ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
**"Фізико-математичні науки"**
Вип.625 № 625, (2008) с. 35–42

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
"LVIVSKA POLITECHNIKA"
**"Physical & mathematical sciences"**
Vol.625 No 625, (2008) 35–42

# ОДНА ЕКСТРЕМАЛЬНА ДВОПАРАМЕТРИЧНА ЗАДАЧА ДЛЯ МЕРОМОРФНИХ У ПРОКОЛЕНІЙ ПЛОЩИНІ ФУНКЦІЙ

І.П. Кшановський

*Національний університет "Львівська політехніка"*
*вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна*

*(Отримано 8 вересня 2008 р.)*

Одержано оцінку знизу величини

$$\varkappa^*(f) := \limsup_{\tau,\ r\to\infty} \frac{N(\tau,r,f)+N(\tau,r,1/f)}{T(\tau,r,f)}$$

для мероморфних у проколеній площині функцій.

**Ключові слова:** мероморфна функція, характеристика Неванлінни, дефект функції, коефіцієнти Фур'є.

**2000 MSC:** 30D35

**УДК:** 517.53

## Вступ. Позначення та формулювання основних результатів

Нехай $f$ – мероморфна у проколеній площині $A=\mathbb{C}\backslash\{0\}$ функція. Позначимо

$$N_1(\tau,f)=\int\limits_1^\tau \frac{n(1/t,1,f)}{t}dt,\ \tau\ge 1,\quad N_2(r,f)=$$

$$=\int\limits_1^r \frac{n(1,t,f)}{t}dt,\quad r\ge 1,$$

де $n(s,t,f)$ – кількість полюсів функції $f$ області $\{z: s<|z|<t\}$. Позначимо

$$N(\tau,r,f)=N_1(\tau,f)+N_2(r,f)+n(\mathbb{T},f)\log\sqrt{\tau r},$$

$$\tau\ge 1, r\ge 1,$$

де $n(\mathbb{T},f)$ – лічильна функція тих полюсів функції $f$, які лежать на одиничному колі.

Нехай

$$c_f := \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\{z:\ |z|=1,\ |f(z)|>1\}} \operatorname{Im}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}dz\right)+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\{z:\ |z|=1,\ |f(z)|=1\}} \operatorname{Im}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}dz\right),$$

де $z=e^{i\theta},\ dz=ie^{i\theta}d\theta,\ \theta\in[0,2\pi]$.

В [1], [2] наведена така двопараметрична характеристика мероморфної в $A$ функції $f$:

$$T(\tau,r,f)=m(1/\tau,f)+m(r,f)-2m(1,f)+$$

$$+N(\tau,r,f)+c_f\log\frac{\tau}{r},\qquad \tau\ge 1,\ r\ge 1.$$

Доведено, що функція $T(\tau,r,f)$ – невід'ємна, неперервна, неспадна та опукла стосовно логарифма кожної змінної; $T(\tau,r,f)=T(\tau,r,1/f)$ ([1], [2]).

Для мероморфної в $A$ функції $f$ приймемо

$$\varkappa^*(f) := \limsup_{\tau,\ r\to\infty} \frac{N(\tau,r,f)+N(\tau,r,1/f)}{T(\tau,r,f)}.$$

Для довільного $a\in\mathbb{C}$ введемо таку величину

$$\delta^*(a,f) := 1-\limsup_{\tau,\ r\to\infty} \frac{N(\tau,r,\frac{1}{f-a})}{T(\tau,r,f)},$$

яку назвемо дефектом функції $f$ в точці $a$. З цих означеннь негайно випливає, що у випадку, коли $f$ – аналітична в $A$ функція, то $\varkappa^*(f)=1-\delta^*(0,f)$.

Пару невід'ємних чисел $(\rho_1,\rho_2)$, які задовольняють такі умови

a) $\forall\varepsilon>0\ \exists(\tau_0(\varepsilon),\ r_0(\varepsilon)):\ \forall(\tau,r),\ \tau>\tau_0(\varepsilon),\ r>r_0(\varepsilon)\ [T(\tau,r)<\tau^{\rho_1+\varepsilon}+r^{\rho_2+\varepsilon}]$;

b) $\forall\varepsilon>0\ \exists(\tau_m,r_k),\ \tau_m\to\infty,\ m\to\infty,\ r_k\to\infty,\ k\to\infty\ [T(\tau_m,r_k)>\tau_m^{\rho_1-\varepsilon}+r_k^{\rho_2-\varepsilon}]$,

назвемо парою порядків функції $f$.

Нехай

$$m_2(r,f)=\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\ln|f(re^{i\theta})|\right|^2 d\theta\right\}^{1/2},\ r>0,$$

$$m_2(\tau,r,f)=m_2(1/\tau,f)+m_2(r,f),\quad \tau\ge 1,\ r\ge 1.$$

Позначимо

$$V(\rho)=\frac{|\sin\pi\rho|}{\pi\rho}\left\{\frac{2}{1+\frac{\sin 2\pi\rho}{2\pi\rho}}\right\}^{1/2},\ \rho>0.$$

Точна оцінка знизу величини

$$\varkappa(f)=\limsup_{r\to\infty}\frac{N(r,f)+N(r,1/f)}{T(r,f)}$$

у випадку, коли $f$ – мероморфна в $\mathbb{C}$ функція порядку $\rho < 1$ одержана в [3], (див. також [4]). Проте задача про знаходження найкращої оцінки знизу величин $\varkappa(f)$ для мероморфних в $\mathbb{C}$ функцій скінченного порядку $\rho > 1$ залишається відкритою. Найкраща з відомих сьогодні оцінок величини $\varkappa(f)$ для мероморфних в $\mathbb{C}$ функцій була отримана в [5], [6] за допомогою точної оцінки знизу величини

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{N(r,f)+N(r,1/f)}{m_2(r,f)}.$$

Оцінка величини

$$\varkappa_0(f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{N_0(r,f)+N_0(r,1/f)}{T_0(r,f)},$$

для певного класу функцій була отримана в [7] за допомогою точної оцінки знизу величини

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{N_0(r,f)+N_0(r,1/f)}{m_2(r,f)+m_2(1/r,f)},$$

де

$$N_0(r,f) = \int_1^r \frac{n_0(t,f)}{t}dt,\ r \ge 1,$$

$n_0(t,f)$ – кількість полюсів функції $f$ в $\{z : 1/t < |z| \le t\},\ t \ge 1$,

$$m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})|d\theta,\ r > 0,$$

$$m_0(r,f) = m(r,f) + m(1/r,f) - 2m(1,f), \quad r \ge 1,$$

$$T_0(r,f) = m_0(r,f) + N_0(r,f), \quad r \ge 1,$$

– характеристика Неванлінни функції $f$ в $A$, введена нещодавно Кондратюком А.А. та Христіянином А. Я. ([8])

У цій роботі ми отримуємо оцінку величини $\varkappa^*(f)$ для мероморфних в $A$ функцій за допомогою таких теорем:

**Теорема 1.** *Нехай $f$ – мероморфна в $A$ функція, $(\rho_1,\rho_2)$ – пара порядків функції $f$, $0 < \rho_1 < \infty$, $0 < \rho_2 < \infty$. Тоді*

$$\limsup_{\tau,\ r\to+\infty} \frac{N(\tau,r,f)+N(\tau,r,1/f)}{m_2(\tau,r,f)} \ge \max\{V(\rho_1),V(\rho_2)\}, \tag{1}$$

*причому ця нерівність точна, тобто для деякої мероморфної в $A$ функції в (1) існує рівність.*

**Теорема 2.** *Нехай $f$ – мероморфна в $A$ функція, $(\rho_1,\rho_2)$ – пара порядків функції $f$, $0 < \rho_1 < \infty$, $0 < \rho_2 < \infty$. Тоді*

$$\varkappa^*(f) \ge 0,9\frac{|sin\pi\rho^*|}{\rho^*+1}, \tag{2}$$

*де $\rho^*$ – те з чисел $\rho_1$ та $\rho_2$, для якого $V(\rho^*) = \max\{V(\rho_1),V(\rho_2)\}$.*

# I. Допоміжні твердження та результати

Нехай $f$ мероморфна у проколеній площині $A = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ функція. Через $Z(f) = \{a_\nu\}$, $W(f) = \{b_\mu\}$, позначимо послідовності нулів та полюсів функції $f$ відповідно, де кожен нуль чи полюс рахується відповідно до його кратності.

Через $c_k(r,f)$ позначимо коефіцієнти Фур'є функції $\log|f(re^{i\theta})|$,

$$c_k(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta}\log|f(re^{i\theta})|d\theta,\ k\in\mathbb{Z},\ 0<r<\infty.$$

Нам знадобляться результати з [9], які ми сформулюємо у вигляді таких теорем.

**Теорема A.** *Нехай $f$ – відмінна від тотожного нуля, мероморфна в $\{z : 1/R_0 < |z| < R_0\}$, $R_0 \le \infty$, функція, $Z(f) = \{a_\mu\}$, $W(f) = \{b_\nu\}$. Нехай $\{\alpha_k\}$ визначаються з рівностей $k\alpha_k = \beta_{k-1}$, $k \ne 0$, де $\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\beta_k z^k + \sum_{|a_\mu|=1}\frac{1}{z-a_\mu} - \sum_{|b_\nu|=1}\frac{1}{z-b_\nu}$ – розвинення логарифмічної похідної функції $f$ в деякому околі одиничного кола. Тоді*

$$c_0(1/r,f) + c_0(r,f) - 2c_0(1,f) = N_0(r,1/f) - N_0(r,f),$$

$$c_k(r,f) = \frac{1}{2}(\alpha_k r^k + \overline{\alpha}_{-k}r^{-k}) +$$

$$+\frac{1}{2k}\sum_{1<|a_\mu|\le r}\left(\left(\frac{r}{a_\mu}\right)^k - \left(\frac{\overline{a}_\mu}{r}\right)^k\right) -$$

$$-\sum_{1<|b_\nu|\le r}\left(\left(\frac{r}{b_\nu}\right)^k - \left(\frac{\overline{b}_\nu}{r}\right)^k\right), \tag{3}$$

$$c_k(1/r,f) = \frac{1}{2}(\alpha_k r^{-k} + \overline{\alpha}_{-k}r^k) +$$
$$+\frac{1}{2k}\sum_{1/r\le|a_\mu|\le 1}\left((r\overline{a}_\mu)^k - \left(\frac{1}{ra_\mu}\right)^k\right) -$$
$$-\frac{1}{2k}\sum_{1/r\le|b_\nu|\le 1}\left((r\overline{b}_\nu)^k - \left(\frac{1}{rb_\nu}\right)^k\right),$$

*де $k \ne 0$, $1 < r < R_0$.*

**Теорема B.** Нехай $f$ – мероморфна функція в кільці $A = \{z : 1/R_0 < |z| < R_0\}$, $R_0 \le \infty$, відмінна від тотожного нуля. Тоді існують функції $f_1$ та $f_2$ такі, що:

1) $f_1$ – мероморфна в $\{z : |z| < R_0\}$, $f_2$ – мероморфна в $\{z : |z| > 1/R_0\}$,

$$f(z) = f_1(z)f_2(z), \quad z \in A;$$

2) нулі та полюси функції $f_1$ збігаються з нулями та полюсами функції $f$ в $A\bigcap\{z : |z| > 1\}$, нулі та

полюси функції $f_2$ збігаються з нулями та полюсами функції $f$ в $A\bigcap\{z:|z|\le 1\}$.

**Означення A.**([6]) *Нехай* $X=\{x_j\}$, $\gamma=\{\gamma_k\}$ – *дві послідовності комплексних чисел. Функції* $c_k(r,X,\gamma)$, $k\in\mathbb{Z}$, *де*

$$c_0(r,X,\gamma)=\int\limits_0^r \frac{n(t,X)}{t}dt,$$

$n(t,X)$ – *кількість членів послідовності* $X$ *в крузі* $\{z:|z|\le t\}$,

$$c_k(r,X,\gamma)=\frac{r^k}{2}\left\{\gamma_k+\frac{1}{k}\sum_{|x_j|\le r}\left(\frac{1}{x_j}\right)^k\right\}-$$

$$-\frac{1}{2k}\sum_{|x_j|\le r}\left(\frac{\overline{x}_j}{r}\right)^k$$

*за* $k\in\mathbb{N}$ *і* $c_k=\overline{c}_{-k}$ *за* $-k\in\mathbb{N}$ *називаються коефіцієнтами Фур'є пари* $(X,\gamma)$.

**Теорема C.**([6]) *Нехай* $c_k(r)=c_k(r,X,\gamma)$ – *коефіцієнти Фур'є пари* $(X,\gamma), X=\{x_j\}, x_j\ne 0$, $\gamma=\{\gamma_k\}$, *що задовольняють умову*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_k(r)|^2<\infty.$$

*Тоді існує єдина ціла функція* $F, F(0)=1$, *для якої* $Z(F)=X$ *і* $c_k(r,F)=c_k(r)$ *для усіх* $k\in\mathbb{Z}$ *і всіх* $r>0$.

**Теорема D.**([10]) *Нехай* $f$ – *відмінна від тотожного нуля, мероморфна функція у кільці* $D=\{z:r_0<|z|<R_0\}$, $0<r_0<1$, $1<R\le\infty$, $\{a_\mu\}$ *та* $\{b_\nu\}$ – *послідовності нулів та полюсів функції* $f$ *в* $D$ *відповідно. Нехай* $n^{(1)}(t,f)$ – *лічильна функція полюсів функції* $f$ *в області* $\{z:t\le|z|<1\}$, $r_0<t<1$, *а* $n^{(2)}(t,f)$ - *лічильна функція полюсів функції* $f$ *в області* $\{z:1\le|z|<t\}$, $1\le t<R_0$. *Тоді*

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log|f(e^{i\theta})|d\theta=$$

$$=\int\limits_1^r\frac{n^{(2)}(t,1/f)}{t}dt-\int\limits_1^r\frac{n^{(2)}(t,f)}{t}dt+k(\psi_f)\log r,$$

$1\le r<R_0$,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log|f(e^{i\theta})|d\theta=$$

$$=\int\limits_r^1\frac{n^{(1)}(t,1/f)}{t}dt-\int\limits_r^1\frac{n^{(1)}(t,f)}{t}dt+k(\psi_f)\log r,$$

$r_0<r\le 1$,

*де* $k(\psi_f)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\frac{\psi_f'(z)}{\psi_f(z)}dz$, $\psi_f(z)=$

$$=f(z)\frac{\prod\limits_{|b_\nu|=1}(z-b_\nu)}{\prod\limits_{|a_\mu|=1}(z-a_\mu)}.$$

## II. Доведення теорем 1, 2

**Доведення теореми 1.** Розглянемо такі випадки: 1) Числа $\rho_1$ та $\rho_2$ не цілі. Нехай

$$n(1/\tau,1):=n(1/\tau,1,f)+n(1/\tau,1,1/f),\ \tau>1,$$

$$n(1,r):=n(1,r,f)+n(1,r,1/f),\ r>1,$$

$$n(\mathbb{T}):=n(\mathbb{T},f)+n(\mathbb{T},1/f).$$

$$N_1(\tau)=N_1(\tau,f)+N_1(\tau,1/f),\ \tau\ge 1,$$

$$N_2(r)=N_2(r,f)+N_2(r,1/f),\ r\ge 1.$$

Доведемо, що $\rho[N_1(\tau)]=\rho_1,\quad \rho[N_2(r)]=\rho_2$. За теоремою B про декомпозицію існують функції $f_1$ та $f_2$ такі, що:

1) функція $f_1$ мероморфна в $\mathbb{C}$, $f_2$ – мероморфна в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$,

$$f(z)=f_1(z)f_2(z),\quad z\in A;$$

2) нулі та полюси функції $f_1$ збігаються з нулями та полюсами функції $f$ в $A\bigcap\{z:|z|>1\}$, нулі та полюси функції $f_2$ збігаються з нулями та полюсами функції $f$ в $A\bigcap\{z:|z|\le 1\}$.

Доведено, що [9, с. 36]

$$|\log^+|f(z)|-\log^+|f_2(z)||\le C_1(f),\quad 0<|z|\le 1,$$

$$|\log^+|f(z)|-\log^+|f_1(z)||\le C_2(f)(1+\log r),\quad |z|\ge 1.$$

З цих нерівностей негайно випливає, що

$$|m(1/\tau,f)+m(r,f)-m(r,f_1)-m(\tau,\widehat{f}_2)|\le$$

$$\le C_3(f)(1+\log r),\ r\ge 1,$$

де $\widehat{f}_2(z)=f_2(1/z)$. Оскільки

$$N_1(\tau,f)=N(\tau,\widehat{f}_2)+O(\log\tau),\quad \tau\ge 1,$$

$$N_2(r,f)=N(r,f_1)+O(\log r),\quad r\ge 1,$$

то з огляду на те, що числа $\rho_1$ та $\rho_2$ не цілі, $f_1$ та $\widehat{f}_2$ мероморфні в $\mathbb{C}$, матимемо, що $\rho[N_1(\tau)]=\rho_1,\quad \rho[N_2(r)]=\rho_2$.

Позначимо $[\rho_1]=q_1,[\rho_2]=q_2$,

$$X^{(1)}=\{x_j^{(1)}\}=\{1/|a_\mu|\}\bigcup\{1/|b_\nu|\},\ |a_\mu|\le 1,\ |b_\nu|\le 1,$$

$$X^{(2)}=\{x_i^{(2)}\}=\{|a_\mu|\}\bigcup\{|b_\nu|\},\ |a_\mu|>1,\ |b_\nu|>1,$$

$$\gamma_k^{(1)}=\begin{cases}|\alpha_{-k}|, & 0<k<q_1+1,\\ -\dfrac{1}{k}\sum\limits_{x\in X^{(1)}}\left(\dfrac{1}{x}\right)^k, & k\ge q_1+1,\end{cases}$$

$$\gamma_k^{(2)} = \begin{cases} |\alpha_k|, & 0 < k < q_2 + 1, \\ -\frac{1}{k} \sum\limits_{x \in X^{(2)}} \left(\frac{1}{x}\right)^k, & k \geq q_2 + 1, \end{cases}$$

де $\alpha_k$ визначаються з теореми A. Тоді

$$c_k(r, X^{(i)}, \gamma^{(i)}) = \frac{r^k}{2} \left\{ \gamma_k^{(i)} + \frac{1}{k} \sum_{x \in X^{(i)},\ |x| \leq r} \left(\frac{1}{x}\right)^k \right\} -$$

$$-\frac{1}{2k} \sum_{x \in X^{(i)},\ |x| \leq r} \left(\frac{x}{r}\right)^k, \quad 0 < k < q_i + 1,\ i = 1, 2. \quad (4)$$

$$c_k(r, X^{(i)}, \gamma^{(i)}) = -\frac{1}{2k} \sum_{x \in X^{(i)},\ |x| > r} \left(\frac{r}{x}\right)^k -$$

$$-\frac{1}{2k} \sum_{x \in X^{(i)},\ |x| \leq r} \left(\frac{x}{r}\right)^k, \ k \geq q_i + 1.$$

Оскільки $\rho[N_i(r)] = \rho_i,\ i = 1, 2$, то для деяких $A_i > 0,\ \varepsilon > 0,\ \rho_i + \varepsilon < q_i + 1$, маємо

$$n(1/\tau, 1) \leq A_1 \tau^{\rho_1 + \varepsilon}, \ \tau > 1, \quad n(1, r) \leq A_2 r^{\rho_2 + \varepsilon}, \ r > 1.$$

Далі, за допомогою властивостей інтеграла Стільт'єса та формули інтегрування частинами, знаходимо

$$|c_k(r, X^{(1)}, \gamma^{(1)})| = -c_k(r, X^{(1)}, \gamma^{(1)}) =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_1^r \left(\frac{t}{r}\right)^k \frac{n(1/t, 1)}{t} dt +$$

$$+\frac{1}{2} \int_r^\infty \left(\frac{r}{t}\right)^k \frac{n(1/t, 1)}{t} dt + \frac{n(\mathbb{T})}{2kr^k} \leq \frac{A_1 r^k}{2} \int_r^\infty t^{\rho_1 + \varepsilon - k - 1} dt +$$

$$+\frac{n(\mathbb{T})}{2kr^k} = \frac{A_1 r^{\rho_1 + \varepsilon}}{2(k - \rho_1 - \varepsilon)} + \frac{n(\mathbb{T})}{2kr^k}.$$

$$|c_k(r, X^{(2)}, \gamma^{(2)})| = -c_k(r, X^{(2)}, \gamma^{(2)}) =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_1^r \left(\frac{t}{r}\right)^k \frac{n(1, t)}{t} dt +$$

$$+\frac{1}{2} \int_r^\infty \left(\frac{r}{t}\right)^k \frac{n(1, t)}{t} dt \leq \frac{A_2 r^k}{2} \int_r^\infty t^{\rho_2 + \varepsilon - k - 1} dt =$$

$$= \frac{A_2 r^{\rho_2 + \varepsilon}}{2(k - \rho_2 - \varepsilon)}.$$

Отже

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(r, X^{(i)}, \gamma^{(i)})|^2 < \infty, \quad r > 1,\ i = 1, 2.$$

Для $r \leq 1$ з рівності $c_k(r, X^{(i)}, \gamma^{(i)}) = -\frac{1}{2k} \sum\limits_{x \in X^{(i)}} \left(\frac{r}{x}\right)^k$ отримаємо

$$|c_k(r, X^{(i)}, \gamma^{(i)})| = r^k |\gamma_k^{(i)}|/2 \leq r^k \gamma_i^* / k, \ k \geq q + 1, \ i = 1, 2,$$

де

$$\gamma_i^* = \frac{1}{2} \sum_{x \in X^{(i)}} \left(\frac{1}{x}\right)^{q_i + 1}, \ i = 1, 2.$$

Звідси

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(r, X^{(i)}, \gamma^{(i)})|^2 < \infty, \quad r \leq 1, \ i = 1, 2.$$

За теоремою C існують цілі функції $F_1$ та $F_2$ такі, що

$$c_k(\tau, X^{(1)}, \gamma^{(1)}) = c_k(\tau, F_1), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (5)$$

$$c_k(r, X^{(2)}, \gamma^{(2)}) = c_k(r, F_2), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (6)$$

З співвідношенн (3), враховуючи те, що модуль суми не перевищує суму модулів, матимемо

$$r^k \left| \alpha_k + \frac{1}{k} \sum_{1 < |a_\mu| < r} \left(\frac{1}{a_\mu}\right)^k - \frac{1}{k} \sum_{1 < |b_\nu| < r} \left(\frac{1}{b_\nu}\right)^k \right| \leq$$

$$\leq 2|c_k(r, f)| + \left| \frac{1}{k} \sum_{1 < |a_\mu| < r} \left(\frac{\overline{a}_\mu}{r}\right)^k - \frac{1}{k} \sum_{1 < |b_\nu| < r} \left(\frac{\overline{b}_\nu}{r}\right)^k \right| +$$

$$+ |\overline{\alpha}_{-k}| r^{-k}. \quad (7)$$

Оскільки

$$\left| \frac{1}{k} \sum_{1 < |a_\mu| < r} \left(\frac{\overline{a}_\mu}{r}\right)^k - \frac{1}{k} \sum_{1 < |a_\mu| < r} \left(\frac{\overline{b}_\nu}{r}\right)^k \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{k} \left( n(1, r, f) + n(1, r, 1/f) \right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{k} \left( \int_r^{er} \frac{n(1, t, f)}{t} dt + \int_r^{er} \frac{n(1, t, 1/f)}{t} dt \right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{k} \left( N_2(er, f) + N_2(er, 1/f) \right)$$

і

$$|c_k(r, f)| + |c_k(1/\tau, f)| \leq 2T(\tau, r, f) + O(\log r) + O(\log \tau),$$

то, поділивши (7) на $r^k$, і переходячи до границі за $r \to \infty$, знаходимо

$$\alpha_k = \frac{1}{k} \left( \sum_{1 < |b_\nu| < \infty} \left(\frac{1}{b_\nu}\right)^k - \sum_{1 < |a_\mu| < \infty} \left(\frac{1}{a_\mu}\right)^k \right),$$

$k > \rho_2$.

Підставляючи $\alpha_k$ в (3), отримаємо

$$c_k(r, f) = \frac{1}{2} \overline{\alpha}_{-k} r^{-k} - \frac{1}{2k} \left\{ \sum_{|a_\mu| > r} \left(\frac{r}{a_\mu}\right)^k - \sum_{|b_\nu| > r} \left(\frac{r}{b_\nu}\right)^k + \right.$$

$$\left. + \sum_{1 < |a_\mu| \leq r} \left(\frac{\overline{a}_\mu}{r}\right)^k - \sum_{1 < |b_\nu| \leq r} \left(\frac{\overline{b}_\nu}{r}\right)^k \right\}, \ 1 < r < \infty,$$

$k \geq q_2 + 1$.

Міркуючи в такий спосіб, легко отримати такі рівності:

$$\overline{\alpha}_{-k} = \frac{1}{k}\left(\sum_{0<|b_\nu|\leq 1} \overline{b}_\nu^k - \sum_{0<|a_\mu|\leq 1} \overline{a}_\mu^k\right),\ k > \rho_1,$$

$$c_k(\frac{1}{\tau}, f) = \frac{1}{2}\alpha_k \tau^{-k} - \frac{1}{2k}\left\{\sum_{|a_\mu|<1/\tau} (\tau\overline{a}_\mu)^k - \right.$$

$$-\sum_{|b_\nu|<1/\tau} (\tau\overline{b}_\nu)^k + + \sum_{1/\tau\leq|a_\mu|\leq 1} \left(\frac{1}{\tau a_\mu}\right)^k -$$

$$\left. - \sum_{1/\tau\leq|b_\nu|\leq 1} \left(\frac{1}{\tau b_\nu}\right)^k\right\},\ 1 < \tau < \infty,\ k \geq q_1 + 1.$$

Звідси

$$|c_k(1/\tau, f)| \leq |c_k(\tau, F_1)| + \frac{|\alpha_k|}{2\tau^k},\ k \geq q_1 + 1,$$

$$|c_k(r, f)| \leq |c_k(r, F_2)| + \frac{|\alpha_{-k}|}{2r^k},\ k \geq q_2 + 1.$$

Враховуючи рівності для $\overline{\alpha}_{-k}$, $k > \rho_1$ та $\alpha_k$, $k > \rho_2$, а також те, що $r \geq 1,\ \tau \geq 1$, отримаємо

$$|c_k(1/\tau, f)| \leq |c_k(\tau, F_1)| + \frac{\gamma_2^*}{k},\ k \geq q_1 + 1,$$

$$|c_k(r, f)| \leq |c_k(r, F_2)| + \frac{\gamma_1^*}{k},\ k \geq q_2 + 1.$$

Крім того, оскільки $\left|a - \frac{1}{\overline{a}}\right| = |a| - \frac{1}{|a|}$, якщо $|a| \geq 1$, то із співвідношень (3) випливають такі нерівності:

$$|c_k(1/\tau, f)| \leq |c_k(\tau, F_1)| + \frac{\gamma_k^{(2)}}{2\tau^k} \leq |c_k(\tau, F_1)| + \frac{\gamma_k^{(2)}}{2},$$

$1 \leq k \leq q_1$,

$$|c_k(r, f)| \leq |c_k(r, F_2)| + \frac{\gamma_k^{(1)}}{2r^k} \leq |c_k(r, F)| + \frac{\gamma_k^{(1)}}{2},$$

$1 \leq k \leq q_2$.

Беручи до уваги співвідношення теореми D, можемо стверджувати, що

$$c_0(1/\tau, f) \leq c_0(\tau, F_1) + O(\log\tau),\ \tau \geq 1,$$

$$c_0(r, f) \leq c_0(r, F_2) + O(\log r),\ r \geq 1.$$

Аналізуючи отримані вище нерівності для коефіцієнтів $c_k(r, f)$, та $c_k(1/\tau, f)$, одержимо

$$m_2(1/\tau, f) \leq m_2(\tau, F_1) + O(\log\tau),\ \tau \geq 1.$$

$$m_2(r, f) \leq m_2(r, F_2) + O(\log r),\ r \geq 1.$$

З (4) за допомогою властивостей інтеграла Стільєса та формули інтегрування частинами легко отримати такі співвідношення для $k \geq q_i + 1,\ i = 1, 2$:

$$|c_k(r, F_1)| = \frac{k}{2}\left\{\int_1^r \left(\frac{t}{r}\right)^k \frac{N_1(t)}{t}dt + \int_r^\infty \left(\frac{r}{t}\right)^k \frac{N_1(t)}{t}dt\right\} -$$

$$-N_1(r) + \frac{n(\mathbb{T})}{2kr^k}, \tag{8}$$

$$|c_k(r, F_2)| = \frac{k}{2}\left\{\int_1^r \left(\frac{t}{r}\right)^k \frac{N_2(t)}{t}dt + \int_r^\infty \left(\frac{r}{t}\right)^k \frac{N_2(t)}{t}dt\right\} -$$

$$-N_2(r), \tag{8$'$}$$

а для $1 \leq k \leq q_i$ $(q_i \neq 0)$,

$$0 \leq c_k(r, F_1) = \frac{1}{2}\gamma_k^{(1)} r^k + \frac{k}{2}\int_1^r \left(\left(\frac{r}{t}\right)^k - \left(\frac{t}{r}\right)^k\right) \frac{N_1(t)}{t}dt +$$

$$+N_1(r) + \frac{n(\mathbb{T})}{2k}(r^k - r^{-k}). \tag{9}$$

$$0 \leq c_k(r, F_2) = \frac{1}{2}\gamma_k^{(2)} r^k + \frac{k}{2}\int_1^r \left(\left(\frac{r}{t}\right)^k - \left(\frac{t}{r}\right)^k\right) \frac{N_2(t)}{t}dt +$$

$$+N_2(r). \tag{9$'$}$$

За лемою про піки Пойа для довільного $\varepsilon > 0$ існують послідовності $\{\tau_n\}$,$\{r_m\}$, $\tau_n \to \infty,\ r_m \to \infty$, $n, m \to |\infty$, такі, що

$$N_1(\tau) \leq \left(\frac{\tau}{\tau_n}\right)^{\rho_1 - \varepsilon} N_1(\tau_n),\quad 0 \leq \tau \leq \tau_n,$$

$$N_1(\tau) \leq \left(\frac{\tau}{\tau_n}\right)^{\rho_1 + \varepsilon} N_1(\tau_n),\quad \tau_n \leq \tau < \infty. \tag{10}$$

$$N_2(r) \leq \left(\frac{r}{r_m}\right)^{\rho_2 - \varepsilon} N_2(r_m),\quad 0 \leq r \leq r_m,$$

$$N_2(r) \leq \left(\frac{r}{r_m}\right)^{\rho_2 + \varepsilon} N_2(r_m),\quad r_m \leq r < \infty. \tag{11}$$

Використовуючи (10) та (11), з (8), (8') та (9), (9'), одержимо

$$|c_k(\tau_n, F_1)| \leq N_1(\tau_n)\left\{\frac{k(k-\varepsilon)}{(k-\varepsilon)^2 - \rho_1^2} - 1\right\} + \frac{n(\mathbb{T})}{2k\tau_n^k},$$

$k \geq q_1 + 1$,

$$|c_k(\tau_n, F_1)| \leq N_1(\tau_n)\left\{\frac{k^2}{(\rho_1 - \varepsilon)^2 - k^2} - 1\right\} +$$

$$+\frac{1}{2}\gamma_k^{(1)}\tau_n^k + \frac{n(\mathbb{T})}{2k}(\tau_n^k - \tau_n^{-k}),\quad 1 \leq k \leq q_1.$$

$$|c_k(r_m, F_2)| \leq N_2(r_m)\left\{\frac{k(k-\varepsilon)}{(k-\varepsilon)^2 - \rho_2^2} - 1\right\},\ k \geq q_2 + 1,$$

$$|c_k(r_m, F_2)| \leq N_2(r_m)\left\{\frac{k^2}{(\rho_2 - \varepsilon)^2 - k^2} - 1\right\} + \frac{1}{2}\gamma_k^{(2)} r_m^k,$$

$1 \leq k \leq q_2$.

Зауважимо, що з (10) та (11) випливають, зокрема, такі асимптотичні рівності:

$$\tau_n^{q_1} = o(N_1(\tau_n)),\quad n \to \infty,\quad r_m^{q_2} = o(N_2(r_m)),\ m \to \infty.$$

Враховуючи це зауваження і довільність $\varepsilon$, знаходимо

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{|c_k(1/\tau_n,f)|}{N_1(\tau_n)}\le\limsup_{n\to\infty}\frac{|c_k(\tau_n,F_1)|}{N_1(\tau_n)}\le\frac{\rho_1^2}{|k^2-\rho_1^2|},$$

$k\in\mathbb{N}$.

$$\limsup_{m\to\infty}\frac{|c_k(r_m,f)|}{N_2(r_m)}\le\limsup_{n\to\infty}\frac{|c_k(r_m,F_2)|}{N_2(r_m)}\le\frac{\rho_2^2}{|k^2-\rho_2^2|},$$

$k\in\mathbb{N}$.

З огляду на рівність Парсеваля

$$\{m_2(r,F_i)\}^2=c_0^2(r,F_i)+2\sum_{k=1}^{\infty}|c_k(r,F_i)|^2,\ i=1,2.$$

отримаємо нерівності (див. напр. [6])

$$\liminf_{\tau\to\infty}\frac{m_2(1/\tau,f)}{N_1(\tau)}\le\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\rho_1^4}{(\rho_1^2-k^2)^2}\right\}^{1/2}=$$

$$=\frac{\pi\rho}{\sqrt{2}|\sin\pi\rho_1|}\left(1+\frac{\sin 2\pi\rho_1}{2\pi\rho_1}\right)^{1/2}=\frac{1}{V(\rho_1)}.$$

$$\liminf_{r\to\infty}\frac{m_2(r,f)}{N_2(r)}\le\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\rho_2^4}{(\rho_2^2-k^2)^2}\right\}^{1/2}=$$

$$=\frac{\pi\rho_2}{\sqrt{2}|\sin\pi\rho_2|}\left(1+\frac{\sin 2\pi\rho_2}{2\pi\rho_2}\right)^{1/2}=\frac{1}{V(\rho_2)}.$$

Звідси знаходимо, що для будь-якого $\varepsilon>0$ існують послідовності $\tau_n^*\to\infty,\ r_m^*\to\infty$ такі, що

$$m_2(1/\tau_n^*,f)\le\left(\frac{1}{V(\rho_1)}+\varepsilon\right)N_1(\tau_n^*),\ n\in\mathbb{N},$$

$$m_2(r_m^*,f)\le\left(\frac{1}{V(\rho_2)}+\varepsilon\right)N_2(r_m^*),\ m\in\mathbb{N}.$$

Тоді

$$\liminf_{\tau,\ r\to\infty}\frac{m_2(1/\tau,f)+m_2(r,f)}{N(\tau,r,f)+N(\tau,r,1/f)}\le$$

$$\le\liminf_{\tau,\ r\to\infty}\frac{m_2(1/\tau,f)+m_2(r,f)}{N_1(\tau)+N_2(r)}\le$$

$$\le\liminf_{n,\ m\to\infty}\frac{m_2(1/\tau_n^*,f)+m_2(r_m^*,f)}{N_1(\tau_n^*)+N_2(r_m^*)}\le$$

$$\le\liminf_{n,\ m\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{V(\rho_1)}+\varepsilon\right)N_1(\tau_n^*)+\left(\frac{1}{V(\rho_2)}+\varepsilon\right)N_2(r_m^*)}{N_1(\tau_n^*)+N_2(r_m^*)}=$$

$$=\min\left\{\frac{1}{V(\rho_1)}+\varepsilon,\frac{1}{V(\rho_2)}+\varepsilon\right\}.\qquad(12)$$

Справді, нехай

$$\min\left\{\frac{1}{V(\rho_1)},\frac{1}{V(\rho_2)}\right\}=\frac{1}{V(\rho_1)}.$$

Оскільки $N_1(\tau_n^*)\to\infty,\ n\to\infty$, то можемо вибрати таку підпослідовність $\{\tau_{n_m}^*\},\ m\to\infty$ таку, що $N_1(\tau_{n_m}^*)>mN_2(r_m^*),\ m\in\mathbb{N}$. Тоді

$$\frac{1}{V(\rho_1)}+\varepsilon\le\liminf_{n,\ m\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{V(\rho_1)}+\varepsilon\right)N_1(\tau_n^*)+\left(\frac{1}{V(\rho_2)}+\varepsilon\right)N_2(r_m^*)}{N_1(\tau_n^*)+N_2(r_m^*)}\le$$

$$\le\liminf_{m\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{V(\rho_1)}+\varepsilon\right)N_1(\tau_{n_m}^*)+\left(\frac{1}{V(\rho_2)}+\varepsilon\right)N_2(r_m^*)}{N_1(\tau_{n_m}^*)+N_2(r_m^*)}=\frac{1}{V(\rho_1)}+\varepsilon.$$

Якщо ж

$$\min\left\{\frac{1}{V(\rho_1)},\frac{1}{V(\rho_2)}\right\}=\frac{1}{V(\rho_2)},$$

то міркування аналогічні. З огляду на довільність $\varepsilon>0$ нерівність (12) доводить наше твердження у разі, коли $\rho_1$ та $\rho_2$ не цілі.

2) Одне з чисел $\rho_1,\rho_2$ – натуральне. Нехай для визначеності $\rho_1$ – натуральне число. Оскільки $\rho_2$ – не ціле, то міркуючи в подібний спосіб, як у попередньому випадку, за допомогою леми про піки Пойа отримаємо, що для будь-якого $\varepsilon>0$ існує послідовність $\{r_m^*\}\to\infty,m\to\infty$ така, що

$$m_2(r_m^*,f)\le\left(\frac{1}{V(\rho_2)}+\varepsilon\right)N_2(r_m^*),\ m\in\mathbb{N}.$$

Нехай $\{\tau_n\},\ n\in\mathbb{N}$ – довільна фіксована послідовність додатних чисел така, що $\{\tau_n\}\to\infty,\ n\to\infty$. Тоді

$$\liminf_{\tau,\ r\to\infty}\frac{m_2(1/\tau,f)+m_2(r,f)}{N(\tau,r,f)+N(\tau,r,1/f)}\le$$

$$\le\liminf_{\tau,\ r\to\infty}\frac{m_2(1/\tau,f)+m_2(r,f)}{N_1(\tau)+N_2(r)}\le$$

$$\le\liminf_{\tau,\ r\to\infty}\frac{m_2(1/\tau,f)+m_2(r,f)}{N_2(r)}\le$$

$$\le\liminf_{n,\ m\to\infty}\frac{m_2(1/\tau_n,f)+m_2(r_m^*,f)}{N_2(r_m^*)}\le$$

$$\le\liminf_{n,\ m\to\infty}\frac{m_2(1/\tau_n,f)+\left(\frac{1}{V(\rho_2)}+\varepsilon\right)N_2(r_m^*)}{N_2(r_m^*)}\le$$

$$\le\liminf_{n\to\infty}\frac{m_2(1/\tau_n,f)+\left(\frac{1}{V(\rho_2)}+\varepsilon\right)N_2(r_{m_n}^*)}{N_2(r_{m_n}^*)}=\frac{1}{V(\rho_2)}+\varepsilon,$$

де $\{r_{m_n}\}$ – підпослідовність послідовності $\{r_m\}$ така, що $N_2(r_{m_n}) > nm_2(1/\tau_n, f), n \in \mathbb{N}$. З огляду на довільність $\varepsilon > 0$ одержимо потрібну нерівність.

3) У разі, коли $\rho_1$ та $\rho_2$ натуральні числа, твердження теореми очевидне, оскільки $V(\rho_1)=V(\rho_2)=0$.

У [5] побудовано приклад цілої функції $f_0$ з додатними нулями порядку $\rho$, де $\rho$ – не ціле, для якої

$$N(r, 1/f_0) = \frac{1}{\rho} r^{\rho} + o(r^{\rho}), \quad r \to \infty,$$

$$\lim_{r\to\infty} \left\{ \frac{m_2(r, f_0)}{N(r, 1/f_0)} \right\}^2 = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^4}{(\rho^2 - k^2)^2}.$$

Нехай $\rho_1$ та $\rho_2$ не цілі. Як було зауважено вище, можна побудувати цілі функції $f_1(z)$ та $f_2(z)$ з додатними нулями порядків $\rho_1$ та $\rho_2$ відповідно такі, що

$$N(r, 1/f_i) = \frac{1}{\rho_i} r^{\rho_i} + o(r^{\rho_i}), \quad r \to \infty, \ i = 1, 2;$$

$$\lim_{r\to\infty} \left\{ \frac{m_2(r, f_i)}{N(r, 1/f_i)} \right\}^2 = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho_i^4}{(\rho_i^2 - k^2)^2}, \ i = 1, 2.$$

Розглянемо функцію $g(z) = f_1(1/z) f_2(z)$. Оскільки $f_1(z)$ та $f_2(z)$ - цілі функції з додатними нулями, то існують $\tau_0$, $r_0$ такі, що функція $f_1(z)$ не має нулів в крузі $\{z : |z| \le 1/\tau_0\}$, $f_2(z)$ не має нулів в крузі $\{z : |z| \le 1/r_0\}$. Звідси матимемо, що існують сталі $C_1, C_2$ такі, що

$$m_2(1/r, f_1) \le C_1, \ r > \tau_0, \ m_2(1/\tau, f_2) \le C_2, \ \tau > r_0.$$

Оскільки

$$c_k(t, g) = \overline{c}_k(1/t, f_1) + c_k(t, f_2), \ 0 < t < \infty,$$

то

$$m_2(1/\tau, g) = m_2(\tau, f_1) + O(1), \ \tau > r_0,$$
$$m_2(r, g) = m_2(r, f_2) + O(1), \ r > \tau_0.$$

Враховуючи також те, що

$$N_1(\tau, 1/f) = N(\tau, 1/f_1) + O(\log \tau), \ \tau \ge 1,$$

$$N_2(r, 1/f) = N(r, 1/f_2) + O(\log r), \ r \ge 1,$$

отримаємо

$$\liminf_{\tau,\ r\to\infty} \frac{m_2(1/\tau, g) + m_2(r, g)}{N(\tau, r, 1/g)} =$$

$$= \liminf_{\tau,\ r\to\infty} \frac{m_2(\tau, f_1) + m_2(r, f_2)}{N(\tau, 1/f_1) + N(r, 1/f_2)} =$$

$$= \liminf_{\tau,\ r\to\infty} \frac{\frac{1}{\rho_1 V(\rho_1)} \tau^{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2 V(\rho_2)} r^{\rho_2}}{\frac{1}{\rho_1} \tau^{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} r^{\rho_2}} =$$

$$= \min \{1/V(\rho_1), 1/V(\rho_2)\},$$

тобто оцінка (1) точна.

**Доведення теореми 2.** Враховуючи монотонність $m_q(r, f)$ за змінною $q$, матимемо

$$m_2(1/\tau, f) + m_2(r, f) \ge m_1(1/\tau, f) + m_1(r, f) =$$

$$= 2T(\tau, r, f) - N(\tau, r, f) - N(\tau, r, 1/f) + O(\log r) + O(\log \tau).$$

Тому

$$\frac{\varkappa^*(f)}{2 - \varkappa^*(f)} = \limsup_{\tau,\ r\to\infty} \frac{N(\tau, r, f) + N(\tau, r, 1/f)}{2T(\tau, r, f) - N(\tau, r, f) - N(\tau, r, 1/f)} \ge$$

$$\ge \limsup_{\tau,\ r\to\infty} \frac{N(\tau, r, f) + N(\tau, r, 1/f)}{m_2(1/\tau, f) + m_2(r, f) + O(\log \tau) + O(\log r)} =$$

$$= \limsup_{\tau,\ r\to\infty} \frac{N(\tau, r, f) + N(\tau, r, 1/f)}{m_2(1/\tau, f) + m_2(r, f)}.$$

Враховуючи (1), приходимо до нерівності

$$\frac{\varkappa^*(f)}{2 - \varkappa^*(f)} \ge \frac{|\sin \pi\rho^*|}{\pi\rho^*} \left\{ \frac{2}{1 + \frac{\sin 2\pi\rho^*}{2\pi\rho^*}} \right\}^{1/2}. \qquad (13)$$

Використовуючи елементарні оцінки (див. наприклад [6], с. 64), отримаємо (2) з (13).

## Література


[1] Kondratyuk A.A. Meromorphic functions with several essential singularities // International conference "Analysis and topology". – May 29–June 7. – 2008, book of abstracts. – P. 29.

[2] Kondratyuk A.A. Meromorphic functions with several essential singularities // e-library. – 2008. – 13 p.:http//www. arXiv.org.

[3] Edrei A., Fuchs W.H.J, The deficiens of meromorphic functions of order less than one Duke Math.J. – 1960. – V.27. – P. 233–249.

[4] Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций. – М: Наука. – 1970. – 591 с.

[5] Miles J.B., Shea D.F, An extremal problem in value distribution theory // Quart.J.Math. – Oxford. – 1973. – V.24. – P. 377–383.

[6] Кондратюк А.А. Ряды Фурье и мероморфные функции. – Издат. Львов. универ., Львов. – 1988. – 195 с.

[7] Кшановський І. Одна екстремальна задача для мероморфних у проколеній площині функцій // Вісн. Львів. ун-ту. – 2006. – Вип. 66. – С. 88–98.

[8] Khrystiyanyn A., KondratyukA. On the Nevanlinna Theory for meromorphic functions on annuli. I // Matematychni Studii 23 (2005). – P. 19-30.

[9] Kondratyuk A., Laine I. Meromorphic functions in multiply connected domains // Joensuu-L'viv. – 2006. – 116 p.

[10] Кшановський І. Аналітичні в крузі з проколеним центром функції з обмеженою неванлінновою характеристикою // Вісн. Львів. ун-ту. – 2006. – Вип. 67. – С. 166–175.

# AN TWO-PARAMETRICAL EXTREMAL PROBLEM FOR MEROMORPHIC FUNCTIONS IN A PUNCTURED PLANE

I.P. Kshanovskyy

*National University "Lvivska Politechnika"*
*12 S. Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine*

We obtain an estimate of

$$\varkappa^*(f) := \limsup_{\tau,\ r\to\infty} \frac{N(\tau,r,f)+N(\tau,r,1/f)}{T(\tau,r,f)}$$

for meromorphic functions in a punctured plane.

**Keywords:** meromorphic function, Nevanlinna characteristic, deficiency of the function, Fourier coefficients.

**2000 MSC:** 30D35

**УДК:** 517.53