2. Встановлено, що сили тяжіння, зумовлені власною вагою, негативно впливають на зрівноваження системи вала (незрівноваженого ротора) у разі горизонтально розташованого ротора.

Програма SOLID WORKS з модулем MOTION дає змогу досліджувати незрівноважені ротори, центр мас яких зміщений відносно двох осей *oz* і *oy* і є предметом наших подальших досліджень.

1. Браузенс Р., Кренделл С. Об устойчивости вращения ротора обладающего несимметрией инерции и несимметрией жесткости вала // Прикладная механика. – М.: Мир, 1961. – № 4. 2. Вибрации в технике: Справочник: В 6 т. – М.: Машиностроение, 1981. – Т. 6: Защита от вибрации и ударов / Под ред. К.Ф. Фролова, 1981. – 456 с. 3. Гусаров А.А. Автобалансирующие устройства прямого действия. – М.: Наука, 2002. – 119 с. 4. Кравцов Е.В., Позняк Э.Л. Об эффективности пассивных виьрогасителей в роторных системах // Машиностроение. – 1977. – № 4. 5. Філімоніхін Г.Б. Зрівноваження і віброзахист роторів автобалансирами з твердими коригувальними вантажами: Монографія (за спеціальністю 05.02.09 "Динаміка та міцність машин"). – Кіровоград: КНТУ, 2004. – 352 с. 6. Thearle E. L. Automatic dynamic balancers Part 2 – Ring, pendulum and ball balancers // Machine Design. – 1950. – Vol. 22. – No 10. – P. 103–106.

УДК 539.3.

М.І. Войтович, Б.С. Воробець, Р.В. Лампіка***
Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра опору матеріалів,
*кафедра електронного машинобудування,
** Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

ДО РОЗРАХУНКУ ТЕРМОНАПРУЖЕНОГО СТАНУ ПРОСТОРОВО-КРИВОЛІНІЙНИХ СТРИЖНІВ

Стосовно розрахунку термонапруженого стану ізотропних просторово криволінійних стрижнів довільного поперечного перерізу виведена система диференціальних рівнянь на температурні аналоги поздовжньої сили і згинальних моментів, коли на бічній поверхні стрижня теплообмін із зовнішнім середовищем відбувається за законом Ньютона.

In relation to research of the termoelastic state of spatially-curvilinear bar arbitrary cut the system of differential equalizations is got on the temperature analogues of longitudinal force and bend moments, when on lateral surface of bar a heat exchange with an external environment takes a place by law of Newton.

Вступ. Аналіз напружень і деформацій у різних конструктивних елементах, які працюють при високих температурах, має велике значення. Від інтенсивності і характеру розподілу цих напружень і деформацій залежить термоміцність, термовтома, термічне випучування і інші подібні явища. Підвищення робочих температур деталей транспортних і енергетичних установок, а також і інших машин, посилило інтерес до дослідження температурних напружень і в стрижневих елементах різної геометрії – прямолінійних, криволінійних, закручених тощо; причому як при пружному їх деформуванні, так і на стадії пластичності і повзучості [1–5, 9]. Характерною особливістю вказаних робіт є те, що температурні поля досліджуваних елементів вважаються відомими (заданими). Очевидно, що детальніше дослідження термонапруженого стану можливе на основі підходу, який передбачає (на першому етапі) розв'язання відповідної задачі теплопровідності; тобто, визначення температурних аналогів поздовжньої сили і згинальних моментів, які входять в рівняння термомеханіки стрижнів як складові навантаження. Такий підхід дозволяє точніше враховувати реальні умови експлуатації, вивчити вплив теплофізичних параметрів досліджуваних систем на їх напружено-деформований стан, а також дає можливість формулювати задачі оптимізації деформівних систем з вибором як функцій керування величин, що характеризують умови нагрівання. У роботі [8] отримані рівняння теплопровідності плоских стрижнів великої кривини. Проте різноманітні елементи конструкцій і приладів є стрижнями з просторово криволінійною віссю. Рівняння теплопровідності для таких стрижнів у літературі відсутні.

Мета. Метою статті є отримання рівнянь теплопровідності ізотропного просторово криволінійного стрижня довільного поперечного перерізу, який знаходиться в умовах конвективного теплообміну з довкіллям, і формулювання відповідних граничних і початкових умов.

Постановка задачі. Розглянемо стрижень, віссю якого є деяка просторова крива. Нехай бічна поверхня стрижня контактує з середовищем, температуру якого позначимо t_c. Віднесемо стрижень до локальної змішаної неортогональної системи координат *xys*: криволінійну координату *s* відраховуватимемо вздовж осі стрижня, осі *Ox* і O*y* розташуємо в площині його поперечного перерізу, сумістивши їх з головною нормаллю і бінормаллю осі стрижня. Будемо вважати, що осі *Ox, Oy* – головні осі поперечного перерізу стрижня. Також вважатимемо, що матеріал стрижня ізотропний. Виведемо рівняння на температурні аналоги поздовжньої сили і згинальних моментів, які входять у рівняння термомеханіки стрижнів як складові навантаження.

Побудова математичної моделі температурного поля просторово криволінійного стрижня. Враховуватимемо рівняння нестаціонарної тривимірної задачі теплопровідності, яке запишемо у вибраній системі координат, використавши представлення лапласіана абсолютного скаляра в довільній системі криволінійних координат [6] :

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{|q|}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(q^{ik} |q| \frac{\partial t}{\partial x^k} \right) \tag{1}$$

У цьому разі $\left(i,k=\overline{1,3}\right)$: $x^1=s$, $x^2=x$, $x^3=y$. Компоненти матричного тензора у вибраній системі координат набувають таких значень:

$$\begin{gathered} q^{11} = 1 + \frac{y^2\kappa^2}{(1-kx)^2}, \quad q^{12} = q^{21} = -\frac{xy\kappa^2}{(1-kx)^2}, \quad q^{31} = q^{13} = \frac{y\kappa}{(1-kx)^2}, \\ q^{32} = q^{23} = -\frac{x\kappa}{(1-kx)^2}, \quad q^{22} = 1 + \frac{x^2\kappa^2}{(1-kx)^2}, \quad q^{33} = \frac{1}{(1-kx)^2}, \end{gathered} \tag{2}$$

а якобіан буде таким:

$$q = (1-kx)^2 \tag{3}$$

Тут $k(s), \kappa(s)$ – кривина і скрут осі стрижня.

Врахувавши у рівнянні теплопровідності [2] представлення оператора Лапласа в довільній криволінійній неортогональній системі координат (1), в яке підставимо вирази (2) і (3), отримаємо рівняння нестаціонарної тривимірної задачі теплопровідності у вибраній системі координат *xys*:

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial x}\left\{ \left(1 - kx + \frac{y^2\kappa^2}{1-kx} \right) \frac{\partial t}{\partial x} - \frac{xy\kappa^2}{1-kx}\frac{\partial t}{\partial y} + \frac{y\kappa}{1-kx}\frac{\partial t}{\partial s} \right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{ -\frac{xy\kappa^2}{1-kx}\frac{\partial t}{\partial x} - \left(1 - kx + \frac{x^2\kappa^2}{1-kx} \right)\frac{\partial t}{\partial y} - \frac{x\kappa}{1-kx}\frac{\partial t}{\partial s} \right\} + \\ + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{y\kappa}{1-kx}\frac{\partial t}{\partial x} - \frac{x\kappa}{1-kx}\frac{\partial t}{\partial y} + \frac{1}{1-kx}\frac{\partial t}{\partial s} \right) = \frac{1-kx}{\lambda}\left(c\frac{\partial t}{\partial \kappa} - g \right). \end{gathered} \tag{4}$$

Знехтувавши в рівнянні (4) доданками, які включають квадрат скруту κ, отримаємо таке наближене рівняння тривимірної задачі теплопровідності, записане у вибраній системі координат *xys:*

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{1}{1-kx}\left(\frac{\partial t}{\partial s}+\kappa y\frac{\partial t}{\partial x}-\kappa x\frac{\partial t}{\partial y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[(1-kx)\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\kappa y}{1-kx}\frac{\partial t}{\partial s}\right]$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[(1-kx)\frac{\partial t}{\partial y}-\frac{\kappa x}{1-kx}\frac{\partial t}{\partial s}\right]=\frac{1-kx}{\lambda}\left(c\frac{\partial t}{\partial \tau}-g\right) \tag{5}$$

Тут $t(x,y,s,\tau)$ – температура стрижня; τ – час; λ, c – коефіцієнт теплопровідності і об'ємна теплоємність матеріалу стрижня, q – густина джерел тепла, розподілених у стрижні.

Теплообмін з середовищем, в якому знаходиться стрижень, вважатимемо таким, що описується законом Ньютона, тобто на бічній поверхні стрижня приймаємо такі граничні умови:

$$\lambda\left(\frac{\partial t}{\partial x}n_x+\frac{\partial t}{\partial x}n_y\right)+\varepsilon(t-t_c)=0, \tag{6}$$

де n_x, n_y – напрямні косинуси вектора зовнішньої до бічної поверхні стрижня нормалі; $\varepsilon(x,y,s,\tau)$ – коефіцієнт тепловіддачі з цієї поверхні.

Для отримання рівнянь на температурні аналоги поздовжньої сили T і згинальних моментів Θ_x, Θ_y [7]

$$T=\frac{1}{A}\iint\limits_D t\,dA,\qquad T=\frac{1}{W_x}\iint\limits_D t\,y\,dA,\qquad T=\frac{1}{W_x}\iint\limits_D t\,x\,dA \tag{7}$$

використаємо запропонований в роботах [7, 8] спосіб зведення тривимірної задачі теплопровідності до одновимірної. Вказаним шляхом отримаємо таку систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(A_{00}\frac{\partial T}{\partial s}+A_{10}\frac{\partial \Theta_y}{\partial s}+A_{01}\frac{\partial \Theta_x}{\partial s}\right)+\frac{2\kappa}{\delta}\left(A_{01}\frac{\partial \Theta_y}{\partial s}-\delta^2 A_{10}\frac{\partial \Theta_x}{\partial s}\right)-\frac{c}{\lambda}\frac{\partial}{\partial \tau}\left(B_{00}T+B_{10}\Theta_y\right)=$$
$$=E_{00}T+\left[E_{10}-\frac{1}{\delta\lambda}(\kappa A_{01})_s\right]\Theta_y+\left[E_{01}+\frac{\delta}{\lambda}(\kappa A_{10})_s\right]\Theta_x-T_{00}^{(c)},$$
$$\frac{\partial}{\partial s}\left(A_{10}\frac{\partial T}{\partial s}+A_{20}\frac{\partial \Theta_y}{\partial s}+A_{11}\frac{\partial \Theta_x}{\partial s}\right)+\frac{2\kappa}{\delta}\left(A_{11}\frac{\partial \Theta_y}{\partial s}-\delta^2 A_{20}\frac{\partial \Theta_x}{\partial s}\right)-$$
$$-\frac{c}{\lambda}\frac{\partial}{\partial \tau}\left(B_{10}T+B_{20}\Theta_y+B_{11}\Theta_x\right)=E_{10}T+\left[E_{20}+\frac{A}{\lambda\delta_y^2}-\frac{1}{\delta\lambda}(\kappa A_{11})_s\right]\Theta_y+\left[E_{11}+\frac{\delta}{\lambda}(\kappa A_{20})_s\right]\Theta_x-T_{10}^{(c)}, \tag{8}$$
$$\frac{\partial}{\partial s}\left(A_{01}\frac{\partial T}{\partial s}+A_{11}\frac{\partial \Theta_y}{\partial s}+A_{02}\frac{\partial \Theta_x}{\partial s}\right)+\frac{2\kappa}{\delta}\left(A_{02}\frac{\partial \Theta_y}{\partial s}\right)-\frac{c}{\lambda}\frac{\partial}{\partial \tau}\left(B_{01}T+B_{11}\Theta_y+B_{02}\Theta_x\right)=$$
$$=E_{01}T+\left[E_{11}-\frac{1}{\delta\lambda}(\kappa A_{02})_s\right]\Theta_y+\left[E_{02}-\frac{A}{\lambda\delta_x^2}+\frac{\delta}{\lambda}(\kappa A_{11})_s\right]\Theta_x-T_{01}^{(c)}.$$

Тут позначимо

$$A_{ij}=\iint\limits_D(1-kx)^{-1}\left(\frac{x}{\delta_y}\right)^i\left(\frac{y}{\delta_x}\right)^j dA,\quad B_{ij}=\iint\limits_D(1-kx)\left(\frac{x}{\delta_y}\right)^i\left(\frac{y}{\delta_x}\right)^j dA,$$
$$E_{ij}=\frac{1}{\lambda}\oint\limits_L\varepsilon(x,y,s,\tau)(1-kx)\left(\frac{x}{\delta_y}\right)^i\left(\frac{y}{\delta_x}\right)^j dl,$$
$$T_{ij}^{(c)}=\frac{1}{\lambda}\oint\limits_L\varepsilon(x,y,s,\tau)(1-kx)\left(\frac{x}{\delta_y}\right)^i\left(\frac{y}{\delta_x}\right)^j t^{(c)}(x,y,s,\tau)dl+\frac{1}{\lambda}\iint\limits_D g(x,y,s,\tau)(1-kx)\left(\frac{x}{\delta_y}\right)^i\left(\frac{y}{\delta_x}\right)^j dA; \tag{9}$$
$$\delta=\delta_y\delta_x^{-1}.$$

Крім того: D – область поперечного перерізу стрижня; L – її контур; A – площа; W_x, W_y – осьові моменти опору: $\delta_x(\delta_y)$ – відстань від осі *Ox (Oy)* до найвіддаленішої від цієї осі точки області *D*.

Величини E_{ij} $(i+j=0,1,2)$ можна назвати зведеними коефіцієнтами тепловіддачі з бічної поверхні стрижня. Причому, ці коефіцієнти являють собою такі величини: E_{00} – маса контуру поперечного перерізу стрижня з лінійною густиною $(1-kx)\varepsilon(x,y,s,\tau)$; E_{10}, E_{01} – статичні моменти, $E_{20,}\ E_{11}, E_{02}$ – моменти інерції цього контуру.

Отримана система (8) є системою рівнянь у частинних похідних зі змінними коефіцієнтами. Вона має шостий порядок по просторовій координаті s і третій порядок по часовій координаті τ.

Сформулюємо для неї граничні і початкові умови. Нехай в початковій момент часу $\tau = 0$ заданий розподіл температури по об'єму стрижня

$$t_{/\tau=0} = t_0(x,y,s), \tag{10}$$

на його торцевих поверхнях S_1, S_2 задані, як вихідні, граничні умови третього роду

$$\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial s} + (-1)^n \varepsilon_n\left(t - t_c^{(n)}\right)\right)_{S_n} = 0 \quad (n = 1,2) \tag{11}$$

Тут ε_n і $t_c^{(n)}$ – коефіцієнт тепловіддачі з поверхні S_n $(n=1,2)$ і температура середовища, яке омиває цю поверхню.

Помножимо співвідношення (10) і (11) почергово на 1, *x, y* і проінтегруємо по області D, використавши при цьому означення (7): в результаті отримаємо

$$T_{/\tau=0} = \frac{1}{A}\iint\limits_D t_0\,dA, \qquad \Theta_{x/\tau=0} = \frac{1}{W_x}\iint\limits_D t_0\,y\,dA, \qquad \Theta_{y/\tau=0} = \frac{1}{W_x}\iint\limits_D t_0\,x\,dA; \tag{12}$$

$$\left[\lambda\frac{\partial T}{\partial s} + (-1)^n\varepsilon_n\left(T - \frac{1}{A}\iint\limits_D t_c^{(n)}dA\right)\right]_{S_n} = 0,$$

$$\left[\lambda\frac{\partial \Theta_x}{\partial s} + (-1)^n\varepsilon_n\left(\Theta_x - \frac{1}{W_x}\iint\limits_D t_c^{(n)}y\,dA\right)\right]_{S_n} = 0, \tag{13}$$

$$\left[\lambda\frac{\partial \Theta_x}{\partial s} + (-1)^n\varepsilon_n\left(\Theta_y - \frac{1}{W_y}\iint\limits_D t_c^{(n)}x\,dA\right)\right]_{S_n} = 0.$$

Співвідношення (12) і (13) – початкові і граничні умови для системи диференціальних рівнянь (8). Якщо вихідними є інші умови (наприклад, задана температура чи заданий тепловий потік), то граничні умови на T, Θ_x і Θ_y отримуються безпосереднім інтегруванням їх по області *D*, аналогічно тому, як (13) отримані із (11).

З рівнянь (8), як частинний випадок, випливають рівняння теплопровідності стрижнів великої кривини. Для цього необхідно прийняти, що скрут $\kappa = 0$. У результаті отримаємо:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(A_{00}\frac{\partial T}{\partial s} + A_{10}\frac{\partial \Theta_y}{\partial s} + A_{01}\frac{\partial \Theta_x}{\partial s}\right) - \frac{c}{\lambda}\frac{\partial}{\partial \tau}\left(B_{00}T + B_{10}\Theta_y\right) = E_{00}T + E_{10}\Theta_y + E_{01}\Theta_x - T_{00}^{(c)},$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(A_{10}\frac{\partial T}{\partial s} + A_{20}\frac{\partial \Theta_y}{\partial s} + A_{11}\frac{\partial \Theta_x}{\partial s}\right) - \frac{c}{\lambda}\frac{\partial}{\partial \tau}\left(B_{10}T + B_{20}\Theta_y + B_{11}\Theta_x\right) =$$

$$= E_{10}T + \left[E_{20} + \frac{A}{\lambda\delta_y^2}\right]\Theta_y + E_{11}\Theta_x - T_{10}^{(c)},$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(A_{01}\frac{\partial T}{\partial s}+A_{11}\frac{\partial \Theta_y}{\partial s}+A_{02}\frac{\partial \Theta_x}{\partial s}\right)-\frac{c}{\lambda}\frac{\partial}{\partial \tau}\left(B_{01}T+B_{11}\Theta_y+B_{02}\Theta_x\right)=$$
$$=E_{01}T+E_{11}\Theta_y+\left[E_{02}-\frac{\delta}{\lambda\ \delta_x^2}\right]\Theta_x-T_{01}^{(c)}. \tag{14}$$

Рівняння (14) є рівняннями теплопровідності стрижнів великої кривини.

У рівняннях (14) перейдемо до границі при $k \to 0$; тоді отримаємо:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(A\frac{\partial T}{\partial s}\right)-\frac{c}{\lambda}\frac{\partial}{\partial \tau}\left(AT\right)=E_{00}T+E_{10}\Theta_y+E_{01}\Theta_x-T_{00}^{(c)},$$
$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{W_y}{\delta_y}\frac{\partial \Theta_y}{\partial s}\right)-\frac{c}{\lambda}\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{W_y}{\delta_y}\Theta_y\right)=E_{10}T+\left[E_{20}+\frac{A}{\lambda\delta_y^2}\right]\Theta_y+E_{11}\Theta_x-T_{10}^{(c)}, \tag{15}$$
$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{W_x}{\delta_x}\frac{\partial \Theta_y}{\partial s}\right)-\frac{c}{\lambda}\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{W_x}{\delta_x}\Theta_x\right)=E_{01}T+E_{11}\Theta_y+\left[E_{02}+\frac{\delta}{\lambda\delta_x^2}\right]\Theta_x-T_{01}^{(c)}.$$

Співвідношення (15) – рівняння теплопровідності прямолінійних стрижнів довільного поперечного перерізу; при цьому і у формулах (9) для коефіцієнтів кривина k=0. Зауважимо, що система рівнянь (15) розпадається на три окремих диференціальних рівняння, якщо осі Ox і Oy є головними центральними осями не тільки поперечного перерізу стрижня, але і його контуру з лінійною густиною $\varepsilon(x,y,s,\tau)$.

Висновки. Отже, побудована математична модель температурного поля просторово криволінійного стрижня довільного поперечного перерізу (отримані рівняння теплопровідності і сформульовані крайові умови), який знаходиться в умовах конвективного теплообміну з омиваючим середовищем. Ця математична модель дає можливість визначити температурні аналоги поздовжньої сили і згинальних моментів, які входять в рівняння термомеханіки стрижнів як складові навантаження.

Показано, що із отриманих співвідношень, як часткові випадки, випливають рівняння теплопровідності стрижнів великої кривини і прямолінійних стрижнів.

1. Биргер И. А. Неравномерно нагретые стержни с переменными параметрами упругости // Расчеты на прочность. – М.: Машгиз, 1961. – Вып. 7. – С. 76–109. 2. Боли Б., Уейнер Дж. Теория температурных напряжений. – М.: Мир, 1964. – 517 с. 3. Князева В. А. Расчет составных осесиметричных кольцевых конструкций // Изв. вузов. Машиностроение. – 1979. – № 4. – С. 10–15. 4. Термопрочность деталей машин / Под ред. И.А. Биргера и Б.Ф. Шорра. – М.: Машиностроение, 1975. – 455 с. 5. Шорр Б. Ф. К теории закрученных неравномерно нагретых стержней // Изв. СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1960. – № 1. – С. 141–151. 6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1968. – 720 с. 7. Підстригач Я.С., Чернуха Ю.А., Войтович М.І. Умови теплообміну на підкріпленому краю оболонки // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1975. – № 6. – С. 429–433. 8. Подстригач Я.С., Чернуха Ю,А., Войтович М.И. Нестационарная теплопроводность и термоупругость кривых брусьев // Проблемы прочности. – 1976. – № 9. – С. 3–8. 9. Lok H., Conway H.D. Thermal stesses in multi-layered curved bars // Fibre Sci. and Technol. – 1976. – Vol. 9, № 2. – P. 135–151.