ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.625 № 625, (2008) с. 43–47

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
"LVIVSKA POLITECHNIKA"
"Physical & mathematical sciences"
Vol.625 No 625, (2008) 43–47

НУЛІ І КОЕФІЦІЄНТИ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

І.В. Андрусяк

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 14 вересня 2008 р.)

Досліджено зв'язок між коефіцієнтами степеневого розвинення та нулями аналітичної функції.

Ключові слова: степеневий ряд, аналітична функція, ціла функція, максимум модуля, центральний індекс, максимальний член, лічильна функція.

2000 MSC: 30D20

УДК: 517.53

Вступ

Позначимо через Ω клас опуклих на $(-\infty;+\infty)$ функцій Φ таких, що $\frac{\Phi(x)}{x}\to+\infty$.

Нехай $0<R\le+\infty$, $D_R=\{z:|z|<R\}$ і степеневий ряд

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n \tag{1}$$

має радіус збіжності $R_{зб}=R$, тобто функція f є аналітичною в D_R.

Для функції f і кожного $r\in(0;R)$ нехай:

$M_f(r)=\max\{|f(r)|:|z|=r\}$ — максимум модуля функції f;

$\mu_f(r)=\max\{|a_n|r^n:n\ge0\}$ — максимальний член ряду (1);

$\nu_f(r)=\max\{n\ge0:|a_n|r^n=\mu_f(r)\}$ — центральний індекс ряду (1).

Через A_R, де $R\in(0,+\infty]$, позначимо клас аналітичних в крузі $\{z:\ |z|<R\}$ функцій вигляду (1), для яких $R_{зб}=R$ і $\nu_f(r)\nearrow+\infty$, $r\nearrow R$. Ясно, що A_∞ — клас трансцендентних цілих функцій.

У разі, коли функція $f\in A_R$ має в крузі $\{z:|z|<R\}$ безліч a-точок, їх послідовність, занумеровану у порядку неспадання модулів, позначатимемо $(z_n(a))_{n=0}^{\infty}$. Вважатимемо, що $z_n=z_n(0), n\in\mathbb{Z}_+$. Як відомо, $|z_n(a)|\nearrow R, n\to\infty$.

В [1] доведено, що якщо f — ціла функція, яка має безліч нулів, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|z_n|\sqrt[n]{|a_n|}\ge1, \tag{2}$$

і встановлено точність цієї оцінки: існує ціла функція така, що (2) перетворюється у рівність.

Однак, якщо функція $f\in A_\infty$ зростає доволі повільно, то (2) можна уточнити. Справедлива така теорема:

Теорема 1. *(i) Якщо для функції $f\in A_\infty$ виконується*

$$\ln\mu_f(r)=O(\ln^2r),\quad r\to+\infty, \tag{3}$$

то для кожного $a\in\mathbb{C}$ справедлива рівність

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|z_{n-1}(a)|\sqrt[n]{|a_n|}=+\infty. \tag{4}$$

(ii) Для кожної функції $\Phi\in\Omega$ такої, що

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\,\frac{\Phi(x)}{x^2}=+\infty,$$

існує функція $f\in A_\infty$ така, що $\ln\mu_f(r)\le\Phi(\ln r)$, $r\ge r_0$, і для кожного $a\in\mathbb{C}$ справедлива рівність

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|z_{n-1}(a)|\sqrt[n]{|a_n|}=1. \tag{5}$$

Твердження (ii) показує, що умову (3) в твердженні (i) не можна послабити.

Твердження (i) теореми 1 випливає з такої теореми.

Теорема 2. *Якщо функція $f\in A_\infty$ має безліч a-точок, то*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|z_{n-1}(a)|\sqrt[n]{|a_n|}\ge e^{\underline{\lim}_{r\to\infty}\frac{\ln\mu_f(r)}{\nu_f(r)}}. \tag{6}$$

Нехай тепер f — довільна аналітична в одиничному крузі функція, яка має безліч a-точок. Тоді $|z_{n-1}(a)|\to1$, $n\to\infty$, і $\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=1$. Тому

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|z_{n-1}(a)|\sqrt[n]{|a_n|}=1.$$

З огляду на те, що

$$|z_{n-1}(a)|\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{\sqrt[n]{|a_n|}}{\frac{1}{|z_{n-1}(a)|}};\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\ln\sqrt[n]{|a_n|}=0;$$

$$\ln\frac{1}{|z_{n-1}(a)|}\sim1-|z_{n-1}(a)|\to0,\quad n\to\infty,$$

досліджуватимемо можливі значення невизначеності

$$G_f(a):=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{\ln\sqrt[n]{|a_n|}}{\ln\frac{1}{|z_{n-1}(a)|}}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{\ln|a_n|}{n(1-|z_{n-1}|)}$$

залежно від зростання аналітичної в одиничному крузі функції f.

Ясно, що якщо коефіцієнти $|a_n| \leq 1$, то справедлива нерівність $G_f(a) \leq 0$.

Для функції $f \in A_1$ нехай

$$\rho_f = \overline{\lim_{r \uparrow 1}} \frac{\ln \mu_f(r)}{\ln \frac{1}{1-r}}.$$

Справедлива така теорема.

Теорема 3. *(i) Якщо функція $f \in A_1$ має безліч a-точок і $\rho_f = \infty$, то $G_f(a) \geq 1$.*

(ii) Існує функція $f \in A_1$ з $\rho_f = \infty$ така, що $G_f(a) = 1$ для усіх $a \in \mathbb{C}$.

Твердження (i) теореми 3 випливає з такої теореми.

Теорема 4. *Якщо функція $f \in A_1$ має безліч a-точок, то*

$$G_f(a) \geq \frac{\rho_f}{\rho_f + 1}. \tag{7}$$

I. Допоміжні результати

Добре відомим є таке твердження (див., наприклад, [2, с. 195–199]).

Лема 1. *Якщо $R > 0$, то для кожної функції $f \in A_R$ існують зростаюча послідовність невід'ємних цілих чисел $(n_k)_{k=0}^{\infty}$ та додатна зростаюча до R послідовність $(c_k)_{k=0}^{\infty}$ такі, що*

$$\nu_f(r) = n_0, \quad r \in (0, c_0); \tag{8}$$

$$\nu_f(r) = n_{k+1}, \quad r \in (c_k, c_{k+1}), \ k \in \mathbb{Z}_+. \tag{9}$$

Перша з послідовностей є послідовністю значень, а друга – послідовністю точок стрибка центрального індексу $\nu_f(r)$.

Використовуючи лему 1, нескладно встановити такі співвідношення:

$$\nu_f(r) = r(\ln \mu_f(r))'_+, \quad r \in (0, R); \tag{10}$$

$$\min\{n \in \mathbb{Z}_+ : a_n \neq 0\} = n_0; \tag{11}$$

$$|a_{n_k}| c_k^{n_k} = |a_{n_{k+1}}| c_k^{n_{k+1}}, \quad k \in \mathbb{Z}_+; \tag{12}$$

$$|a_n| c_k^n \leq |a_{n_k}| c_k^{n_k}, \quad n \in (n_k; n_{k+1}), k \in \mathbb{Z}_+. \tag{13}$$

З іншого боку, справедливим є таке твердження [3].

Лема 2. *Нехай $R > 0$ і для ряду (1) існують зростаюча послідовність невід'ємних цілих чисел $(n_k)_{k=0}^{\infty}$ та додатна зростаюча до R послідовність $(c_k)_{k=0}^{\infty}$ такі, що справджуються співвідношення (11), (12) і (13). Тоді цей ряд задає аналітичну функцію $f \in A_R$, для якої виконуються рівності (8) та (9).*

Для $r \in (0, R)$ через $n_f(r, a)$ позначимо лічильну функцію a-точок аналітичної функції $f \in A_R$, а через $N_f(r, a)$ – неванліннову характеристику розподілу a-точок:

$$N_f(r, a) = \int_0^r \frac{n_f(t, a) - n_f(0, a)}{t} dt + n_f(0, a) \ln r.$$

Приймаємо, що $n_f(r) = n_f(r, 0)$, $N_f(r) = N_f(r, 0)$. За формулою Єнсена (див., наприклад, [4, с. 24])

$$N_f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\theta})| d\theta - \ln |a_{n_0}|. \tag{14}$$

II. Доведення теорем

□ *Доведення теореми 1.* Твердження (i) випливає з теореми 2, доведеної нижче. Доведемо твердження (ii).

Нехай $\Psi(x) = \frac{1}{2}\Phi(x)$ і $\psi(x) = \Psi'_+(x)$. Тоді $\Psi \in \Omega$ і

$$\overline{\lim_{x \to \infty}} \frac{\Psi(x)}{x^2} = +\infty. \tag{15}$$

Оскільки функція Ψ – опукла, то ψ – неспадна на $(-\infty; +\infty)$ функція, а тому

$$\Phi(x) - \Phi(0) = \int_0^x \psi(t) dt \leq x\psi(x).$$

Звідси і з (15) отримаємо

$$\overline{\lim_{x \to \infty}} \frac{\psi(x)}{x} = +\infty. \tag{16}$$

Візьмемо зростаючу послідовність невід'ємних цілих чисел (n_k). Виберемо згідно з (16) зростаючу до $+\infty$ послідовність (c_k) так, щоб $c_0 = 1$,

$$[\psi(\ln c_{k-1})] < [\psi(\ln c_k)], \quad \frac{[\psi(\ln c_k)]}{[\psi(\ln c_{k-1})] \ln c_k} \to +\infty,$$

$$k \to +\infty,$$

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} \to +\infty, \ k \to +\infty,$$

$$x_k := \left(\frac{(1+\varepsilon)c_k}{c_{k+1}} \right)^{n_{k+2} - n_{k+1}} < \frac{1}{4}.$$

Нехай $n_0 = 0$; для кожного $k \geq 0$ покладемо $n_{k+1} = [\psi(\ln c_k)]$.

Приймемо $a_0 = a_{n_0} = 1$, і нехай

$$a_{n_{k+1}} = \prod_{j=0}^{k} \frac{1}{c_j^{n_{j+1} - n_j}}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Якщо для деякого $n \geq 0$ величина a_n ще не визначена, то приймемо $a_n = 0$.

Розглянемо степеневий ряд з таким визначеними коефіцієнтами a_n :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{j=0}^{\infty} a_{n_j} z^{n_j}.$$

За лемою 2 цей ряд задає цілу функцію f, для якої справедливі рівності (8) та (9). Покажемо, що для побудованої функції f виконується рівність (5).

Зафіксуємо довільне число $\varepsilon > 0$. Оскільки $\frac{c_{k+1}}{c_k} \to +\infty$, $k \to +\infty$, то $(1+\varepsilon)c_k \in [c_k, c_{k+1})$, $k \geq k_0$. Оскільки $n_k = o(n_{k+1})$, $k \to \infty$, то $n_{k+1} \geq 2n_k$, $k \geq k_0$, тому

$$n_{k+1} - n_k \geq n_{k+1} - \frac{1}{2}n_{k+1} = \frac{1}{2}n_{k+1} \geq \frac{1}{2}(k+1).$$

Отже

$$\sum_{j \leq k} a_{n_j}((1+\varepsilon)c_k)^{n_j} \leq (k+1)a_{n_k}(1+\varepsilon)^{n_k}c_k^{n_k} =$$

$$= (k+1)(1+\varepsilon)^{n_k}a_{n_{k+1}}c_k^{n_{k+1}} =$$

$$= a_{n_{k+1}}((1+\varepsilon)c_k)^{n_{k+1}}(k+1)(1+\varepsilon)^{n_k-n_{k+1}} =$$

$$= \frac{k+1}{(1+\varepsilon)^{n_{k+1}-n_k}}\mu_f((1+\varepsilon)c_k) <$$

$$< \frac{k+1}{(1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}(k+1)}}\mu_f((1+\varepsilon)c_k) = o(\mu_f((1+\varepsilon)c_k)).$$

Далі

$$\sum_{j \geq k+2} a_{n_j}((1+\varepsilon)c_k)^{n_j} =$$

$$= a_{n_{k+1}}((1+\varepsilon)c_k)^{n_{k+1}} \sum_{j \geq k+2} \frac{a_{n_j}}{a_{n_{k+1}}}((1+\varepsilon)c_k)^{n_j-n_{k+1}} \leq$$

$$\leq \mu_f((1+\varepsilon)c_k) \sum_{j \geq k+2} \left(\frac{(1+\varepsilon)c_k}{c_{k+1}}\right)^{n_j-n_{k+1}} \leq$$

$$\leq \mu_f((1+\varepsilon)c_k) \left(\frac{(1+\varepsilon)c_k}{c_{k+1}}\right)^{n_{k+2}-n_{k+1}} < \frac{1}{4}\mu_f((1+\varepsilon)c_k).$$

З отриманих оцінок на колі $\{z : |z| = (1+\varepsilon)c_k\}$ правильне твердження

$$|f(z) - a - a_{n_{k+1}}z^{n_{k+1}}| < |a_{n_{k+1}}z^{n_{k+1}}|, \quad k \geq k_0(a).$$

За теоремою Руше в крузі $\{z : |z| \leq (1+\varepsilon)c_k\}$ при $k \geq k_0(a)$ функція f має n_{k+1} a-точок, причому

$$|z_{n_{k+1}-1}(a)| \leq (1+\varepsilon)c_k.$$

Тоді

$$\varlimsup_{n\to\infty} |z_{n-1}(a)| \sqrt[n]{|a_n|} = \varlimsup_{k\to\infty} |z_{n_{k+1}-1}(a)| \sqrt[n_{k+1}]{|a_{n_{k+1}}|} \leq$$

$$\leq \varlimsup_{k\to\infty} (1+\varepsilon)c_k \sqrt[n_{k+1}]{\frac{1}{c_0^{n_1-n_0}\ldots c_k^{n_{k+1}-n_k}}} \leq$$

$$\leq (1+\varepsilon)c_k \sqrt[n_{k+1}]{\frac{1}{c_k^{n_{k+1}-n_k}}} =$$

$$= (1+\varepsilon)c_k^{\frac{n_k}{n_{k+1}}} = (1+\varepsilon)e^{\frac{n_k \ln c_k}{n_{k+1}}} \to (1+\varepsilon), \ k \to \infty,$$

звідки завдяки довільності ε отримаємо рівність (5). ■

□ *Доведення теореми 2.* Вважаємо, не зменшуючи загальності, що $a = 0$.

Нехай ціла функція $f \in A$ має безліч нулів. Доведемо, що для f виконується (6).

Нехай $q < 1$ – довільне число, (n_k) – зростаюча послідовність усіх значень $\nu_f(r)$.

Припустимо, що

$$|z_{n_k-1}| \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \leq qe^{\frac{\ln\mu_f(c_{k-1})}{n_k}}, \quad k \geq k_0. \tag{17}$$

Тоді за лемою 1 з (17) матимемо

$$|z_{n_k-1}| \leq q(\mu_f(c_{k-1}))^{\frac{1}{n_k}}|a_{n_k}|^{-\frac{1}{n_k}} =$$

$$= q(|a_{n_k}|c_{k-1}^{n_k})^{\frac{1}{n_k}}|a_{n_k}|^{-\frac{1}{n_k}} = qc_{k-1},$$

тобто

$$n_k \leq n_f(qc_{k-1}), \quad k \geq k_0.$$

Отже, для усіх $k \geq k_0$:

$$N_f(qc_k) - N_f(qc_{k_0-1}) = \int_{qc_{k_0-1}}^{qc_k} \frac{n_f(t)}{t}dt =$$

$$= \int_{qc_{k-1}}^{qc_k} \frac{n_f(t)}{t}dt + \ldots + \int_{qc_{k_0-1}}^{qc_{k_0}} \frac{n_f(t)}{t}dt \geq$$

$$\geq n_k \ln\frac{c_k}{c_{k-1}} + \ldots + n_{k_0}\ln\frac{c_{k_0}}{c_{k_0-1}} = \int_{c_{k_0-1}}^{c_k} \frac{\nu_f(t)}{t}dt =$$

$$= \ln\mu_f(c_k) - \ln\mu_f(c_{k_0-1}),$$

звідки, враховуючи формулу Єнсена, отримаємо

$$\varliminf_{k\to\infty} (\ln M_f(qc_k) - \ln\mu_f(c_k)) > -\infty,$$

що суперечить класичній теоремі Валірона, за якою для кожного фіксованого $q < 1$ виконується співвідношення

$$\frac{M_f(qr)}{\mu_f(r)} \to 0, \quad r \to +\infty.$$

Отже, нерівність (17) не виконується, а тому

$$\varlimsup_{n\to\infty} |z_{n-1}(a)| \sqrt[n]{|a_n|} \geq e^{\varliminf\limits_{r\to\infty} \frac{\ln\mu_f(r)}{\nu_f(r)}},$$

що і потрібно було довести. ■

□ *Доведення теореми 3.* Твердження (i) випливає з теореми 4, доведеної нижче. Наведемо доведення твердження (ii).

Для кожного $k \geq 0$ виберемо послідовності (c_k), (r_k) в такий спосіб:

$$c_k = 1 - \frac{1}{2k+2}, \quad r_k = 1 - \frac{1}{2k+3}.$$

Нехай (n_k) – зростаюча послідовність цілих чисел така, що $n_0 = 0$, і для кожного $k \geq 0$ виконуються умови

$$\frac{n_{k+1}}{\frac{1}{1-c_k}\ln\frac{1}{1-c_k}} \to \infty, \ k \to \infty, \quad \frac{n_{k-1}}{n_k(1-r_k)} \to 0, \ k \to \infty. \tag{18}$$

$$x_k := (k+1)\left(\frac{c_k}{r_k}\right)^{n_{k+1}-n_k} < \frac{1}{3}, \qquad y_k := \left(\frac{r_k}{c_{k+1}}\right)^{n_{k+2}-n_{k+1}} < \frac{1}{4}. \tag{19}$$

Візьмемо $a_0{=}a_{n_0}{=}1$ і нехай $a_{n_{k+1}}{=}\prod\limits_{j=0}^{k}\frac{1}{c_j^{n_{j+1}-n_j}}$, $k \geq 0$. Якщо для деякого $n \geq 0$ величина a_n ще не визначена, то покладемо $a_n = 0$.

Розглянемо степеневий ряд з такими визначеними коефіцієнтами a_n :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n_k} z^{n_k}.$$

За лемою 2 цей ряд задає аналітичну в одиничному крузі функцію, для якої

$$\nu_f(r) = n_{k+1}, \quad \mu_f(r) = a_{n_{k+1}} r^{n_{k+1}}, \quad r \in [c_k, c_{k+1}), k \geq 0. \tag{20}$$

Покажемо, що для побудованої функції f справджується твердження теореми.

Зафіксуємо $k \geq 0$. Нехай $r_k \in [c_k, c_{k+1})$. Використовуючи (19) і (20), отримаємо

$$\sum_{p\geq k+2} a_{n_p} r_k^{n_p} = a_{n_{k+1}} r_k^{n_{k+1}} \sum_{p\geq k+2} \frac{a_{n_p}}{a_{n_{k+1}}} r_k^{n_p - n_{k+1}} \leq$$

$$\leq \mu_f(r_k) \sum_{p\geq k+2} \left(\frac{r_k}{c_{k+1}}\right)^{n_p - n_{k+1}} \leq$$

$$\leq \mu_f(r_k) \sum_{p\geq k+2} \left(\frac{r_k}{c_{k+1}}\right)^{(p-k+1)(n_{k+2}-n_{k+1})} =$$

$$= \mu_f(r_k)\frac{y_k}{1-y_k} < \mu_f(r_k)\frac{1/4}{1-1/4} = \frac{1}{3}\mu_f(r_k). \tag{21}$$

Оскільки для $r \in [c_k, c_{k+1})$ виконується співвідношення

$$a_{n_0} r^{n_0} \leq a_{n_1} r^{n_1} \leq \ldots \leq a_{n_k} r^{n_k} \leq a_{n_{k+1}} r^{n_{k+1}},$$

то матимемо

$$\sum_{p\leq k} a_{n_p} r_k^{n_p} \leq (k+1) a_{n_k} r_k^{n_k} =$$

$$= (k+1)\frac{a_{n_k}}{a_{n_{k+1}}} r_k^{n_k - n_{k+1}} a_{n_{k+1}} r_k^{n_{k+1}} =$$

$$= \mu_f(r_k)(k{+}1)\left(\frac{c_k}{r_k}\right)^{n_{k+1}-n_k} {=} \mu_f(r_k) x_k < \frac{1}{3}\mu_f(r_k). \tag{22}$$

Розглянемо функції

$$h(z) = a_{n_{k+1}} z^{n_{k+1}} \quad \text{і} \quad g(z) = \sum_{p\neq k+1} a_{n_p} z^{n_p}.$$

Згідно з (21) і (22) на колі $C_k = \{z : \ |z| = r_k\}$ виконується оцінка

$$|g(z) - a| < \mu_f(r_k) = |h(z)|, \quad k \geq k_0(a).$$

Тому за теоремою Руше функція $f(z) - a = h(z) + g(z) - a$ має всередині кола C_k стільки ж нулів, як і функція $h(z)$, тобто n_{k+1}. Отже, f має безліч a-точок, причому

$$|z_{n_k}(a)| \leq |z_{n_{k+1}-1}(a)| < r_k, \quad k \geq k_0(a).$$

Враховуючи це, а також (18) і нерівності $c_k{\geq}2$, $k \geq 0$, матимемо

$$\frac{\ln|a_{n_k}|}{n_k(1-|z_{n_k}|)} \leq \frac{\ln|a_{n_k}|}{n_k(1-r_k)} =$$

$$= \frac{-(n_1-n_0)\ln c_0 - \ldots - (n_k - n_{k-1})\ln c_{k-1}}{n_k(1-r_k)} <$$

$$< \frac{(n_1-n_0)\ln 2 + \ldots + (n_{k-1}-n_{k-2})\ln 2}{n_k(1-r_k)} +$$

$$+ (1+o(1))\frac{(n_k - n_{k-1})\ln c_{k-1}}{n_k \ln r_k} =$$

$$= \frac{(n_{k-1}-n_0)\ln 2}{n_k(1-r_k)} {+} (1{+}o(1))\frac{\ln c_{k-1}}{\ln r_k} \to 1, k{\to}{+}\infty. \quad \blacksquare$$

$\square$ *Доведення теореми 4.* Нехай функція $f \in A_1$ має безліч a-точок. Доведемо, що для f виконується (7). Не зменшуючи загальності, вважаємо, що $a = 0$. Твердження теореми очевидне у випадку $\rho_f = 0$, тому надалі нехай $\rho_f > 0$. Ясно, що у цьому випадку

$$\mu_f(r) \uparrow +\infty, \quad r \uparrow 1. \tag{23}$$

Припустимо від супротивного, що твердження теореми неправильне, тобто існує число $\rho \in (0, \rho_f)$, для якого $G_f(0) < \frac{\rho}{\rho+1}$. Нехай $p = \frac{\rho+1}{\rho}$. Тоді з нерівності $G_f(0) < \frac{1}{p}$ та співвідношення (23) для усіх $k > k_0$ отримаємо

$$|z_{n_k - 1}| \leq |a_{n_k}|^{-\frac{p}{n_k}} = (|a_{n_k}| c_{k-1}^{n_k})^{-\frac{p}{n_k}} c_{k-1}^p =$$

$$= (\mu_f(c_{k-1}))^{-\frac{p}{n_k}} c_{k-1}^p \leq c_{k-1}^p.$$

Отже

$$n_k \leq n_f(c_{k-1}^p), \quad k > k_0. \tag{24}$$

Нехай $r \in [c_{k_0}, 1)$, $r \in [c_{k-1}, c_k)$, де $k > k_0$. Враховуючи (24) і (10), отримаємо

$$N_f(r^p) - N(c_{k_0}^p) = \int\limits_{c_{k_0}^p}^{r^p} \frac{n_f(t)}{t} dt =$$

$$= \int\limits_{c_{k_0}^p}^{c_{k_0+1}^p} \frac{n_f(t)}{t} dt + \ldots + \int\limits_{c_{k-1}^p}^{r^p} \frac{n_f(t)}{t} dt \geq$$

$$\geq n_f(c_{k_0}^p) \ln \frac{c_{k_0+1}^p}{c_{k_0}^p} + \ldots + n_f(c_{k-1}^p) \ln \frac{r^p}{c_{k-1}^p} \geq$$

$$\geq p\left(n_{k_0+1} \ln \frac{c_{k_0+1}}{c_{k_0}} + \ldots + n_k \ln \frac{r}{c_{k-1}}\right) =$$

$$= p \int\limits_{c_{k_0}}^{r} \frac{\nu_f(t)}{t} dt = p(\ln \mu_f(r) - \ln \mu(c_{k_0})).$$

Звідси і з формули Єнсена (14) випливає існування сталої $A > 0$ такої, що

$$\ln M_f(r^p) \geq p \ln \mu_f(r) - A, \quad r \geq c_{k_0}. \tag{25}$$

Але

$$M_f(r^p) \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^{pn} \leq \mu_f(r) \sum_{n=0}^{\infty} r^{(p-1)n} =$$

$$= \mu_f(r) \frac{1}{1 - r^{p-1}},$$

звідки з урахуванням (25) отримаємо

$$\ln \mu_f(r) \leq \frac{1}{p-1} \left(\ln \frac{1}{1 - r^{p-1}} + A \right), \quad r \geq c_{k_0},$$

тобто $\rho_f \leq \frac{1}{p-1} = \rho$. Суперечність, яка й доводить правильність теореми. ■

Література

[1] Пельчарська І.В., Шеремета М.М. Про розподіл значень і коефіцієнти степеневого розвинення цілої функції // Доповіді НАН України. – 2005. – № 5. – С.21–25.

[2] Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. – М.: Гостехтеоретиздат. – 1956. – 632 с.

[3] Filevych P.V. On the slow growth of power series convergent in the unit disk // Mat. studii. – 2001. – V.16, No.2. – P.217–221.

[4] Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука. – 1970. – 592 с.

ZEROS AND COEFFICIENTS OF ANALYTIC FUNCTIONS

I.V. Andrusyak

National University "Lvivska Politechnika"
12 S. Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine

A connection between coefficients of power expansion and the zeros of an analytic function is investigated.

Keywords: power series, analytic function, entire function, maximum modulus, central index, maximal term, counting function.

2000 MSC: 30D20

УДК: 517.53