

# МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

УДК 621.01:621-868

І.А. ВІКОВИЧ

Національний університет “Львівська політехніка”

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ КІНЕМАТИЧНО ЗБУРЕНИХ КОЛИВАНЬ ШТАНГИ ОПРИСКУВАЧА З ПРУЖИННИМИ В’ЯЗЯМИ

Ї Вікович І.А., 2008

*Розроблено математичну модель кінематично збудених згинних коливань консольно закріпленого дірчастого тупикового трубопроводу з пружними зв’язками з урахуванням нелінійного закону пружності та розсіяння енергії в матеріалі.*

*The article deals with mathematical modal of kinematically excited bending oscillations of fixed holey dead-ended pipelined with resilient connections taking into consideration non-linear law of resiliency and dissipation of energy in the material.*

**Вступ.** Дослідженню коливальних процесів у трубопроводах з рухомою рідиною чи газом, а також вивчення параметричних коливань трубопроводів було приділено значну увагу і опубліковано багато робіт. Найповніший аналіз таких досліджень зроблено у роботі [5].

Сьогодні відсутні роботи, які пов’язані з дослідженням кінематично збудених дірчастих трубопроводів. Є окремі роботи, пов’язані з розрахунком дірчастих трубопроводів, які застосовують в дощувальних машинах. Дощувальні машини – це переважно нерухомі установки стаціонарної дії, в яких відсутнє кінематичне збудення. Спеціальні машини – мобільні штангові обприскувачі мають дірчасті трубопроводи, які прикріплені до фермової двоконсольної конструкції начіпної штанги.

Начіпна штанга разом з трубопроводом піддається кінематичному збуденню, зумовленому нерівностями опорної поверхні під час руху штангового обприскувача.

Отже, розрахунок кінематично збудених дірчастих тупикових трубопроводів є сьогодні актуальним і разом з тим достатньо складним завданням.

На практиці трубопроводи розраховують за технічною теорією стрижнів. Оскільки трубопровід начіпної штанги обприскувача виготовлений з пластмасових труб, то під час його розрахунку доцільно врахувати нелінійний закон пружності матеріалу [2].

**Виклад основного матеріалу.** У зв’язку з тим, що трубопровід у вигляді консолей під’єднаний до начіпної штанги обприскувача, то під час його руху, внаслідок нерівностей опорної поверхні, начіпна штанга разом з трубопроводом здійснює вертикальні і кутові коливання.

Ураховуючи симетрію фермової двоконсольної конструкції начіпної штанги обприскувача з під’єднанням до неї за допомогою пружних зв’язків дірчастого тупикового трубопроводу з рухомою рідиною, можна, у першому наближенні, з достатньою для практики точністю, змодельювати цю начіпну штангу з трубопроводом у вигляді консолі з її вертикальним  $w_{0t}(t)$  і кутовим  $\theta_0(t)$  кінематичним збуденням.

На рис. 1. показано розрахункову схему кінематично збуреного консольно закріпленого пружно під'єднаного дірчастого тупикового трубопроводу начіпної штанги обприскувача з рухомою рідиною.

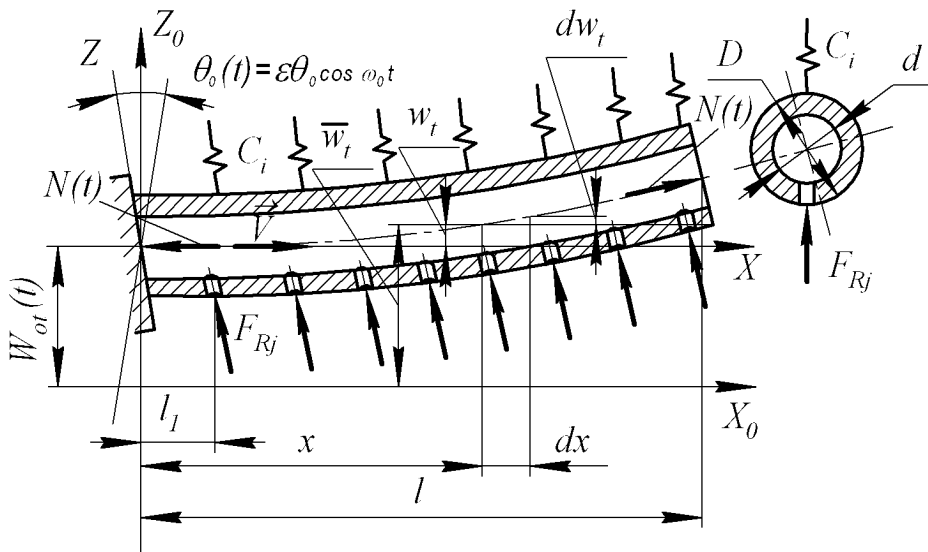


Рис. 1. Розрахункова схема кінематично збуреного консольно закріпленого дірчастого тупикового трубопроводу з пружними зв'язками

Консольно закріплений дірчастий тупиковий трубопровід під'єднаний за допомогою рівномірно розподілених пружних зв'язків  $C_i$  до фермово-решітчастої конструкції начіпної штанги обприскувача (рис. 1). У дірчастий тупиковий трубопровід з ємності обприскувача насосом подається під тиском  $P(x,t)$  у декілька атмосфер рідина, яка рухається в трубопроводі зі швидкістю  $V(x,t)$  і яка витікає через нижні отвори, створюючи реактивні пульсуючі сили  $F_{RK}$  з відповідною частотою пульсації, яка близька до частоти  $\omega$  кінематично збурених коливань консольно закріпленого трубопроводу.

Виберемо нерухому систему координат  $x_0, y_0, z_0$  так, щоб у стані спокою поздовжня вісь трубопроводу довжиною  $l$  збігалася з віссю  $x_0$ .

Для складання диференціального рівняння згинних коливань кінематично збуреного консольно закріпленого дірчастого тупикового трубопроводу і пружно під'єднаного до фермової конструкції начіпної штанги мобільного обприскувача скористаємось принципом Даламбера.

Розглянемо сили, які впливають на поступальне поперечне переміщення на умовно вирізаний елемент трубопроводу (рис. 2) довжиною  $dx$ : поперечні сили  $Q$  і  $Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx$ ; інтенсивність сил інерції  $q_i = \rho_t F_t \frac{\partial^2 W_t}{\partial t^2} + \rho_p F_p \frac{d^2 W_t}{dt^2}$ , де  $q_i = \rho_t F_t \frac{\partial^2 W_t}{\partial t^2} + \rho_p F_p \frac{d^2 W_t}{dt^2}$ ,  $\frac{d}{dt}$  і  $\frac{d^2}{dt^2}$  – символи першої і другої повних похідних за часом  $t$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial t} = V(t) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t},$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + 2 \frac{dx}{dt} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{d}{dx} \frac{d^2 x}{dt^2} =$$

$$= V^2(t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2V(t) \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{dV(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial x};$$

$\rho_t$  і  $\rho_p$  – густина матеріалу трубопроводу і рідини;  $F_t = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$  і  $F_p = \frac{\pi d^2}{4}$  – площі поперечних перерізів трубної оболонки і просвіту труби,  $D$  і  $d$  – зовнішній і внутрішній діаметри трубопроводу; розтягувальні зусилля  $N(t) = \frac{\pi d^2}{4} \rho(x, t)$ , які виникають в тупиковому трубопроводі внаслідок внутрішнього змінного тиску  $p(x, t)$  в ньому.

$$\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \overleftrightarrow{\Phi} \frac{\partial^2 w_t(x, t)}{\partial x^2} \right]; \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left[ \overleftrightarrow{\Psi} \frac{\partial^3 w_t(x, t)}{\partial x \partial t^2} \right]; \sigma = H(\varepsilon_x)$$

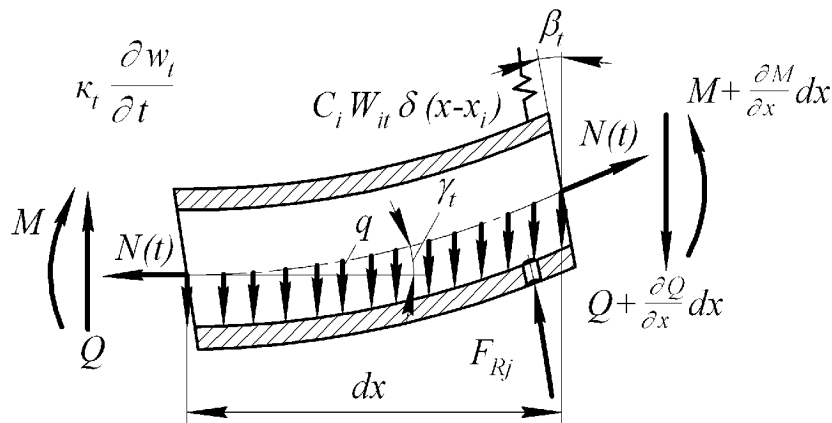


Рис. 2. Схема сил, які діють на виділений елемент дірчастого трубопроводу з пружним зв'язком

Сумарне переміщення перерізів елементів трубопроводу  $\bar{w}_t(x, t)$  з урахуванням вертикального  $w_{0t}(t)$  і кутового  $\theta_{0t}(t)$  кінематичного збурень консольно закріпленого кінця трубопроводу запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \bar{w}_t(x, t) &= w_{0t}(t) + \theta_{0t}(t) + w_t(x, t); \\ w_{0t}(t) &= \varepsilon w_{0t} \cos \omega_0 t; \quad \theta_{0t}(t) = \varepsilon \theta_{0t} x \cos \omega_0 t, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $\bar{w}_t(x, t)$  – переміщення поперечних перерізів елементів трубопроводу, під час згинних коливань, з абсцисою  $x$  в момент часу  $t$ ,  $\varepsilon$  – малий параметр;  $\omega_0$  – частота кінематичного збурення трубопроводу.

Використовуючи умову рівноваги згинальних моментів, які діють на виділений елемент трубопроводу, і прирівнюючи суму проєкцій на вертикальну вісь  $z$  усіх сил, які прикладені до елемента  $dx$  трубопроводу, а також інтенсивність сил інерції  $\bar{q}_i$ , одержимо

$$\begin{aligned} Q - Q - \frac{\partial Q}{\partial x} dx - \bar{q}_i dx - N dx \sin \alpha_1 + N dx \sin \alpha_2 + \\ + c_i w_{it} dx (x - x_i) - F_j dx (x - x_j) - k_t \frac{\partial \bar{w}_t}{\partial t} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

де  $k_t$  – коефіцієнт зовнішнього загасання трубопроводу;  $\sin \theta_1 \approx \operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\partial w_t}{\partial x}$ ;

$$\sin \theta_2 \approx \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{\partial w_t}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_t}{\partial x^2} dx.$$

З рівняння (2) маємо

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = N \frac{\partial^2 w_t}{\partial x^2} - \bar{q}_i + c_i w_i d(x - x_i) + k_t \frac{\partial \bar{w}_t}{\partial t} + c_i w_i d(x - x_i) - F_j d(x - x_i). \tag{3}$$

Для виведення згинних коливань трубопроводу використаємо диференціальну залежність між поперечною силою і згинальним моментом

$$Q = \frac{\partial M}{\partial x}, \tag{4}$$

а також і те, що згинальний момент  $M(x,t)$  і наближення значення кривизни  $\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}$ , з

урахуванням фізичної  $\Phi(w_i)$  та геометричної  $\Phi(\lambda_i, w_i)$  нелінійностей, пов'язані залежністю [7]

$$M(x,t) = E_t I_t(x) \frac{\partial^2 w_t(x,t)}{\partial x^2} + e\Phi \left[ \frac{\partial^2 w_t(x,t)}{\partial x^2} \right] + \left( \frac{\partial^2 w_t(x,t)}{\partial x^2} \right)^3 \tag{5}$$

де  $e\Phi \left[ \frac{\partial^2 w_t(x,t)}{\partial x^2} \right]$  – функціонал, що враховує розсіяння енергії в циклічно деформованому матеріалі трубопроводу внаслідок дії нормальних і дотичних напружень.

Підставляючи у рівняння (2) відповідно вирази інтенсивності сил інерції  $\bar{q}_i$  з урахуванням сумарного переміщення елементів трубопроводу з рухомою рідиною  $\bar{w}_t(x,t)$  та кута  $q_0(t)$  повороту трубопроводу, який входить у це сумарне переміщення; поздовжньої сили  $N(t) = \frac{\pi d^2}{4} p(x,t)$ , символів повної похідної  $\frac{d^2}{dt}$  та рівняння (5) одержимо нелінійне диференціальне рівняння, яке описує згинні коливання консольно закріпленого кінематично збуреного тупикового дірчастого трубопроводу у вигляді

$$\begin{aligned} & E_t J_{yt} \frac{\partial^4 w_t}{\partial x^4} + \rho_p F_p \left\{ V^2(x,t) \frac{\partial^2 w_t}{\partial x^2} + 2V(x,t) \frac{\partial^2 \bar{w}_t}{\partial x \partial t} + \left[ \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (V^2(x,t)) \right] \frac{\partial w_t}{\partial x} \right\} + [0,1] \\ & + (\rho_t F_t + \rho_p F_p) \frac{\partial^2 \bar{w}_t}{\partial t^2} + \frac{\pi d^2}{4} p(x,t) \frac{\partial^2 w_t}{\partial x^2} + k_t \frac{\partial \bar{w}_t}{\partial t} + \\ & + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \Phi \frac{\partial^2 w_t(x,t)}{\partial x^2} \right] + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left[ \Psi \frac{\partial^3 w_t(x,t)}{\partial x \partial t^2} \right] \\ & + \varepsilon E_t J_{yt} \lambda_t \left[ \frac{\partial^2 w_t}{\partial x^4} \frac{\partial^2 w_t}{\partial x^2} + 2 \left( \frac{\partial^3 w_t}{\partial x^3} \right)^2 \right] \cdot \frac{\partial^2 w_t}{\partial x^2} - \sum_{i=1}^n \varepsilon c_i (w - w_t) \delta(x - x_i) = \\ & = \sum_{j=1}^k \varepsilon F_{RK} \sin \omega t \cdot \delta(x - x_j), \end{aligned} \tag{6}$$

в якому враховано взаємозв'язок пружного під'єднання трубопроводу до фермово-решітчастої конструкції, швидкість рідини в трубопроводі, дію зосереджених реактивних сил  $F_{RK}$ , зумовлених витканням рідини з дірчастого трубопроводу, нелінійний закон пружності матеріалу трубопроводу,

розсіяння енергії в матеріалі трубопроводу та зовнішнє загасання, де  $E_t J_t$  – жорсткість трубної оболонки трубопроводу при згині,  $r_p$ ,  $r_t$  і  $F_p$ ,  $F_t$  – густини і площі поперечних перерізів просвіту труби та самої трубної оболонки відповідно,  $v(x,t)$  і  $p(x,t)$  – змінна швидкість руху рідини і змінний тиск у трубопроводі,  $d$  – внутрішній діаметр труби,  $k_t$  – коефіцієнт, що враховує втрати,  $w$  – частота пульсуючих реактивних сил.

Параметр  $I_t$  враховує відхилення нелінійного закону пружності матеріалу трубопроводу від закону Гука [2], а малий параметр  $\epsilon$  вказує на незначне відхилення від лінійного закону,

$$\lambda_t = 3a_0 \cdot E_t \frac{J_{yt0}}{J_{yt}}, \quad a_0 = -\frac{2}{9} \cdot \frac{3k_t}{3k_t + G_t}; \quad G_t = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu E_t}{1 + \mu}; \quad k_t = \frac{1}{3} \cdot \frac{\mu E_t}{\mu - 2}; \quad J_{yt0} = \iint_{F_t} z^4 dydz, \quad k_t - \text{модуль}$$

стиску,  $G_t$  – модуль зсуву матеріалу трубопроводу,  $m$  – число Пуассона,  $J_{t0}$  – осьовий момент інерції площі поперечного перерізу трубної оболонки.

Величини реактивних сил  $F_r$ , що виникають у разі витікання струменя із отворів чи розпилювачів, розміщених на трубопроводі, визначимо із закону збереження кількості руху.

$$d[mV_v(x,t)] = F_R dt \quad d[mV_v(x,t)] = F_R dt, \quad (7)$$

де  $m$  – маса рідини одного струменя,  $V_v$  – швидкість витікання струменя рідини з отвору дірчастого тупикового трубопроводу;  $t$  – час.

Швидкість витікання рідини з отвору, на основі рівняння Бернуллі, визначають за формулою

$$V_v = \sqrt{\frac{2g}{g_p} p(x,t) + g_p h} \quad V_v = \sqrt{\frac{2g}{g_p} p(x,t) + g_p h}, \quad (8)$$

де  $g$  – пришвидшення земного тяжіння;  $g_p$  – питома вага рідини;  $p(x,t)$  – тиск у трубопроводі;  $h$  – висота рівня рідини над отвором.

Інтегруючи рівняння (7), одержимо

$$\frac{mV_v}{t} = F_R. \quad (9)$$

Ураховуючи, що

$$\frac{m}{t} = \frac{Q_0 \gamma_p}{g},$$

де витрата рідини з одного отвору трубопроводу  $Q_0 = \frac{\pi d^2}{4} V$ ,  $d_0$  – діаметр отвору в дірчастому трубопроводі та нехтуючи, із-за малості, у (8) величиною  $h$  визначаємо реактивну силу струменя, зумовлену витіканням рідини з одного отвору дірчастого тупикового трубопроводу

$$F_{Rj} = \frac{\pi d_0^2}{2} p(x,t). \quad (10)$$

Величини реактивних сил  $F_r$ , що виникають у разі витікання струменя із отворів чи розпилювачів, розміщених на трубопроводі, можна також визначити із рівнянь руху змінної маси Мещерського.

Необхідно відзначити, що швидкість руху рідини у дірчастому тупиковому трубопроводі визначається залежністю

$$v(x,t) = \frac{Q_p}{F_p} \left( \frac{x_j}{l} \right)^{n_j} + \frac{Q_{p0}}{F_p}, \quad (j=1,2,3..k) \quad (11)$$

де  $Q_p$  і  $Q_{p0}$  – витрата рідини по всій довжині трубопроводу і на його початку,  $n_j$  – показник степеня, який характеризує витрати під час витікання рідини (визначається експериментально).

Вводячи в диференціальне рівняння (6) відносні координати  $\xi = x/l$  та функціонали (5), можна подати його у вигляді

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^4 w_t}{l^4 \partial \xi^4} + b_1 \left\{ V^2(l\xi, t) \frac{\partial^2 w_t}{l^2 \partial \xi^2} + 2V(l\xi, t) \frac{\partial^2 w_t}{l \partial \xi \partial t} + \varepsilon \left[ \frac{\partial V(l\xi, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} (V^2(l\xi, t)) \right] \frac{\partial w_t}{l \partial \xi} \right\} + \\ & + b_2 \frac{\partial^2 w_t}{\partial t^2} + b_3 p(l\xi, t) \frac{\partial^2 w_t}{l^2 \partial \xi^2} + b_4 \frac{\partial w_t}{\partial t} + b_5 \left[ \frac{\partial^2}{l^2 \partial \xi^2} \varepsilon \Phi(w_t) + \frac{\partial}{l \partial \xi} \varepsilon \Psi(w_t) \right] + \\ & + b_6 \varepsilon \left[ \frac{\partial^4 w_t}{l^4 \partial \xi^4} \frac{\partial^2 w_t}{l^2 \partial \xi^2} + 2 \left( \frac{\partial^3 w_t}{l^3 \partial \xi^3} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 w_t}{l^2 \partial \xi^2} - b_7 \sum_{i=1}^n \varepsilon c_i (w - w_t) \delta l (\xi - \xi_i) = \\ & = b_7 \sum_{j=1}^k \varepsilon F_{RK} \sin \omega t \cdot \delta l (\xi - \xi_j) + \varepsilon b_7 \omega_0 \{ (\rho_t F_t + \rho_p F_p) \omega_0 \times \\ & \times (W_0 + \theta_0 x) \sin \omega_0 t - [2\rho_p F_p V(l\xi, t) \theta_0 + K_T (W_0 + \theta_0 x)] \cos \omega_0 t \}, \end{aligned} \right. \quad (12)$$

де

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{l}; \quad b_1 = \frac{\rho_p F_p}{E_t J_{yt}}; \quad b_2 = \frac{\rho_t F_t + \rho_p F_p}{E_t J_{yt}}; \quad b_3 = \frac{\pi R^2}{E_t J_{yt}}; \quad b_4 = \frac{K_T}{E_t J_{yt}}; \\ b_5 &= \frac{1}{E_t J_{yt}}; \quad b_6 = \lambda_i; \quad b_7 = \frac{1}{E_t J_{yt}}. \end{aligned}$$

Граничні умови інтегрування рівнянь (12) мають вигляд

$$\begin{aligned} [W_t(\xi l, t)]_{\xi=0} &= 0; \quad \left[ \frac{\partial W_t(\xi l, t)}{l \partial \xi} \right]_{\xi=0} = 0; \\ \left[ E_t J_{yt} \frac{\partial^2 W_t(\xi l, t)}{l^2 \partial \xi^2} \right]_{\xi=l} &= 0; \quad \left[ E_t J_{yt} \frac{\partial^3 W_t(\xi l, t)}{l^3 \partial \xi^3} \right]_{\xi=l} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Отже, рівняння (12) з граничними умовами (13) описують коливальний процес у кінематично збуреному за гармонічним законом, консольно закріпленому дірчастому трубопроводі з пружними зв'язками.

Відомо, що велике практичне значення має знаходження нижчих власних частот і форм коливань конструкцій. Тому, як вважають переважна більшість дослідників, для параметрів, далеких від критичних, для наближених оцінок трубопроводів можна використовувати формулу [5]

$$\omega_j = \sqrt{\frac{E_t I_t \left( \frac{\pi}{L} \right)^4 - [N + F_p P + \rho_p F_p V_c^2] \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 + c_t}{\rho_t F_t + \rho_p F_p}}, \quad (14)$$

де  $\omega_j$  – власні частоти трубопроводу;  $P_c$  і  $V_c$  – середні значення тиску і швидкості руху рідини в трубопроводі;  $c_t$  – жорсткість одиниці довжини пружної основи трубопроводу.

**Аналіз результатів досліджень.** На рис. 3 показано залежності частот коливань тупикового трубопроводу начіпної штанги обприскувача від довжини  $l$  трубопроводу, середнього тиску  $P_c$  в ньому та від внутрішнього радіуса  $r$  трубопроводу, які побудовано під час підрахунку частот за формулою (14)

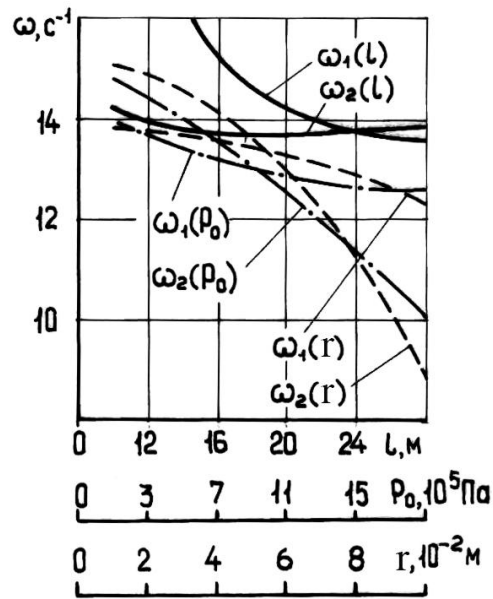


Рис. 3. Залежності частот коливань трубопроводу від довжини, тиску і внутрішнього радіуса труби

Розрахунки показують, що збільшення розмірів трубопроводу (діаметрів, довжин) і тиску в ньому понижує їхні власні частоти.

На рис. 4 показано коливання крайньої і середньої точок трубопроводу під час виконання технологічного процесу обприскування.

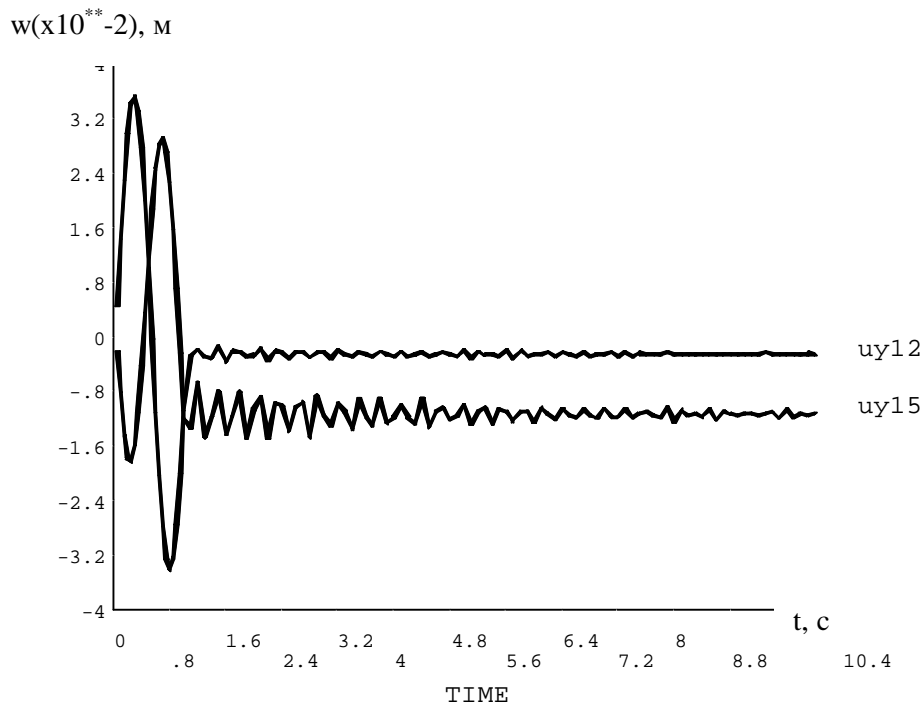


Рис. 4. Характер коливального процесу крайньої і середньої точок трубопроводу початкової штанги обприскувача під час експлуатації

Крайову задачу (12), (13) розв'язано числовим методом за допомогою комп'ютерної програми ANSYS, результати яких показано на рис. 4. Аналітичне розв'язування цієї крайової задачі, навіть, наближеними методами не уявляється можливим через складність вказаної крайової задачі, пов'язаної із врахуванням розсіяння енергії в матеріалі, а також із врахуванням нелінійного закону пружності матеріалу трубопроводу.

**Висновки.** Отже, запропонована математична модель згинних коливань консольно закріпленого дірчастого тупикового трубопроводу дає змогу виконувати аналіз коливальних процесів, які виникають у мобільних штангових обприскувачах, враховувати їх під час проектування цих машин, вибирати при цьому оптимальні геометричні та жорсткісні параметри функціональних елементів, а саме начіпних штанг обприскувачів.

1. Доценко П.Д. *Некоторые результаты исследований собственных колебаний прямолинейных трубопроводов с жидкостью* // Прикладная механика. – 1979. – Т. 15, № 1. – С. 69–75. 2. Каудерер Г. *Нелинейная механика*. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961. – 777 с. 3. Мухин О.Н. *Динамический критерий устойчивости трубопровода с протекающей жидкостью* // Изд. АН СССР Механика. – 1965. – № 3. – С. 154–155. 4. Овчинников В.Ф. *Параметрические колебания трубопровода с учетом нелинейной связи движений трубки и жидкости* // Динамика упругих и твердых тел взаимодействующих с жидкостью / Под ред. И.М. Василина. – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1981. – С. 140–148. 5. Овчинников В.Ф., Смирнов Л.В. *Динамические свойства трубопровода с движущейся жидкостью* // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Физика и техника ядерных реакторов. – М., 1981. – Вып. 6 (19). – С. 6–16. 6. Овчинников В.Ф., Смирнов Л.В. *Параметрическая неустойчивость прямого трубопровода при резонансных колебаниях жидкости* // Динамика систем, несущих подвижную распределенную нагрузку: Темат. сб. трудов. – Харьков, 1982. – Вып 3. – С. 67–76. 7. Писаренко Г.С. *Обобщенная нелинейная модель учета рассеяния энергии при колебаниях*. – К.: Наук. думка, 1985. – 235 с.