

УДК 528.21/22

Н.П. Ярема

Національний університет “Львівська політехніка”

ОЦІНЮВАННЯ ЧАСОВИХ ВАРІАЦІЙ АСТРОНОМІЧНИХ ТА ГЕОДЕЗИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ ЗЕМЛІ

© Ярема Н.П., 2007

Виконано моделювання системи фундаментальних параметрів Землі на основі сучасних геодезичних та астрономічних даних в часі. Для розв’язання цієї задачі виконано аналіз сучасних фундаментальних параметрів геодезії, астрономії та геодинаміки. Оцінено вікові варіації основних астрономіко-геодезичних параметрів планети.

The paper is devoted to the modelling of the Earth’s fundamental parameters using recent geodetic and astronomical data in time. The analysis of modern determinations of fundamental parameters of geodesy, astronomy, and geodynamics have led to the development of new closed expressions and the corresponding approach of their adjustment. The secular variations of basic astro-geodetic parameters were estimated.

Постановка проблеми та її зв’язок з науковими завданнями. Протягом останнього десятиліття вікова варіація в зональному гармонічному коефіцієнті другого порядку $\overset{\&}{C}_{20}$ стала одним з найстабільніше визначених параметрів, який потребує особливого дослідження за рахунок його можливого впливу на деякі астрономічні та геодезичні параметри Землі. Саме з цього погляду досліджувались одержані в GFZ Potsdam [8] часові ряди тримісячних визначень коефіцієнтів $\bar{C}_{20}(t), \bar{S}_{22}(t)$ за даними CHAMP (жовтень 2000 р. – червень 2003 р.) і місячні значення $\bar{C}_{20}(t)$ за даними оброблення GRACE (квітень 2002 р. – листопад 2003 р.).

Основний виклад матеріалу. Після приведення $\bar{C}_{20}(t), \bar{S}_{22}(t)$ у систему головних осей інерції є можливість безпосереднього вивчення варіацій лише двох коефіцієнтів $\bar{A}_{20}(t)$ і $\bar{A}_{22}(t)$, що демонструє рис.1. Оскільки величини $\bar{C}_{20}(t)$ та $\bar{A}_{20}(t)$ відрізняються дуже мало, то на рис. 1 ми використали саме позначення $\bar{C}_{20}(t)$, враховуючи наявність лише $\bar{C}_{20}(t)$ у разі GRACE.

Обчислення вікової варіації $\overset{\&}{C}_{20} \approx \overset{\&}{A}_{20}$ було виконано на основі сумісного оброблення часових рядів $\bar{C}_{20}(t)$ CHAMP і GRACE. У розв’язуванні цієї задачі істотну роль відіграють значно більші похибки визначення $\bar{C}_{20}(t)$ на початку місій CHAMP і GRACE, ніж в кінці 2003, які зменшуються приблизно в три рази. Отримане за всіма даними $\overset{\&}{C}_{20} = (1.86 \pm 3.3) \cdot 10^{-11} \text{ рік}^{-1}$ перевищує загальноприйняте значення в ~ 1.6 раза, що швидше за все пояснюється порівняно коротким періодом часових наборів $\bar{C}_{20}(t)$, визначених за даними супутників CHAMP і GRACE. Точність визначення вікової варіації $\overset{\&}{A}_{22}$ (дані CHAMP) на порядок більша, ніж сама $\overset{\&}{A}_{22}$, що відповідає загальноприйнятій світовій ситуації простого вибору $\overset{\&}{A}_{22} = 0$.

Найстабільніші результати були отримані при обчисленні розташування головних осей інерції Землі, що подано на рис. 2 для довгот осей $A(t)$ та $C(t)$ у вигляді функцій часу t . Виявлена незмінність положення довготи осі $A(t)$ з часом (рис. 2) має особливе значення для побудови теорії обертання планети, оскільки відповідний параметр “тривісності планети” $I_A = 14.9289^\circ \text{W}$ включається в сучасні теорії нутації твердої і нетвердої Землі [5,10].

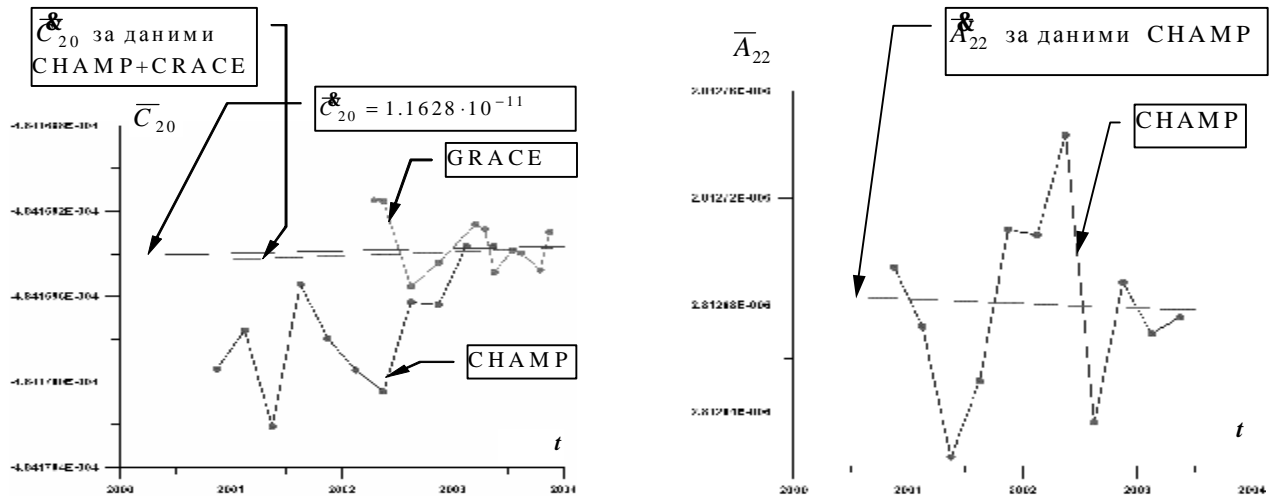


Рис. 1. Залежні від часу значення $\bar{C}_{20}(t) \approx \bar{A}_{20}(t)$ і $\bar{A}_{22}(t)$ та їхні вікові варіації

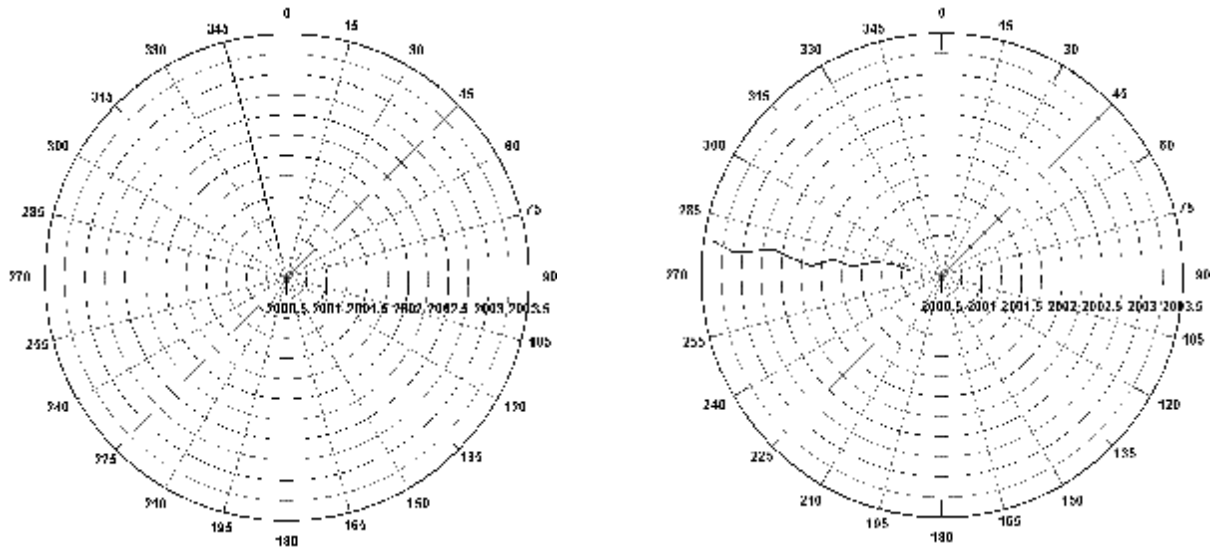


Рис. 2. Довгота осі $A(t)$ (лівий рисунок) та довгота осі $C(t)$ (правий рисунок) інерції Землі як функції часу t за даними місії CHAMP

Отже, дослідження не дали будь-якого покращання у визначенні \dot{C}_{20} і, фактично, привели до вибору $\dot{A}_{22} = 0$ та рекомендованого $\dot{C}_{20} \approx \dot{A}_{20} = 1.1628 \cdot 10^{-11} \text{ рік}^{-1}$, як оптимального значення. Приймаючи його як вихідне, обчислимо відповідні до геодезичних параметрів вікові варіації, ілюструючи їхні зміни лише як функції $\dot{C}_{20} \approx \dot{A}_{20}$ за додатковою умовою

$$\text{Trace}(\mathbf{J}) = \text{const} \Rightarrow dA = dB = -dC / 2, \tag{1}$$

збереження сліду тензора інерції Землі [9], що відповідає “незмінності фігури тіла обертання у разі дії зональних сил” та неприпливній варіації dC у полярному моменті інерції C , яка розглядається тільки як функція \dot{C}_{20} [12]:

$$dC = \dot{C}_{20}(t - t_0) = -\left(2\sqrt{5}\dot{A}_{20} / 3\right) \cdot (t - t_0), \quad \left(\dot{C}_{20} = -\frac{2\sqrt{5}\dot{A}_{20}}{3}\right). \tag{2}$$

Отже, за аналогією з відомою моделлю для гармонічного коефіцієнта другого степеня $\bar{dA}_{20} = \dot{A}_{20}(t - t_0)$ будемо розуміти під віковими варіаціями параметрів, що розглядаються, такі лінійні моделі загального вигляду

$$dF(t) = \dot{F}(t - t_0), \quad (3)$$

де $\dot{F} = \frac{dF(t)}{dt}$ – похідна функції $F(t)$ за часом t , t_0 – початкова епоха. Вікову варіацію \dot{H}_D динамічного стиснення H_D будемо шукати з додатковою умовою (1) або рівнянням $dA = dB = -dC/2$. Враховуючи тепер співвідношення (1) і (2), неважко отримати

$$\dot{H}_D = -\sqrt{5} \frac{\dot{A}_{20}}{3C_0^2} \text{Trace}(\mathbf{J}) \approx -\sqrt{5} \frac{\dot{A}_{20}}{3C_0^2} \text{Trace}(\mathbf{J}), \quad \text{Trace}(\mathbf{J}) = A_0 + B_0 + C_0. \quad (4)$$

де A_0, B_0, C_0 – моменти інерції планети на прийнятту епоху t_0 (напр. $-t_0=2000$).

Під тією самою умовою (1) збереження сліду тензора інерції і з точністю до малих величин першого порядку знайдені вікові зміни: \dot{p}_A – у постійній прецесії p_A ; \dot{f} – у полярному стисненні f Землі; $(\dot{a}, \dot{b}, \dot{g})$ – у функціях (a, b, g) головних моментів інерції, що використовують у динамічних рівняннях Ейлера [5]. У табл.1 подано формули і числові значення відповідних оцінок.

Зауважимо, що крім параметрів \dot{g} і \dot{p}_A всі інші вікові зміни мають порядок варіації \dot{A}_{20} (табл.1). Знайдене \dot{p}_A добре збігається з величиною в 0.014 ["/рік²], яка згідно з дослідженнями [11] 1994р. відповідає внеску близько 0.7% “класичного прискорення, індукованого рухом екліптики”, і з цієї причини цей ефект був включений у вікову складову теорії прецесії.

Враховуючи відомий зв'язок елементів тензора інерції планети з розподілом густини її надр, використаємо нижче отриману в попередньому розділі систему узгоджених астрономо-геодезичних параметрів для побудови відповідного тривимірного розподілу густини Землі, акцентуючи увагу на оцінюванні точності результатів розв'язання такої задачі. Зупинимось для цього на методі моментів, що був розвинутий, переважно в роботах проф. Г.А. Мещерякова [2,3], та будемо обмежуватися лише стоксовими сталими нульового та другого степенів. Згідно з [3] розглянемо подання густини еліпсоїдальної планети у такій формі:

$$d(r, J, l) = d(r, J, l) - \sum_{i=1}^k h_i q_i (r - r_i), \quad (5)$$

де

$$\tilde{d}(r, J, l) = K + F + r^2 (K_1 \sin^2 J \cos^2 l + K_2 \sin^2 J \sin^2 l + K_3 \cos^2 J + G), \quad (6)$$

$$K = \frac{5}{4} d_m [5 - 7(I_{200} + I_{020} + I_{002} / c^2)], \quad (7)$$

$$K_1 = \frac{35}{4} d_m (3I_{200} + I_{020} + I_{002} / c^2 - 1), \quad (8)$$

$$K_2 = \frac{35}{4} d_m (I_{200} + 3I_{020} + I_{002} / c^2 - 1), \quad (9)$$

$$K_3 = \frac{35}{4} d_m (I_{200} + I_{020} + 3I_{002} / c^2 - 1), \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} F &= \sum_{i=1}^k h_i f_i, & f_i &= \frac{5}{4} [5(1 - r_i^3) - \frac{21}{5}(1 - r_i^5)], \\ G &= \sum_{i=1}^k h_i g_i, & g_i &= \frac{35}{4} r_i^3 (1 - r_i^2), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

а d_m – середня густина Землі, $c=1-f$ подане через стиснення f земного еліпсоїда, (r, J, I) – узагальнені сферичні координати ($0 \leq r \leq 1$; $0 \leq J \leq p$; $0 \leq I \leq 2p$), нульовий меридіан починається з меридіану $I_0=14.9289^\circ W$ найменшого моменту інерції A , h_i – стрибки густини на безрозмірних глибинах r_i ($i=1,2,\dots,k$), θ_i – стандартна розривна функція (або функція Хевісайда [4])

$$q_i(r - r_i) = \begin{cases} 0 \Rightarrow r < r_i \\ 1 \Rightarrow r > r_i \end{cases} \quad (12)$$

Зазначимо, що динамічні параметри Землі (7)–(10) є вираженими через так звані безрозмірні степеневі моменти густини:

Таблиця 1

Вікова варіація в зональному гармонічному коефіцієнті $\bar{A}_{20} \approx \bar{C}_{20}$ та відповідні варіації у деяких астрономічних та геодезичних параметрах

Параметр	Вираз для варіації	Значення похідної $\dot{}$
$\bar{A}_{20} \approx \bar{C}_{20}$	$d\bar{A}_{20} = \dot{\bar{A}}_{20}(t-t_0)$	$\dot{\bar{A}}_{20} = 1.1628 \cdot 10^{-11}$ [1/рік]
H_D	$dH_D = \left[-\sqrt{5} \dot{\bar{A}}_{20} \frac{\text{Trace}(\mathbf{J})}{3C_0^2} \right] (t-t_0)$	$\dot{H}_D = -7.8453 \cdot 10^{-11}$ [1/рік]
p_A	$dp_A = \left[\dot{H}_D / \frac{dH_D}{dp_A} \right] (t-t_0)$	$\dot{p}_A = -0.01208$ ["/су ²]
A	$dA = \left[\frac{\sqrt{5} \dot{\bar{A}}_{20}}{3} \right] (t-t_0)$	$\dot{A} = 0.8667 \cdot 10^{-11}$ [1/рік]
B	$dB = \left[\frac{\sqrt{5} \dot{\bar{A}}_{20}}{3} \right] (t-t_0)$	$\dot{B} = 0.8667 \cdot 10^{-11}$ [1/рік]
C	$dC = \left[-\frac{2\sqrt{5} \dot{\bar{A}}_{20}}{3} \right] (t-t_0)$	$\dot{C} = -1.7334 \cdot 10^{-11}$ [1/рік]
$a = \frac{C-B}{A}$	$da = \left[-\frac{\sqrt{5} \dot{\bar{A}}_{20} (C_0 - B_0 + 3A_0)}{3A_0^2} \right] (t-t_0)$	$\dot{a} = -7.8970 \cdot 10^{-11}$ [1/рік]
$b = \frac{C-A}{B}$	$db = \left[-\frac{\sqrt{5} \dot{\bar{A}}_{20} (C_0 - A_0 + 3B_0)}{3B_0^2} \right] (t-t_0)$	$\dot{b} = -7.8968 \cdot 10^{-11}$ [1/рік]
$g = \frac{B-A}{C}$	$dg = \left[\frac{\sqrt{5} \dot{\bar{A}}_{20} (B_0 - A_0)}{3C_0^2} \right] (t-t_0)$	$\dot{g} = 5.7552 \cdot 10^{-16}$ [1/рік]
f	$df = \left[-\frac{3\sqrt{5} \dot{\bar{A}}_{20}}{2} \right] (t-t_0)$	$\dot{f} = -3.9001 \cdot 10^{-11}$ [1/рік]

$$I_{pqr}(d) = \frac{1}{Ma^n} \int_t d \cdot x^p y^q z^r dt, \quad (p+q+r=n), \quad (13)$$

які при $n=2$ мають простий зв'язок з головними моментами інерції планети

$$I_{200} = \frac{B+C-A}{2}, \quad I_{020} = \frac{A-B+C}{2}, \quad I_{002} = \frac{A+B-C}{2}. \quad (14)$$

або, згідно з повністю нормованими стоксовими сталими $\bar{A}_{20}, \bar{A}_{22}$ другого порядку, трансформованими в систему координат \overline{OABC} :

$$\left. \begin{aligned} A &= \sqrt{5}\bar{A}_{20} \left(1 - \frac{1}{H_D} \right) - \frac{\sqrt{15}}{3} \bar{A}_{22}, \\ B &= \sqrt{5}\bar{A}_{20} \left(1 - \frac{1}{H_D} \right) + \frac{\sqrt{15}}{3} \bar{A}_{22}, \\ C &= -\frac{\sqrt{5}\bar{A}_{20}}{H_D}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Крім того, інваріантна характеристика тензора інерції \mathbf{J} планети відносно лінійних перетворень системи координат може бути подана у вигляді

$$\text{Trace}(\mathbf{J}) = 2(I_{200} + I_{020} + I_{002}) = A + B + C. \quad (16)$$

Згідно з [2] одновимірний розподіл густини еліпсоїдальної Землі, відповідний до (5), будується усередненням (5) за (J, I) у формі

$$d(r) = K + F + r^2(D + G) - \sum_{i=1}^k h_i q_i(r - r_i), \quad (17)$$

в якій

$$D = \frac{35}{12} d_m \left[5 \left(I_{200} + I_{020} + \frac{I_{002}}{c^2} \right) - 3 \right]. \quad (18)$$

Тривимірний розподіл густини Землі є також залежним від стоксової сталої $\bar{A}_{20}(t)$, а використання у (6) лінійної моделі $\bar{A}_{20}(t) = \bar{A}_{20} + \dot{\bar{A}}_{20}(t - t_0)$ буде вносити відповідні корекції можливих просторово-часових варіацій розподілу густини через вибраний її тривимірний розподіл. При оцінюванні такої вікової зміни густини нагадаємо, що співвідношення (6) задовольняє умову збереження загальної маси Землі M або середньої густини d_m . Однак, звертаючись до табл. 1, зауважимо, що вікова зміна у полярному стисненні призводить до його зменшення з часом і можливої варіації значення d_m . Використовуючи умову $M = \text{const}$, відповідна умова $d_m = \text{const}$ може бути отримана лише при зміні великої півосі $a = a(t)$ двовісного земного еліпсоїда як функції часу t за таким правилом:

$$a(t) = \frac{a_0}{\sqrt[3]{(1 - df)/(1 - f_0)}}, \quad \dot{\bar{A}}_{20} = \frac{\sqrt{5} a_0 \dot{\bar{A}}_{20}}{2(1 - f_0)}, \quad (19)$$

де f_0 – стиснення на початкову епоху t_0 , df – його варіація згідно з табл. 1, a_0 – велика піввісь на епоху t_0 , $\dot{\bar{A}}_{20}$ – вікова зміна a , яка зменшується за умови $d_m = \text{const}$ близько – 8 мм за століття. Отже, знайдені зміни параметрів земного еліпсоїда зберігають його фігуру. З іншого боку, розглянуті варіації геометрії еліпсоїда становлять дуже малі величини на межі сучасної точності їхнього визначення, за рахунок чого нижче розглядається лише випадок їхньої фіксації $d_m = \text{const}$ і $\dot{\bar{A}}_{20} = 0$ ($a = \text{const}$), $\dot{\bar{A}}_{20} = 0$ ($f = \text{const}$), що не впливає на якісну картину досліджуваних просторово-часових варіацій густини.

Розглядаючи тепер, з урахуванням останніх умов, залежність від часу у виразах (6) – (10) і (18), отримаємо після простих алгебраїчних перетворень такі часові варіації в динамічних параметрах K , D , K_1 , K_2 і K_3 , як функції варіації dC , яка подана вище у вигляді (2):

$$dK = \frac{35dCd_m(1-c^2)}{4c^2}, \quad dD = -\frac{175dCd_m(1-c^2)}{12c^2}, \quad (20)$$

$$dK_1 = dK_2 = \frac{35dCd_m(2c^2-1)}{4c^2}, \quad dK_3 = -\frac{35dCd_m(3-c^2)}{4c^2}. \quad (21)$$

Зауважимо, що всі 5 варіацій dK , dD , dK_1 , dK_2 , dK_3 прямо залежать від часу лише через dC або A_{20} . Після підстановки (20) і (21) у (6) ми знаходимо залежну від часу зміну густини $dd(r, J, t)$:

$$dd = dd(r, J, t) = -\frac{35dCd_m}{4c^2} \left[r^2 \left((c^2 + 2) \cos^2 J + (1 - 2c^2) \right) + (c^2 - 1) \right]. \quad (22)$$

Якщо $f = 0 \Rightarrow c = 1$, ми приходимо до розглянутих у роботі [1] виразів зміни густини з часом для сферичної Землі.

Тепер легко показати, що зміна $dM(t)$ маси Землі M на деяку епоху t для розглянутої тривимірної моделі густини буде дорівнювати нулю

$$dM = a^3 c \int_0^1 r^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} dd(r, J, t) \sin J dJ dr = 0, \quad (23)$$

що задовольняє вихідну умову $M = \text{const}$ без перевірки інтегруванням за часом.

Таблиця 2

Внесок часової зміни dd густини Землі вздовж полярної осі C інерції та в площині екватора за період 100 років

Шар	Радіус, [км]	$dd \cdot 10^7$, [г/см ³] вздовж осі C	$dd \cdot 10^7$, [г/см ³] в площині екватора	$dd/dd_s \cdot 100\%$ в площині екватора	$dd/dd_s \cdot 100\%$ вздовж осі C
Кора	6371.0	1.684	-0.836	100.0	100.0
	6346.6	1.671	-0.830	99.2	99.2
Верхня мантія	6346.6	1.671	-0.830	99.2	99.2
	5701.0	1.347	-0.671	80.2	80.0
Нижня мантія	5701.0	1.347	-0.671	80.2	80.0
	3480.0	0.498	-0.253	30.3	29.6
Зовнішнє ядро	3480.0	0.498	-0.253	30.3	29.6
	1221.5	0.056	-0.036	4.3	3.4
Внутрішнє ядро	1221.5	0.056	-0.036	4.3	3.4
	0	-0.006	-0.006	0.7	0.3

Оскільки максимальне значення $|dd|$ буде відзначатися на поверхні планети ($r=1$), то має зміст введення характеристики відносного внеску dd :

$$\frac{dd}{dd_s} = \frac{dd(r, J, t)}{dd_s(1, J, t)} = r^2 + \frac{(1-r^2)(c^2-1)}{(c^2+2)\cos^2 J - c^2}, \quad (24)$$

де залежність від часу скорочується, а для $f=0$ ми отримуємо $dd/dd_s = r^2$ випадок сферичної планети.

Табл. 2 і рис. 3 ілюструють невеликі зміни dd густини Землі (за період 100 років) та параметра dd/dd_s вздовж полярної осі C інерції в площині екватора. Середнє значення відношення dd/dd_s для

основних шарів Землі набуває таких значень: (а) кора – 99.6%, (б) верхня мантія – 89.5%, (в) нижня мантія – 52.9%, (г) зовнішнє ядро – 14.7%, (д) внутрішнє ядро – 1.2%.

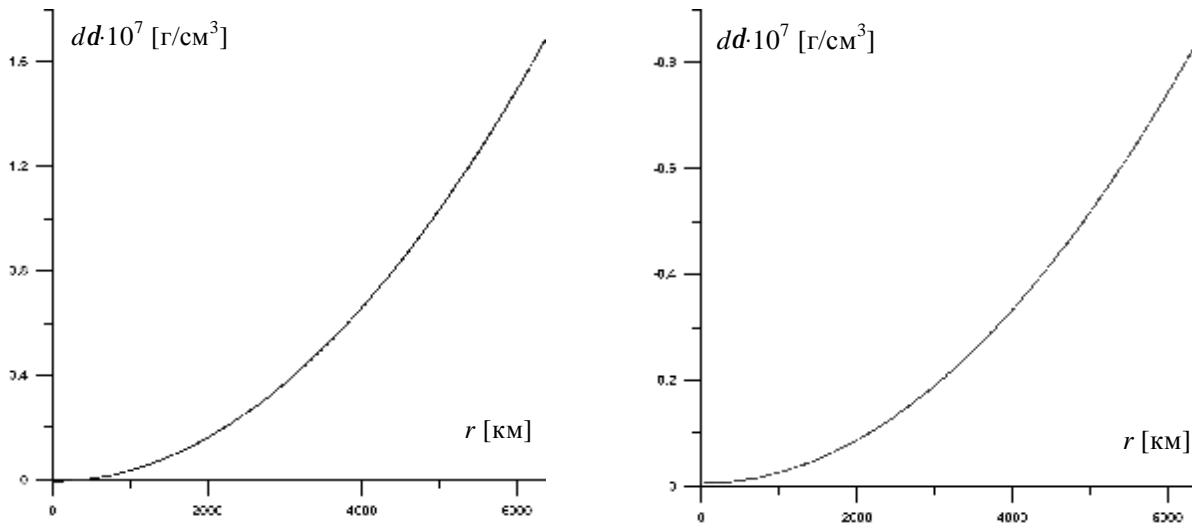


Рис. 3. Зміна густини $dd \cdot 10^7$ [г/см³] за період 100 років вздовж полярної осі C інерції (лівий рисунок) та в площині екватора (правий рисунок)

Висновки. Отже, ми отримали найбільший вплив варіації \dot{A}_{20} на зміни густини в шарі земної кори. Оскільки земна кора – це найтонший шар планети з загальною масою 0.4% маси Землі, то отриманий результат потребує додаткового вивчення таких деформацій планети, які можуть провокуватися наявністю вікової зміни \dot{A}_{20} .

1. Марченко О.М., Ярема Н.П. Про перетворення гармонічних коефіцієнтів геопотенціалу при малих поворотах системи координат // Геодезія, картографія і аерофотознімання. Випуск 65. – Львів, 2004. – С. 64–72. 2. Мещеряков Г.А. Использование стоковых постоянных Земли для уточнения ее механических моделей // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. – 1975. – Вып. 21. – С.23–30. 3. Мещеряков Г.А., Дейнека Ю.П. Об эллипсоидальном распределении плотности земных недр // Республиканский межвед. научн.-техн. сб. Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1975. – Вып.21. – С.46–53. 4. Мориц Г. Фигура Земли: Теоретическая геодезия и внутреннее строение Земли // Пер с англ.–Киев: Наук.думка, 1994. – 240с. 5. Bretagnon P., Francou G., et al. SMART97: A new solution for the rotation of the rigid Earth. // Astronomy and astrophysics, 329, 1998. – P.329–338. 6. Marchenko A.N. Non-tidal variations in the Earth's inertia tensor and the corresponding changes of the 3D mass density model // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва. – Львів, 2003. – С. 67–73. 7. Melchior P. The tides of the planet Earth. Pergamon, Oxford, 1978,–608p. 8. Reigber Ch., Jochmann H., Wünsch J., Neumayer K.H. and Schwintzer P. First insight into temporal gravity variability from CHAMP// First CHAMP mission result for gravity magnetic and atmospheric studies, Springer-Berlin, 2003, p. 128-133. 9. Rochester M.G., and Smylie D.E. On changes in the trace of the Earth's inertial tensor // Journal of Geophysical Research, 79 (32), 1974 – P. 4948–4951. 10. Souchay J. and Kinoshita H. Corrections and new developments in rigid Earth nutation theory:I. Lunisolar influence including indirect planetary effects // Astronomy and Astrophysics, 312, 1996. – P.1017–1030. 11. Williams J.G. Contributions to the Earth's obliquity rate, precession and nutation // The Astronomical Journal, 108, 1994. – P. 711–724. 12. Yoder C.F., Williams J.G., Parke M.E. Tidal variations of Earth rotation // J. Geophys. Res., 86, 1981. – P.881–891.