

В.І. Будзан, В.М. Віннік\*, О.Й. Коцюмбас\*\*  
Національний університет “Львівська політехніка”,  
кафедра охорони праці,  
\*кафедра деталей машин,  
\*\*кафедра експлуатації та ремонту автомобільної техніки

## КІНЕМАТИЧНІ ТА СИЛОВІ СПІВВІДНОШЕННЯ У ВІДКРИТІЙ НАМОТУВАЛЬНІЙ СИСТЕМІ З КОРОМИСЛОВИМ КОМПЕНСАТОРОМ

© Будзан В.І., Віннік В.М., Коцюмбас О.Й., 2008

**Встановлені аналітичні залежності між кінематичними та силовими параметрами відкритої намотувальної системи з двома циліндричними барабанами, пружним намотувальним матеріалом і розміщеним під довільним кутом до міжосьової лінії коромисловим компенсатором. Рівняння руху елементів системи та деформації намотувального матеріалу – математична модель динамічного процесу намотування.**

**Analytical dependences are set between the kinematics and power parameters of the open winding system with two cylinder drums, resilient winding material and placed under an arbitrary corner to the inter-axial line swaying compensate. Equalization of motion of elements of the system and deformation of winding material is a mathematical model of dynamic process of winding.**

**Постановка проблеми.** Силові співвідношення в намотувальних системах, їх зв'язок з кінематичними параметрами, керованість процесу намотування — актуальні питання різних галузей промисловості: виробництва прокатного листа, дроту, обмоток електрообладнання, автомобільних шин, паперу; раціональної конструкції та експлуатації агрегатів з гнучкими тяговими органами тощо. Технологічні та конструктивні вимоги до режимів роботи намотувальних систем зумовлюють застосування різноманітних компенсаторів (поступальних, коромислових, комбінованих). Відсутність загальних теоретичних розробок і аналізу взаємозв'язку між окремими параметрами систем з компенсаторами — підстава для вивчення цих питань.

**Аналіз останніх досліджень та публікацій.** Матеріали з намотувальних систем [1, 2] переважно стосуються довгомірних об'єктів (із значними відстанями між прийомним та віддаючим барабанами) і являють собою опис схем і конструкцій без теоретичного аналізу взаємовпливу параметрів.

Математична модель короткомірної намотувальної системи з поступальним компенсатором, розроблена в [5], ще потребує подальшого аналізу, вивчення і застосування. Подібної моделі систем з коромисловим компенсатором, наскільки нам відомо, немає.

**Мета статті.** Метою роботи є одержання загальних аналітичних залежностей, що описують взаємозв'язок між геометричними, кінематичними та силовими параметрами відкритої намотувальної системи з коромисловим компенсатором.

Виклад матеріалу. Розглядається намотувальна система з провідним та веденим циліндричними барабанами і коромисловим компенсатором з циліндричною робочою поверхнею, що оснащений пружиною постійної жорсткості на кручення (рис.1). Задача цієї роботи і схема розв'язування її подібна до розглянутої в статті [5], а тому дотримуємося деяких застосованих в ній позначень та прийомів.

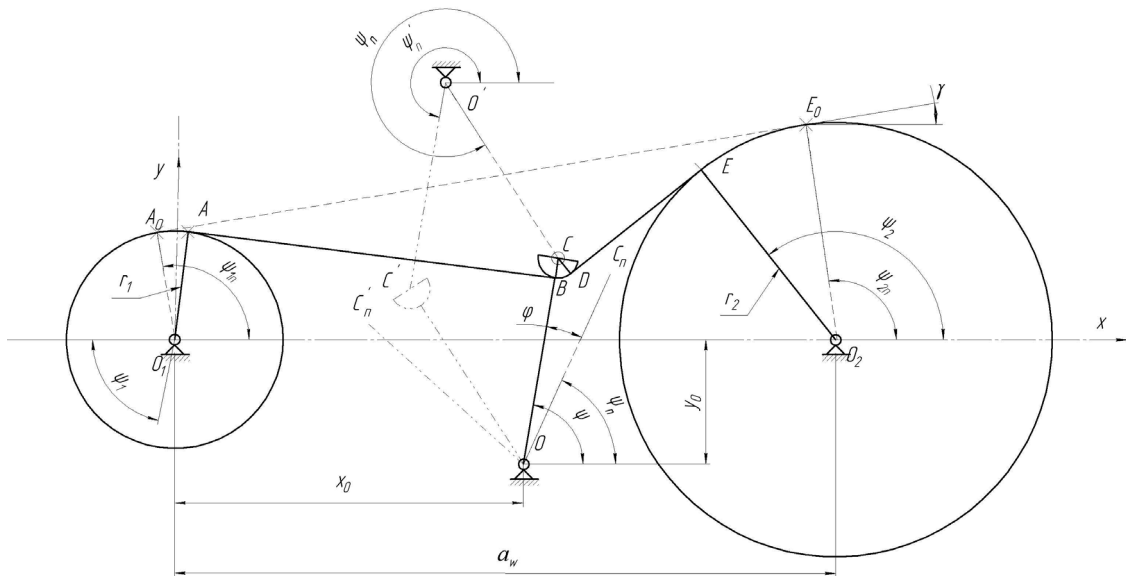


Рис. 1. Схема відкритої намотувальної системи з коромисловим компенсатором

Нехай  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_0$  — радіуси провідного та веденого барабанів та робочої поверхні компенсатора відповідно;

$\psi_1$ ,  $\psi_2$ ,  $\psi$  — поточні кути між контактними радіус-векторами барабанів і компенсатора (від шарніра  $O$  до центра робочої поверхні  $C$ ) та міжосьовою лінією;

$\alpha_w$  — міжосьова відстань між барабанами;

$x_0$ ,  $y_0$  — координати центра шарніра компенсатора  $O$  в системі з початком координат в центрі осі першого (провідного) барабана та віссю абсцис, напрямленою вздовж міжцентрової лінії;

$l_k$  — довжина коромисла (між центром шарніра  $O$  та центром робочої поверхні  $C$ );

$x_C$ ,  $y_C$  — поточні координати центра робочої поверхні компенсатора.

Останні можна подати так

$$x_C = x_0 + l_k \cos \psi, \quad (1)$$

$$y_C = y_0 + l_k \sin \psi. \quad (2)$$

Якби не було компенсатора, намотувальний матеріал був би нахилений до осі абсцис під кутом  $\gamma = \arcsin \frac{r_2 - r_1}{\alpha_w}$ , а контактні радіус-вектори — під кутами  $\psi_1 = \psi_2 = \psi_0 = \gamma + \frac{\pi}{2} = \arccos \frac{r_1 - r_2}{\alpha_w}$ .

За таких позначень геометричні параметри системи повинні відповідати залежності

$$l_k > d = |r_1 + y_0 \cos \gamma - x_0 \sin \gamma|. \quad (3)$$

Тут  $d$  — відстань від шарніра коромисла до прямої, на якій розмістився би матеріал системи без компенсатора.

Довжини ділянок матеріалу між барабанами і компенсатором після використання (1) і (2) представляються залежностями:

$$l_j^2 = (x_0 - x_j)^2 + y_0^2 + l_k^2 - (r_j + r_0)^2 + 2l_k((x_0 - x_j)\cos \psi + y_0 \sin \psi). \quad (4)$$

Тут  $j = 1; 2$  — індекси провідного та веденого барабанів відповідно;

$l_j$  — довжина матеріалу між робочою поверхнею компенсатора та точкою контакту з відповідним барабаном ( $AB$ ,  $DE$  на рис.1).

Довжина матеріалу на робочій поверхні компенсатора

$$l_3 = r_0(\psi_2 - \psi_1). \quad (5)$$

Значення кутів між віссю абсцис і контактними радіус-векторами барабанів встановлюються з геометричних співвідношень

$$\psi_j = \pi(j-1) + \arctg \frac{y_C}{x_C - x_j} + (-1)^j \arctg \frac{l_j}{r_0 + r_j}. \quad (6)$$

Значення кута між радіус-вектором коромисла і віссю абсцис виражається в формі

$$\psi = \psi_{\Pi} \pm \varphi, \quad (7)$$

де  $\psi_{\Pi}$  — значення кута радіус-вектора коромисла при запасовці намотувального матеріалу без натягу і без “слабини”, тобто початкове значення;  $\varphi$  — кут повороту коромисла.

У (7) знак залежить від того, де знаходиться центр робочої поверхні компенсатора: якщо він — справа від прямої

$$y = y_0 + (x - x_0) \operatorname{tg} \psi_0 = y_0 - (r_2 - r_1)^{-1} (\alpha_w^2 - (r_2 - r_1)^2)^{1/2} \quad (8)$$

(вона проходить через вісь коромисла перпендикулярно до лінії, яку б займав матеріал без компенсатора), то це “плюс”; якщо центр зліва від цієї прямої (на рис. 1  $C'$ ), то — “мінус”.

Беручи до уваги (3), (7) і це зауваження щодо знаків, встановлюються межі зміни кута повороту коромисла

$$0 < \varphi < \pm \left( \gamma + \frac{\pi}{2} - \psi_{\Pi} \right) - \arccos \frac{d + r_0}{l_k}, \quad (9)$$

якщо осі барабанів і коромисла знаходяться з одного боку від матеріалу, і

$$0 < \varphi < \pm \left( \gamma + \frac{3\pi}{2} - \psi_{\Pi} \right) + \arccos \frac{d - r_0}{l_k}, \quad (10)$$

якщо осі барабанів знаходяться з іншого боку від матеріалу, ніж шарнір обертання коромисла.

Розкладом (4) з урахуванням (6) та (7) в ряд Маклорена за  $\varphi$  з точністю до першого степеня одержано

$$l_j = l_{j\Pi} + \lambda_j \varphi. \quad (11)$$

Тут  $l_{j\Pi}$  — довжина ділянки матеріалу тільки при запасовці (без натягу), тобто при  $\varphi = 0$ , а

$\psi = \psi_{\Pi}$ ;  $\lambda_j$  — значення  $\frac{dl_j}{d\varphi}$  при  $\psi = \psi_{\Pi}$ .

$$l_{j\Pi} = \left( (x_0 - x_j)^2 + y_0^2 + l_k^2 + 2l_k \left( (x_0 - x_j) \cos \psi_{\Pi} + y_0 \sin \psi_{\Pi} \right) - (r_j + r_0)^2 \right)^{1/2}, \quad (12)$$

$$\lambda_j = \pm \frac{l_k}{l_{j\Pi}} \left( y_0 \cos \psi_{\Pi} - (x_0 - x_j) \sin \psi_{\Pi} \right). \quad (13)$$

Шляхом розкладу (6) в степеневий ряд знаходимо також наближені значення

$$\psi_j = \psi_{j\Pi} + \xi_j \varphi, \quad (14)$$

де  $\psi_{j\Pi}$  — значення виразу (5) при  $\varphi = 0$ ;  $\xi_j$  — значення  $\frac{d\psi}{d\varphi}$  при  $\varphi = 0$ :

$$\psi_{j\Pi} = \pi(j-1) + \arctg \frac{y_0 + l_k \sin \psi_{\Pi}}{x_0 - x_j + l_k \cos \psi_{\Pi}} + (-1)^j \arctg \frac{l_{j\Pi}}{r_j + r_0}, \quad (15)$$

$$\xi_j = \pm \frac{l_k}{l_{j\Pi}^2 + (r_j + r_0)^2} \left( l_k + (x_0 - x_j) \cos \psi_{\Pi} + y_0 \sin \psi_{\Pi} + \frac{r_j + r_0}{l_{j\Pi}} \left( y_0 \cos \psi_{\Pi} - (x_0 - x_j) \sin \psi_{\Pi} \right) \right). \quad (16)$$

Отже, довжину матеріалу на робочій поверхні компенсатора визначаємо як:

$$l_3 = (\psi_{2п} - \psi_{1п} + (\xi_2 - \xi_1)\varphi)r_0. \quad (17)$$

Тобто, геометричні параметри  $l_j$ ,  $\psi_j$ ,  $l_3$  залежностями (11), (14), (17) виражаються через розміри барабанів, координати їх центрів та початкове положення коромисла і його кут повороту.

Зв'язок між геометричними, кінематичними та силовими параметрами представляється залежностями, що описують рух елементів системи.

$$\begin{cases} T_1 - I_1 \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} - F_1 r_1 = 0, & (18) \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_k \frac{d^2\varphi}{dt^2} + m_k g l_0 \cos \psi + T_0 + c_k \psi = (F_1 \cos(\psi_1 - \psi) - F_2 \cos(\psi_2 - \psi))l_k + r_0(F_2 - F_1), & (19) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_2 r_2 - T_2 - I_2 \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} = 0. & (20) \end{cases}$$

Тут  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_k$  — моменти інерції провідного та веденого барабанів і коромисла відносно осі обертання;

$\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi$  — кути повороту барабанів та коромисла відповідно;

$t$  — час;

$F_1$ ,  $F_2$  — зусилля натягу матеріалу на ділянках  $l_1$  та  $l_2$ ;

$m_k$  — маса коромисла;

$l_0$  — відстань центра мас коромисла від осі обертання;

$g$  — прискорення земного тяжіння;

$T_0$  — момент опору повороту коромисла в опорі;

$c_k$  — коефіцієнт крутильної жорсткості пружини.

Момент від сили ваги відсутній, якщо компенсатор рухається в горизонтальній площині, як вважалося в [5], або  $m_k l_0 = 0$  (тобто центр мас розміщений найбільш раціонально — на осі обертання, а також, коли масою коромисла можна знехтувати).

Взаємозв'язок між силами  $F_1$  і  $F_2$ , як і в [5], визначимо за формулою Ейлера

$$F_1 = F_2 e^{f(\psi_2 - \psi_1)}.$$

Тут  $f$  — коефіцієнт тертя між матеріалом і робочою фрикційною поверхнею компенсатора (залежить від матеріалів: наприклад, між проводами ПЭЛ, ПЭВ і сталлю  $f = 0,21$ ; з алюмінієм  $f = 0,29$  [2]).

Якщо хвостовик коромисла виконано у формі ролика, як коефіцієнт тертя можна використати умовну величину

$$f \approx \tilde{f} = \frac{1}{\pi} \ln(\eta^{-1}),$$

де  $\eta$  — коефіцієнт корисної дії роликових систем ( $\eta = 0,92...0,94$  при встановленні ролика в підшипниках ковзання,  $\eta = 0,94...0,96$  при підшипниках кочення).

З врахуванням (14) залежність між силами  $F_1$  і  $F_2$  набуде вигляду

$$F_1 = F_2 e^{(\psi_{2п} - \psi_{1п} + (\xi_2 - \xi_1)\varphi)f} \approx F_2 e^{f(\psi_{2п} - \psi_{1п})} (1 + (\xi_2 - \xi_1)f\varphi) = F_2 v (1 + (\xi_2 - \xi_1)f\varphi), \quad (21)$$

де  $v = e^{f(\psi_{2п} - \psi_{1п})}$ .

Момент опору повороту коромисла в опорі залежить від її конструктивного виконання: при виконанні шарніра з сухим тертям (що мало ймовірно) або на підшипниках кочення він пропорційний радіальному навантаженню (22), у разі в'язкого тертя — пропорційний кутовій швидкості коромисла (23).

$$T_0 = (m_k g + |F_1 \sin(\psi_1 - \psi) + F_2 \sin(\psi - \psi_2)|) f_{\Pi} \frac{d_{\Pi}}{2} \operatorname{sign}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right), \quad (22)$$

$$T_0 = \kappa \left(\frac{d_{\Pi}}{2}\right)^2 \frac{d\varphi}{dt}, \quad (23)$$

де  $d_{\Pi}$  — діаметр цапфи підшипника;  $f_{\Pi}$  — коефіцієнт тертя ковзання в опорі або зведений коефіцієнт тертя ковзання для підшипника кочення;  $\kappa$  — коефіцієнт в'язкого тертя в опорі.

З урахуванням (7), (14), (21) рівняння руху провідного барабану і коромисла можна подати у вигляді

$$T_1 - I_1 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} - F_2 v (1 + (\xi_2 - \xi_1) f \varphi) r_1 = 0, \quad (18a)$$

$$I_k \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + m_k g l_0 (\cos \psi_{\Pi} - \varphi \sin \psi_{\Pi}) + c_k (\psi_{\Pi} + \varphi) + T_0 = F_2 l_k (a_0 + a_1 \varphi + a_2 \varphi^2). \quad (19a)$$

Тут

$$a_0 = v \cos(\psi_{1\Pi} - \psi_{\Pi}) + \frac{r_0}{l_k} (1 - v);$$

$$a_1 = v \left( (\pm 1 - \xi_1) \sin(\psi_{1\Pi} - \psi_{\Pi}) + f (\xi_2 - \xi_1) \left( \cos(\psi_{1\Pi} - \psi_{\Pi}) - \frac{r_0}{l_k} \right) \right);$$

$$a_2 = v f (\xi_2 - \xi_1) \sin(\psi_{1\Pi} - \psi_{\Pi}) (\pm 1 - \xi_1).$$

Значення моменту опору повороту знаходиться за (23) при в'язкому тертю в опорі або за залежністю

$$T_0 = f_{\Pi} \frac{d_{\Pi}}{2} \left( m_k g + F_2 |b_0 + b_1 \varphi + b_2 \varphi^2| \right) \operatorname{sign} \frac{d\varphi}{dt}, \quad (22a)$$

де

$$b_0 = v \sin(\psi_{1\Pi} - \psi_{\Pi}) - \sin(\psi_{2\Pi} - \psi_{\Pi});$$

$$b_1 = v f (\xi_2 - \xi_1) \sin(\psi_{1\Pi} - \psi_{\Pi}) + (\pm 1 - \xi_2) \cos(\psi_{2\Pi} - \psi_{\Pi});$$

$$b_2 = -v f (\xi_2 - \xi_1) \cos(\psi_{1\Pi} - \psi_{\Pi}) (\pm 1 - \xi_1),$$

якщо опора виконана в формі підшипника кочення чи сухого ковзання.

Рівнянь (18a), (19a) і (20) недостатньо, щоб повністю представити залежності між кінематичними та силовими параметрами намотувальної системи (до них входять чотири невідомі).

Для повноти математичної моделі руху використаємо диференційну форму зміни довжин ділянок матеріалу, враховуючи їхні деформації

$$r_1 d\varphi_1 - r_2 d\varphi_2 = dl_1 + dl_2 + dl_3. \quad (24)$$

Після розкриття диференціалів довжин ділянок матеріалу системи залежність має вигляд

$$r_1 d\varphi_1 - r_2 d\varphi_2 = \left( \lambda_1 + \lambda_2 + r_0 (\xi_2 - \xi_1) + \frac{F_2}{\alpha} (s_0 + s_1 \varphi + s_2 \varphi^2) + \frac{dF_2}{\alpha d\varphi} (h_0 + h_1 \varphi + h_2 \varphi^2) \right) d\varphi. \quad (25)$$

Тут  $\alpha = A \cdot E$  — жорсткість поперечного перерізу матеріалу, що намотується;

$A$  — площа поперечного перерізу матеріалу;

$E$  — модуль пружності матеріалу;

$$\begin{aligned}
s_0 &= v\lambda_1 + \lambda_2 + (\xi_2 - \xi_1)v(l_{1\Pi}f + r_0v); \\
s_1 &= 2vf(\xi_2 - \xi_1)(\lambda_1 + r_0(\xi_2 - \xi_1)); \\
s_2 &= r_0f^2(\xi_2 - \xi_1)^3; \\
h_0 &= vl_{1\Pi} + l_{2\Pi} + r_0v(\psi_{2\Pi} - \psi_{1\Pi}); \\
h_1 &= v\lambda_1 + \lambda_2 + vl_{1\Pi}f(\xi_2 - \xi_1) + r_0v(\psi_{2\Pi} - \psi_{1\Pi}); \\
h_2 &= f(\xi_2 - \xi_1)(v\lambda_1 + r_0(\xi_2 - \xi_1)).
\end{aligned}$$

Система (18а), (19а), (20), (25) загалом описує динаміку руху намотувальної установки з компенсатором. Подібно до зазначеного в [5] можна виділити три можливі етапи динамічного процесу.

1. Якби матеріал був заведений на барабани і компенсатор із “слабиною”, тобто довжина запасованого матеріалу  $L > l_{1\Pi} + l_{2\Pi} + l_{3\Pi}$ , спочатку рухається тільки провідний барабан згідно з (18а) при нульових початкових умовах:  $\varphi_1 = 0$ ,  $\frac{d\varphi_1}{dt} = 0$ ,  $F_2 = 0$  при  $t = 0$ .

У зв'язку з короткочасністю вибору “слабини” можна вважати  $T_1 = \text{const}$ , а тому в кінці етапу

$$\varphi_1 = \frac{L - (l_{1\Pi} + l_{2\Pi} + l_{3\Pi})}{r_1}, \quad (26)$$

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1 = \sqrt{\frac{2(L - (l_{1\Pi} + l_{2\Pi} + l_{3\Pi}))T_1}{r_1 I_1}}. \quad (27)$$

2. Другий етап — “завантаження” — має місце, коли намотувальний матеріал запасований “без слабину”  $L = l_{1\Pi} + l_{2\Pi} + l_{3\Pi}$ . При цьому рухається провідний барабан і повертається коромисло компенсатора, а ведений барабан не рухається, доки зусилля  $F_2$  не досягне величини, здатної долати момент опору на веденому барабані, тобто  $F_2 \leq \frac{T_2}{r_2}$ .

Рівняння (18а), (19а) і (25) розв'язуються при нульових початкових умовах за відсутності першого етапу або при (26), (27) і  $\varphi = 0$  за його наявності.

Кінцеві значення параметрів  $\varphi_1$ ,  $\varphi$ ,  $\frac{d\varphi_1}{dt}$ ,  $\frac{d\varphi}{dt}$  знаходяться з умови  $F_2 = \frac{T_2}{r_2}$ . Ці значення є початковими для руху всієї системи.

3. Рух всієї системи описується всіма залежностями (18а), (19а), (20), (25).

Ця сукупність рівнянь розв'язується за початкових умов  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi = 0$ ;  $\frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} = 0$  при  $t = 0$ ,  $\psi = \psi_{\Pi}$  і при статичному завантаженні, тобто без першого та другого етапів. Очевидно, це найраціональніша форма запуску намотувальної системи.

При динамічному завантаженні (наявності другого або першого та другого етапів) початковими умовами є:  $\varphi_2 = 0$ ,  $\frac{d\varphi_2}{dt} = 0$  при  $t = 0$ , а також значення параметрів  $\varphi_1$ ;  $\frac{d\varphi_1}{dt}$ ;  $\varphi$ ;

$\frac{d\varphi}{dt}$ , знайдені за умови кінцевих параметрів при зростанні  $F_2$  до величини  $\frac{T_2}{r_2}$ .

Одержані залежності досить складні, нелінійні, якісний аналіз взаємозв'язків нелегкий. Проте позитив результатів полягає в загальності постановки задачі, що створює можливість спрощувати цю математичну модель залежно від конструктивних втілень параметрів.

**Висновки.** Створено математичну модель динаміки відкритої намотувальної системи з двома циліндричними барабанами і довільно розміщеним відносно барабанів коромисловим компенсатором, оснащеним пружиною з довільною крутильною жорсткістю. Врахована податливість намотувального матеріалу.

Геометричні параметри представлені у формі лінеаризованих залежностей від кута повороту коромисла компенсатора.

Диференційні рівняння руху складових намотувальної установки пов'язують між собою кінематичні, геометричні та силові параметри системи. Загальна форма постановки задачі створює можливості для поглибленого аналізу процесу намотування.

1. Скороходов Е. А. *Намоточные станки. Технология электромашиностроения. Выпуск 9.* — М.: Энергия, 1970. — 175 с. 2. Билибин К.И., Духанин А.М., Скороходов Е.А. *Намоточные работы в производстве элементов электроавтоматики.* — М.: Энергия, 1972. — 216 с. 3. Устройство для регулирования натяжения длинномерного материала: А.с. 569517 СССР ГКИО. Р. В. Матковский, С.В. Романов, В.Н. Винник, С.И. Крефцун, В.И. Чигирев, И.С. Лозовой. Заявлено 03.05.75 (21); опубликовано 25.08.77. Бюл. № 31 — 3с. 4. Будзан В. І. Обґрунтування параметрів натяжної частини експериментальної установки для дослідження відкритої намотувальної системи з компенсатором // Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка” “Динаміка, міцність та проектування машин і приладів”. — 2001. — № 434. — С. 10–16. 5. Віннік В.М., Будзан В.І., Коцюмбас О.Й. Кінематичні та силові співвідношення в намотувальній системі з поступальним підпружиненим компенсатором // Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка” “Автоматизація виробничих процесів в машинобудуванні та приладобудуванні”. — 2008. — № 42.