

$$E_s(z_0)\le C\Bigg[\Big(\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega^{z_0}}(z-z_0)^s|\mathcal{D}_x^m u_t|_2^2dxdt\Big)^a+$$

$$+\Big(\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega^{z_0}}(z-z_0)^s|\mathcal{D}_x^m u_t|_2^2dxdt\Big)^b\Bigg]\times$$

$$\times\Bigg[(F_{s-2}(z_0))^{1-a}+(F_{s-2}(z_0))^{1-b}\Bigg].$$

Звідси матимемо нерівність

$$E_{2m}(z_0)\le C[E_{2(m-1)}(z_0)]^{\Theta}, \tag{14}$$

де

$$\Theta=b-a+1=\frac{l}{m}<1.$$

Очевидно, що для $k=m$ і $k=l$ справджується співвідношення

$$\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega^{z_0}}(z-z_0)^{2m-2}|\mathcal{D}_x^k u_t|_2^2dxdt=$$

$$=\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega^{z_0}}|\mathcal{D}_x^k u_t|_2^{\frac{2m-2}{2m}}|\mathcal{D}_x^k u_t|_2^{\frac{2}{2m}}(z-z_0)^{2m-2}dxdt\le$$

$$\le\Big(\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega^{z_0}}|\mathcal{D}_x^k u_t|_2^2(z-z_0)^{2m}dxdt\Big)^{\frac{m-1}{m}}\times$$

$$\times\Big(\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega^{z_0}}|\mathcal{D}_x^k u_t|_2^2dxdt\Big)^{\frac{1}{m}},$$

з якого

$$E_{2m-2}(z_0)\le$$

$$\le\Bigg[\Big(\int\limits_0^T\int_{\Omega^{z_0}}(z-z_0)^{2m}|\mathcal{D}_x^m u_t|_2^2dxdt\Big)^{\frac{m-1}{m}}+$$

$$+\Big(\int\limits_0^T\int_{\Omega^{z_0}}(z-z_0)^{2m}|\mathcal{D}_x^l u_t|_2^2dxdt\Big)^{\frac{m-1}{m}}\Bigg]\times$$

$$\times\Bigg[\Big(\int\limits_0^T\int_{\Omega^{z_0}}|\mathcal{D}_x^m u_t|_2^2dxdt\Big)^{\frac{1}{m}}+$$

$$+\Big(\int\limits_0^T\int_{\Omega^{z_0}}|\mathcal{D}_x^l u_t|_2^2dxdt\Big)^{\frac{1}{m}}\Bigg].$$

Звідси отримуємо нерівність

$$E_{2m-2}(z_0)\le C[E_{2m}(z_0)]^{\frac{m-1}{m}}[E_0(z_0)]^{\frac{1}{m}}. \tag{15}$$

Оцінимо $E_1(z_0)$:

$$\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega^{z_0}}(z-z_0)|\mathcal{D}_x^m u_t|_2^2dxdt=$$

$$=\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega^{z_0}}|D_x^m u_t|_2^{\frac{1}{2m}}(z-z_0)|\mathcal{D}_x^m u_t|_2^{\frac{2m-1}{2m}}dxdt\le$$

$$\le\Big(\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega^{z_0}}|\mathcal{D}_x^m u_t|_2^2(z-z_0)^{2m}dxdt\Big)^{\frac{1}{2m}}\times$$

$$\times\Big(\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega^{z_0}}|\mathcal{D}_x^m u_t|_2^2dxdt\Big)^{\frac{2m-1}{2m}}.$$

Останню оцінку можна переписати у вигляді

$$E_1(z_0)\le C[E_{2m}(z_0)]^{\frac{1}{2m}}[E_0(z_0)]^{\frac{2m-1}{2m}}. \tag{16}$$

Враховуючи (14), (15) та (16), можемо записати нерівності

$$E_{2m}(z_0)\le C[E_{2m}(z_0)]^{\frac{m-1}{m}(b-a+1)}[E_0(z_0)]^{\frac{b-a+1}{m}};$$

$$E_{2m}(z_0)\le C[E_0(z_0)]^{\frac{b-a+1}{m}};$$

$$\Bigg[E_{2m}(z_0)\Bigg]^{1-\frac{(m-1)(b-a+1)}{m}}\le C[E_0(z_0)]^{\frac{b-a+1}{m-(m-1)(b-a+1)}};$$

$$E_1(z_0)\le C[E_0(z_0)]^{\frac{b-a+1}{m-(m-1)(b-a+1)}\frac{1}{2m}}[E_0(z_0)]^{\frac{2m-1}{2m}}.$$

Звідси одержимо формулу

$$E_1(z_0)\le C[E_0(z_0)]^{\alpha_0}.$$

Оскільки виконується рівність

$$E_1'(z_0)=-E_0(z_0)$$

і нерівність

$$E_0(z_0)\ge C[E_1(z_0)]^{\frac{1}{\alpha_0}},$$

то отримаємо оцінку

$$-E_1'(z_0)\ge C[E_1(z_0)]^{\frac{1}{\alpha_0}}$$

або

$$-\frac{dE_1(z_0)}{[E_1(z_0)]^{\frac{1}{\alpha_0}}}\ge C\,dz_0. \tag{17}$$

Проінтегрувавши нерівність (17) від z_1 до z_2, отримаємо оцінку

$$\frac{\alpha_0}{1-\alpha_0}[E_1(z_2)]^{\frac{\alpha_0-1}{\alpha_0}}\ge\frac{\alpha_0}{1-\alpha_0}[E_1(z_1)]^{\frac{\alpha_0-1}{\alpha_0}}+C(z_2-z_1).$$

Оскільки $0<\alpha_0<1$, то одержана оцінка еквівалентна нерівності (13). ■

Теорема 3. *Нехай u – узагальнений розв'язок задачі (1)–(3), $m=l$, $p=2$, $S=0$ і виконуються умови* (**A**), (**B**), (**C**), (**H**), (**R**), (**U**). *Тоді правильна оцінка*

$$E_1(z_2)\le E_1(z_1)e^{-C(z_2-z_1)},\quad 0\le z_1<z_2. \tag{18}$$

□ *Доведення.* Подібними міркуваннями як під час доведення теореми 2, отримуємо (17), де $\alpha_0 = 1$. Проінтегрувавши обидві частини одержаної нерівності від z_1 до z_2, матимемо твердження теореми. ■

У випадку обмеженої області Ω та рівняння

$$u_{tt} + (-1)^m \sum_{|\alpha|=m} D_x^\alpha(|D_x^\alpha u_t|^{p-2} D_x^\alpha u_t) +$$
$$+(-1)^l \sum_{|\alpha|=l} D_x^\alpha(|D_x^\alpha u_t|^{p-2} D_x^\alpha u_t) +$$
$$+(-1)^l \sum_{|\alpha|=l} D_x^\alpha(|D_x^\alpha u|^{p-2} D_x^\alpha u) +$$
$$+|u_t|^{r-2}u_t = 0, \tag{19}$$

де $r > 1$, $p > 2$, встановимо поведінку на півосі $t > 0$ похідної за часом від узагальненого розв'язку задачі (19), (2)-(3).

Теорема 4. *Нехай u – узагальнений розв'язок задачі (19), (2)-(3) в області $Q = \Omega \times (0, +\infty)$ і, крім того, $u_0 \in W_0^{l,p}(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$. Тоді для всіх $t > 0$ виконується оцінка*

$$\int_{\Omega_t} u_t^2 dx \leq \left[\gamma_1 t + G_0^{\frac{2-q}{2}}\right]^{\frac{2}{2-q}}, \tag{20}$$

де $q = \begin{cases} p, & \mathrm{r} \leq 2, \\ \min\{p, r\}, & \mathrm{r} > 2, \end{cases}$ *а* γ_1, G_0 *– додатні сталі.*

□ *Доведення.* Оскільки u – розв'язок задачі (19), (2)-(3), а рівняння (19) є частковим випадком рівняння (1), то для всіх $0 \leq t_1 < t_2 < +\infty$ та $\mu \geq 0$ правильна рівність

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_{t_2}} u_t^2 e^{-\mu t_2} dx - \frac{1}{2}\int_{\Omega_{t_1}} u_t^2 e^{-\mu t_1} dx +$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega}\Big[\frac{\mu}{2}u_t^2 + \sum_{|\alpha|=m}|D_x^\alpha u_t|^p + \sum_{|\alpha|=l}|D_x^\alpha u_t|^p +$$
$$+\sum_{|\alpha|=l}|D_x^\alpha u|^{p-2} D_x^\alpha u D_x^\alpha u_t + |u_t|^r\Big] e^{-\mu t} dx dt = 0,$$

яку, прийнявши $\mu = 0$, $t_1 = 0$, $t_2 = t$, перепишемо у вигляді

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_t} u_t^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega_\tau}\Big[|\mathcal{D}_x^m u_t|_p^p + |\mathcal{D}_x^l u_t|_p^p +$$
$$+|u_t|^r\Big] dx d\tau + \frac{1}{p}\int_{\Omega_t} |\mathcal{D}_x^l u|_p^p dx = \tag{21}$$
$$= \frac{1}{2}\int_{\Omega_0} u_1^2 dx + \frac{1}{p}\int_{\Omega_0} |\mathcal{D}_x^l u_0|_p^p dx.$$

На підставі нерівності Фрідріхса

$$\int_0^t \int_{\Omega_\tau}\Big(|\mathcal{D}_x^m u_t|_p^p + |\mathcal{D}_x^l u_t|_p^p\Big) dx d\tau \geq C_\Omega \int_0^t \int_{\Omega_\tau} |u_t|^p dx d\tau,$$

нерівності $\frac{1}{p}\int_{\Omega_t} |\mathcal{D}_x^l u|_p^p dx \geq 0$ та формули (21), матимемо оцінку

$$\int_{\Omega_t} u_t^2 dx + 2C_\Omega \int_0^t \int_{\Omega_\tau} |u_t|^p dx d\tau + 2\int_0^t \int_{\Omega_\tau} |u_t|^r dx d\tau \leq G_0,$$

де

$$G_0 := \int_{\Omega_0}\Big(u_1^2 + \frac{2}{p}|\mathcal{D}_x^l u_0|_p^p\Big) dx.$$

Оскільки

$$\int_{\Omega_t} |u_t|^2 dx \leq (\mathrm{mes}\,\Omega)^{\frac{q-2}{q}} \Big(\int_{\Omega_t} |\mathrm{u_t}|^{\mathrm{q}} \mathrm{dx}\Big)^{\frac{2}{q}},$$

то

$$\int_{\Omega_t} |u_t|^q dx \geq (\mathrm{mes}\,\Omega)^{\frac{2-q}{2}} \Big(\int_{\Omega_t} |\mathrm{u_t}|^2 \mathrm{dx}\Big)^{\frac{q}{2}}.$$

Позначимо

$$y(t) = \int_{\Omega_t} u_t^2 dx, \ \ \mu_0 = \begin{cases} 2C_\Omega, & \mathrm{r} \leq 2, \\ 2C_\Omega, & \mathrm{p} < \mathrm{r}, \\ 2, & 2 < \mathrm{r} \leq \mathrm{p}, \end{cases}$$

$\gamma_0 = (\mathrm{mes}\,\Omega)^{\frac{2-q}{2}}$. Тоді виконується нерівність

$$y(t) + \mu_0\gamma_0 \int_0^t [y(\tau)]^{\frac{q}{2}} d\tau \leq G_0,$$

яку запишемо у вигляді

$$\Big[z'(t)\Big]^{\frac{2}{q}} + \mu_0\gamma_0 z(t) \leq G_0, \tag{22}$$

де $z(t) = \int_0^t [y(\tau)]^{\frac{q}{2}} d\tau$.

Очевидно, що

$$z(0) = 0, \ z'(t) = [y(t)]^{\frac{q}{2}} \geq 0 \text{ та } y(t) = \Big[z'(t)\Big]^{\frac{2}{q}}.$$

Проаналізуємо нерівність (22). Якщо $y(t) > 0$ для всіх $t > 0$, то функція z строго монотонно зростає і $\mu_0\gamma_0 z(t) < G_0$. Якщо ж існує таке $t_0 > 0$, що $\mu_0\gamma_0 z(t_0) = G_0$, то $z'(t_0) = 0$ і $y(t_0) = 0$. У цьому випадку $y(t) \equiv 0$ при $t \in [t_0, +\infty)$.

Нехай для всіх $t > 0$ $\mu_0\gamma_0 z(t) < G_0$, тоді

$$z'(t) \leq [G_0 - \mu_0\gamma_0 z(t)]^{\frac{q}{2}},$$

$$\Big[G_0 - \mu_0\gamma_0 z(t)\Big]^{\frac{2-q}{2}} - G_0^{\frac{2-q}{2}} \leq \frac{\mu_0\gamma_0(q-2)}{2} t.$$

З останньої нерівності одержуємо формулу

$$G_0 - \mu_0\gamma_0 z(t) \leq \Big[\gamma_1 t + G_0^{\frac{2-q}{2}}\Big]^{\frac{2}{2-q}},$$

де $\gamma_1 = \frac{\mu_0\gamma_0(q-2)}{2}$. Звідси, на підставі (22), виконується шукана оцінка (20). ■

Висновки

У роботі розглянуто мішану задачу для нелінійного гіперболічного рівняння високого порядку. Встановлено умови на параметри рівняння, що забезпечують компактність носія її узагальненого розв'язку за додатним напрямком однієї із просторових змінних, а також досліджено поведінку і одержано енергетичні оцінки для розв'язку такої задачі.

Література

[1] Антонцев С.Н. О характере возмущений, описываемых решениями многомерных вырождающихся параболических уравнений // Динамика жидкости со свободными границами, 1979, вып. 40. – С.114–121.

[2] Антонцев С.Н. О локализации решений нелинецных вырождающихся эллиптических и параболических уравнений // ДАН ССР, 1981, т.260. – С.1289–1293.

[3] Bernis F. Qualitative properties for some nonlinear higher order degenerate parabolic equations, Houston J. of Mathematics, 14, No. 3, (1988), 319-351.

[4] Bernis F. Finite seed of propagation and asymptotic rates for some nonlinear higher order parabolic equations with absorption, Proc. Royal. Soc. of Edinburgh, 104 A, (1986), 1-19.

[5] Тедеев А.Ф. Оценки скорости стабилизации при $t \to \infty$ решения второй смешанной задачи для квазилинейного параболического уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения, 1991, т.27, № 10. – С.1795–1806.

[6] Тедеев А.Ф. Стабилизация решений первой смешанной задачи для квазилинейного параболического уравнения высокого порядка // Дифференц. уравнения, 1989, т.25, № 3. – С.481–498.

[7] Тедеев А.Ф. Качественные свойства решений задачи Неймана для квазилинейного параболического уравнения высокого порядка // Укр. мат. журнал, 1993, т.45, № 11. – С.1571–1579.

[8] Шишков А.Е. Об оценках скорости распространения возмущений в квазилинейных дивергентных вырождающихся параболических уравнений высокого порядка // Укр. мат. журнал, 1992, т.44, № 10. – С.1451–1456.

[9] Шишков А.Е. Распространение возмущений в сингулярной задаче Коши для квазилинейных вырождающихся параболических уравнений // Мат. сб., 1996, т.187, № 9. – С.139–160.

[10] Шишков А.Е. Эволюция носителя решения с неограниченной энергией квазилинейного вырождающегося параболического уравнения произвольного порядка // Мат. сб., 1995, т.186, № 12. – С.151–172.

[11] *Kováčik O., Rákosnik J.* On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{1,p(x)}$, Czechoslovak Math. J., 41 (116), (1991), 592–618.

[12] Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М., 2002.

THE COMPACTNESS SOLUTIONS' SUPPORT OF ONE NONLINEAR EVOLUTION EQUATION

O.T. Panat

Ivan Franko National University of Lviv
1 Universytetska Str., 79001, Lviv, Ukraine

The mixed problem for nonlinear hyperbolic equation of the higher order is examined. Given some conditions for initial problems' data is stated the supports' compactness of its generalized solution.

Keywords: nonlinear hyperbolic equation of the higher order, the compactness solutions' support

2000 MSC: 2000: 35L75, 35G25

УДК: 517.95