ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.625 № 625, (2008) с. 48–53

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
"LVIVSKA POLITECHNIKA"
"Physical & mathematical sciences"
Vol.625 No 625, (2008) 48–53

КОНСТРУКЦІЇ, ЩО ЗБЕРІГАЮТЬ М-ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ

Н.М. Пирч

Українська академія друкарства
вул. Підголоско 19, 79020, Львів, Україна

(Отримано 24 січня 2008 р.)

Подано узагальнення теореми Окунєва про спеціальні ізоморфізми вільних абелевих топологічних груп, а також конструкції і функтори, що за певних умов зберігають відношення М-еквівалентності тихоновських просторів.

Ключові слова: вільна топологічна група, M-еквівалентність, A-еквівалентність, джойн.

2000 MSC: 22A05

УДК: 512.546

I. Вступ

Як було встановлено у [3], кожному тихоновському простору X відповідає вільний об'єкт у категорії віддільних топологічних груп та їхніх неперервних гомоморфізмів. Проте згодом з'ясувалось, що функтор вільної топологічної групи не є ін'єктивним, іншими словами, двом негомеоморфним топологічним просторам можуть відповідати топологічно ізоморфні вільні топологічні групи. Теорія M-еквівалентних просторів включає вивчення спільних і відмінних властивостей базисів вільних топологічних груп. Саме для встановлення відмінних властивостей нам і потрібні загальні методи побудови M-еквівалентних просторів, до яких зокрема належать конструкції, що зберігають M-еквівалентність. Як відомо, до таких конструкцій належать прямі топологічні суми [2], добутки (за певних умов на співмножники) [4], конуси і надбудови [4], поповнення по Дьєдонне [5], простори квазікомпонент [8].

Нехай X — тихоновський простір. Через $F(X)$ позначатимемо вільну топологічну групу простору X у сенсі Маркова, через $A(X)$ — вільну абелеву топологічну групу простору X у сенсі Маркова, через $FG(X)$ — вільну топологічну групу простору X у сенсі Граєва, через $AG(X)$ — вільну абелеву топологічну групу тихоновського простору X у сенсі Граєва. Топологічні простори X і Y називаються M-еквівалентними, якщо топологічні групи $F(X)$ і $F(Y)$ є топологічно ізоморфними (позн. $X \overset{M}{\sim} Y$). Топологічні простори X і Y називаються A-еквівалентними, якщо топологічні групи $A(X)$ і $A(Y)$ є топологічно ізоморфними (позн. $X \overset{A}{\sim} Y$). Для топологічного простору X через X^+ позначатимемо простір, отриманий з простору X додаванням однієї ізольованої точки.

Нагадаємо основні твердження, які найчастіше використовуватимемо у цій роботі.

Твердження 1.1. [2] *Нехай $X_s \overset{M}{\sim} Y_s$ для кожного $s \in S$. Тоді $\bigoplus_{s\in S} X_s \overset{M}{\sim} \bigoplus_{s\in S} Y_s$.*

Твердження 1.2. [7] *Нехай $p_i \colon X_i \to Y_i$, $i = 1, 2$ — R-факторні відображення, $p_i^* \colon F(X_i) \to F(Y_i)$ — їхні гомоморфні продовження. Якщо існує топологічний ізоморфізм $i \colon F(X_1) \to F(X_2)$ такий, що $i(\ker p_1^*) = \ker p_2^*$, тоді відображення p_1 і p_2 M-еквівалентні.*

Скажемо, що ізоморфізм $i \colon F(X) \to F(Y)$ є спеціальним, якщо композиція $e_Y^* \circ i$ є постійним відображенням на X, де $e_Y^* \colon F(Y) \to \mathbb{R}$ – гомоморфізм, що продовжує функцію $e_Y \colon Y \to \mathbb{R}$, яка тотожно дорівнює 1 на Y. В аналогічний спосіб означується поняття спеціального ізоморфізму між вільними абелевими топологічними групами.

Твердження 1.3. [4] *Нехай X і Y — простори з топологічно ізоморфними вільними топологічними групами. Тоді існує спеціальний топологічний ізоморфізм між вільними топологічними групами просторів X і Y.*

Твердження 1.4. [4] *Якщо $X \overset{M}{\sim} Y$ і простір Z є локально компактним, або простір $(X \oplus Y) \times Z$ є k-простором, то $X \times Z \overset{M}{\sim} Y \times Z$.*

Твердження, аналогічні до тверджень 1.1–1.4, справедливі також і для вільних абелевих топологічних груп.

У другому розділі ми узагальнимо теорему Окунєва про спеціальні ізоморфізми вільних абелевих топологічних груп. У третьому розділі ми покажемо, що такі конструкції, як джойни, букети, приведені добутки, G-симетричні добутки, вільні (абелеві) напівгрупи та моноїди за певних умов, зберігають ізоморфізми вільних (абелевих) топологічних груп та вільних локально опуклих просторів.

Результати роботи були анонсовані у [9] і [10].

II. Про одне узагальненя теореми Окунєва

Наступне твердження узагальнює результат О. Окунєва [4] про спеціальні ізоморфізми і буде далі використовуватись при встановленні конструкцій, що зберігають A-еквівалентність.

Теорема 2.1. *Для просторів X та Y наступні умови еквівалентні:*

а) вільні абелеві топологічні групи в сенсі Маркова просторів X та Y топологічно ізоморфні;

б) для довільних точок $a \in X$, $b \in Y$ існує спеціальний топологічний ізоморфізм $h\colon A(X) \to A(Y)$ такий, що $h(a) = b$;

в) вільні абелеві топологічні групи в сенсі Граєва просторів X та Y топологічно ізоморфні.

Для доведення теореми нам потрібна буде така лема.

Лема 2.2. *Нехай вільні (абелеві) граєвські топологічні групи просторів X_1 і X_2 є топологічно ізоморфними і вільні (абелеві) марковські топологічні групи просторів Y_1 і Y_2 є топологічно ізоморфними. Тоді вільні (абелеві) граєвські топологічні групи просторів $X_1 \oplus Y_1$ і $X_2 \oplus Y_2$ є топологічно ізоморфними.*

□ *Доведення.* Нехай $i\colon FG(X_1) \to FG(X_2)$ – ізоморфізм вільних граєвських топологічних груп з відміченими точками $a_i \in X_i$, $i = 1, 2$, $j\colon F(Y_1) \to F(Y_2)$ — ізоморфізм вільних марковських топологічних груп. Розглянемо відображення $k\colon X_1 \oplus Y_1 \to F(X_2 \oplus Y_2)$, покладаючи $k(z) = i(z)$, якщо $z \in X_1$ і $k(z) = j(z)$, якщо $z \in Y_1$. Аналогічно до [2, твердження 8.8] перевіряється, що продовження відображення k до неперервного гомоморфізму $k^*\colon FG(X_1 \oplus Y_1) \to FG(X_2 \oplus Y_2)$ є ізоморфізмом вільних граєвських топологічних груп $FG(X_1 \oplus Y_1)$ і $FG(X_2 \oplus Y_2)$ з відміченими точками $a_i \in X_i \oplus Y_i$. ■

□ *Доведення.* [Доведення теореми.] Доведемо імплікацію $(a \implies b)$. За твердженням I. існує спеціальний топологічний ізоморфізм $j\colon A(X) \to A(Y)$. Нехай $A = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n = j^{-1}(b)$. Оскільки j є спеціальним ізоморфізмом, то $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Розглянемо відображення $f, g\colon X \to A(X)$, означені як $f(x) = x + A - a$, $g(x) = x - A + a$. Нехай $f^*, g^*\colon A(X) \to A(X)$ — їхні гомоморфні продовження.

Тоді

$$\begin{gathered} f^* \circ g^*(x) = f^*(x - A + a) = \\ = (x + A - a) - [\lambda_1(x_1 + A - a) + \\ + \lambda_2(x_2 + A - a) + ... + \lambda_n(x_n + A - a)] + \\ + (a + A - a) = x + A - a - [\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n] - \\ - (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i) \times (A - a) + A = \\ = x + A - a - A - 1 \times (A - a) + A = x. \end{gathered}$$

Отже, $f^* \circ g^* = g^* \circ f^* = 1_{A(X)}$. У такий спосіб f^* є спеціальним автоморфізмом групи $A(X)$ таким, що $f^*(a) = A$. Тоді $h = j \circ f^*$ є спеціальним топологічним ізоморфізмом і $h(a) = j \circ f^*(a) = j(A) = b$.

Доведемо імплікацію $(b \implies c)$. Нехай $i\colon A(X) \to A(Y)$ — спеціальний топологічний ізоморфізм такий, що $i(a) = b$. Тотожне відображення $X \to \to X$ продовжується до неперервного гомоморфізму $f_x\colon A(X) \to A_G(X, a)$ у вільну абелеву граєвську топологічну групу простору X з одиницею в точці a. Так само, тотожне відображення $Y \to Y$ продовжується до неперервного гомоморфізму $f_y\colon A(Y) \to A_G(Y, b)$ у вільну абелеву граєвську топологічну групу простору Y з одиницею в точці b. Неперервне відображення $s_x\colon X \to A_G(Y, b)$, означене як $s(x) = f_y \circ i|_X$, має ту властивість, що $s_x(a) = b$, отже, продовжується до неперервного гомоморфізму $j_x\colon A_G(X, a) \to A_G(Y, b)$. Аналогічно неперервне відображення $s_y\colon Y \to A_G(X, a)$, означене як $s(y) = f_x \circ i^{-1}|_Y$, має ту властивість, що $s_y(b) = a$, отже, продовжується до неперервного гомоморфізму $j_y : A_G(Y, b) \to A_G(X, a)$. Маємо, що $j_y \circ j_x(x) = f_x \circ i \circ i^{-1}(x) = x$ для усіх $x \in X$. Аналогічно $j_x \circ j_y(y) = f_y \circ i^{-1} \circ i(y) = y$ для усіх $y \in Y$. Отже, j_x — топологічний ізоморфізм вільних аблевих граєвських груп $A_G(X, a)$ і $A_G(Y, b)$.

Доведемо імплікацію $(c \implies a)$. Нехай вільні абелеві граєвські топологічні групи просторів X і Y є топологічно ізоморфними. Тоді за лемою II. вільні абелеві граєвські топологічні групи просторів X^+ і Y^+ є також топологічно ізоморфними. Як зазначалось в [1], вільна (абелева) граєвська топологічна група простору X^+ природно ізоморфна вільній (абелевій) марковській топологічній групі простору X, що і доводить наше твердження. ■

Наслідок 2.3. Нехай $X^+ \overset{A}{\sim} Y^+$. Тоді $X \overset{A}{\sim} Y$.

III. Конструкції і функтори, що зберігають еквівалентність тихоновських просторів

Нехай $\{X_s\}_{s \in S}$ — сім'я просторів з відміченими точками $x_s \in X_s$. Тоді фактор-простір $\vee_{s \in S}(X_s, x_s) = = (\underset{s \in S}{\oplus} X_s)/(\underset{s \in S}{\oplus} x_s)$ називатиметься букетом сім'ї (X_s, x_s). Нескладно пересвідчитись, що букет сім'ї тихоновських просторів буде знову тихоновським простором.

Твердження 3.1. *Нехай $X_s \overset{A}{\sim} Y_s$ для кожного $s \in S$. Тоді $\vee_{s \in S}(X_s, a_s) \overset{A}{\sim} \vee_{s \in S}(Y_s, b_s)$.*

□ *Доведення.* Оскільки $X_s \overset{A}{\sim} Y_s$, то з теореми 2.1 випливає, що існують топологічні ізоморфізми $i_s\colon A(X_s) \to A(Y_s)$ такі, що $i(a_s) = b_s$. Означимо ізоморфізм $i\colon A(\underset{s \in S}{\oplus} X_s) \to A(\underset{s \in S}{\oplus} Y_s)$, поклавши $i(x) = = i_s(x)$, якщо $x \in X_s$. Нехай $p_X\colon \underset{s \in S}{\oplus} X_s \to \vee_{s \in S}(X_s, a_s)$, $p_Y\colon \underset{s \in S}{\oplus} Y_s \to \vee_{s \in S}(Y_s, b_s)$ – фактор відображення, p_X^*, p_Y^* — їхні гомоморфні продовження. Доведемо, що $i(\ker p_X^*) = \ker p_Y^*$. Цього, виходячи з твердження 1.2, буде достатньо, щоб довести, що $\vee_{s \in S}(X_s, a_s) \overset{A}{\sim} \vee_{s \in S}(Y_s, b_s)$. Підгрупа

$\ker p_X^*$ породжена елементами виду $a_s - a_t$, де $t, s \in S$. Тоді $i(a_s - a_t) = b_s - b_t \in \ker p_Y^*$, що і доводить наше твердження. ■

Твердження 3.2. [7]. *Нехай $X \overset{M}{\sim} Y$ і топологічний простір $(X \oplus Y)^n$ є k-простором. Тоді $X^n \overset{M}{\sim} Y^n$.*

□ *Доведення.* З того, що $(X \oplus Y)^n$ є k-простором, випливає, що $X^m \times Y^{n-m}$ є k-простором для усіх $m = 0..n$. Тому за твердженням I. $X^m \times Y^{n-m} \overset{M}{\sim} X^{m+1} \times Y^{n-m-1}$ для усіх $m = 0, ..., n$. Отже, $X^n \overset{M}{\sim} Y^n$. У такий спосіб ми за кожним топологічним ізоморфізмом $i\colon F(X) \to F(Y)$ можемо побудувати топологічний ізоморфізм $i_n\colon F(X^n) \to F(Y^n)$. ■

Позначимо через $S(X)$ вільну топологічну напівгрупу простору X. Оскільки $S(X) = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} X^n$ [6], то функтор вільної топологічної напівгрупи переводить тихоновські простори у тихоновські простори.

Твердження 3.3. *Нехай $X \overset{M}{\sim} Y$ і топологічний простір $S(X \oplus Y)$ є k-простором. Тоді $S(X) \overset{M}{\sim} S(Y)$.*

□ *Доведення.* Оскільки $S(X \oplus Y) = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} (X \oplus Y)^n$ і $S(X \oplus Y)$ є k-простором, то $(X \oplus Y)^n$ є k-простором для усіх натуральних n, отже, за твердженням I. маємо, що $X^n \overset{M}{\sim} Y^n$ для усіх натуральних n. Отже, за твердженням I. маємо, що $S(X) \overset{M}{\sim} S(Y)$. ■

Твердження, аналогічні до тверджень 3.2–3.3, справедливі і для відношення A-еквівалентності.

Нехай (X, x_0) і (Y, y_0) — топологічні простори з відміченими точками. Фактор-простір $(X \times Y)/((X \times y_0) \cup (x_0 \times Y))$ називається приведеним добутком просторів X і Y і позначається $(X, x_0) \wedge (Y, y_0)$. В наступному твердженні на приведеному добутку замість факторної ми розглядатимемо R-факторну топологію. Оскільки підпростір $(X \times y_0) \wedge (x_0 \times Y)$ замкнений у $X \times Y$, то відповідно до [7, твердження 1.3] це дасть нам змогу у роботі з приведеними добутками тихоновських просторів не виходити за межі тихоновських просторів.

Твердження 3.4. *Нехай $(X, x_0), (Y, y_0), (Z, z_0)$ – топологічні простори з відміченими точками, $X \overset{A}{\sim} Y$ і простір Z є локально компактним, або простір $(X \oplus Y) \times Z$ є k-простором. Тоді $(X, x_0) \wedge$ $\wedge (Z, z_0) \overset{A}{\sim} (Y, y_0) \wedge (Z, z_0)$.*

□ *Доведення.* Нехай $h\colon A(X) \to A(Y)$ – спеціальний топологічний ізоморфізм такий, що $h(x_0) = y_0$, а елемент x такий, що $h(x) = \lambda_1 y_1 +$ $+ \lambda_2 y_2 + ... + \lambda_n y_n$. Означимо топологічний ізоморфізм $i\colon A(X \times Z) \to A(Y \times Z)$ методом, запропонованим О. Окунєвим у [4], поклавши $i(x, z) = \lambda_1(y_1, z) + \lambda_2(y_2, z) + ... + \lambda_n(y_n, z)$. Позначимо через $p_X\colon X \times Z \to (X, x_0) \wedge (Z, z_0)$, $p_Y\colon Y \times Z \to (Y, y_0) \wedge (Z, z_0)$ — R-факторні відображення, $p_X^*\colon A(X \times Z) \to A((X, x_0) \wedge (Z, z_0))$, $p_Y^*\colon A(Y \times Z) \to A((Y, y_0) \wedge (Z, z_0))$ — їхні гомоморфні продовження. Щоб довести наше твердження нам, згідно з твердженням 1.2, достатньо показати, що $i(\ker p_X^*) = \ker p_Y^*$. Підгрупа $\ker p_X^*$ породжена множиною $u - u_0$, де $u_0 = (x_0, z_0)$, а u пробігає всеможливі значення (x, z_0), $x \in X$ або (x_0, z), $z \in Z$. Нехай $u = (x, z_0)$. Покладемо $w_0 = p_Y(y_0, z_0)$. Тоді

$$i(u - u_0) =$$
$$= \lambda_1(y_1, z_0) + \lambda_2(y_2, z_0) + ... + \lambda_n(y_n, z_0) - (y_0, z_0).$$

У такий спосіб $p_Y^* \circ i(u - u_0) = (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i) \times w_0 - w_0 =$ $= w_0 - w_0 = 0$. Отже, $i(u - u_0) \in \ker p_Y^*$. Нехай $u = (x_0, z)$. Тоді $i(u - u_0) = (y_0, z) - (y_0, z_0)$. У такий спосіб $p_Y^* \circ i(u - u_0) = w_0 - w_0 = 0$. Отже, $i(u - u_0) \in \ker p_Y^*$. ■

Нехай G — підгрупа симетричної групи S_n. Нагадаємо, що через SP^n_G позначається *G-симетричний степеневий функтор*, означений так. Для простору X простір $SP^n_G X$ є простором орбіт n-ого степеня X^n за дією групи G, означеної як $(x_1, x_2, ...x_n) \mapsto$ $\mapsto (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ...x_{\sigma(n)})$, де $\sigma \in G$. Орбіта, що містить елемент $(x_1, x_2, ..., x_n)$, позначається $[x_1, x_2, ..., x_n]_G$. Множина $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ називається носієм елемента $[x_1, x_2, ..., x_n]_G$ і позначається $\mathrm{supp}([x_1, x_2, ..., x_n]_G)$. Якщо $G = S_n$, то ми скорочено писатимемо $SP^n X$ замість $SP^n_G X$.

Твердження 3.5. *Нехай $X \overset{A}{\sim} Y$ і топологічний простір $(X \oplus Y)^n$ є k-простором, G — підгрупа симетричної групи S_n. Тоді $SP^n_G X \overset{A}{\sim} SP^n_G Y$.*

□*Доведення.* Топологічний ізоморфізм $h\colon A(X) \to A(Y)$ можемо “продовжити” до топологічного ізоморфізму $h_n\colon A(X^n) \to A(Y^n)$ за допомогою конструкції Окунєва, розглянутої у твердженні 3.2. Нехай $h(x_m) = \sum_{i_m=1}^{k_m} \lambda_{i_m} \times y_{i_m}$. Тоді

$$h_n(x_1, x_2, ...x_n) =$$
$$= \sum_{i_1=1}^{k_1} \sum_{i_2=1}^{k_2} .... \sum_{i_n=1}^{k_n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} .... \lambda_{i_n} (y_{i_1}, y_{i_2} ... y_{i_n}).$$

Позначимо через $s_X\colon X^n \to SP^n_G X$, $s_Y\colon Y^n \to$ $\to SP^n_G Y$ фактор-відображення, $s_X^*\colon A(X^n) \to$ $\to A(SP^n_G X)$, $s_Y^*\colon A(Y^n) \to A(SP^n_G Y)$ – їхні гомоморфні продовження. Доведемо, що $h_n(\ker s_X^*) =$ $= \ker s_Y^*$. Підгрупа $\ker s_X^*$ породжена елементами вигляду $(x_1, x_2, ...x_n) - (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ...x_{\sigma(n)})$, де $x_i \in X$, $\sigma \in G$.

Подіємо на них відображенням h_n. Тоді

$$h_n((x_1,x_2,...x_n)-(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},...x_{\sigma(n)}))=\sum_{i_1=1}^{k_1}\sum_{i_2=1}^{k_2}....\sum_{i_n=1}^{k_n}\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}....\lambda_{i_n}(y_{i_1},y_{i_2}...y_{i_n})-$$
$$-\sum_{i_{\sigma(1)}=1}^{k_{\sigma(1)}}\sum_{i_{\sigma(2)}=1}^{k_{\sigma(2)}}....\sum_{i_{\sigma(n)}=1}^{k_{\sigma(n)}}\lambda_{i_{\sigma(1)}}\lambda_{i_{\sigma(2)}}....\lambda_{i_{\sigma(n)}}(y_{i_{\sigma(1)}},y_{i_{\sigma(2)}}...y_{i_{\sigma(n)}})=$$
$$=\sum_{i_1=1}^{k_1}\sum_{i_2=1}^{k_2}....\sum_{i_n=1}^{k_n}\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}....\lambda_{i_n}(y_{i_1},y_{i_2}...y_{i_n})-\sum_{i_1=1}^{k_1}\sum_{i_2=1}^{k_2}....\sum_{i_n=1}^{k_n}\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}....\lambda_{i_n}(y_{i_{\sigma(1)}},y_{i_{\sigma(2)}}...y_{i_{\sigma(n)}})=$$
$$\sum_{i_1=1}^{k_1}\sum_{i_2=1}^{k_2}....\sum_{i_n=1}^{k_n}\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}....\lambda_{i_n}\times((y_{i_1},y_{i_2}...y_{i_n})-(y_{i_{\sigma(1)}},y_{i_{\sigma(2)}}...y_{i_{\sigma(n)}})).$$

Оскільки $((y_{i_1},y_{i_2}...y_{i_n})-(y_{i_{\sigma(1)}},y_{i_{\sigma(2)}}...y_{i_{\sigma(n)}}))\in\ker s_Y^*$, то

$$\sum_{i_1=1}^{k_1}\sum_{i_2=1}^{k_2}....\sum_{i_n=1}^{k_n}\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}....\lambda_{i_n}\times((y_{i_1},y_{i_2}...y_{i_n})-(y_{i_{\sigma(1)}},y_{i_{\sigma(2)}}...y_{i_{\sigma(n)}}))\in\ker s_Y^*.$$

Отже, за твердженням I. існує топологічний ізоморфізм $i_G\colon A(SP_G^nX)\to A(SP_G^nY)$ такий, що $s_Y^*\circ i_n=i_G\circ s_X^*$. ■

Позначимо через $S_A(X)$ — вільну абелеву топологічну напівгрупу простору X.

Твердження 3.6. *Нехай $X\overset{A}{\sim}Y$ і топологічний простір $S(X\oplus Y)$ є k-простором. Тоді $S_A(X)\overset{A}{\sim}S_A(Y)$.*

□ *Доведення.* Зауважимо, що $S_A(X)==\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}}SP^n(X)$ (див. [6]). Оскільки $S(X\oplus Y)$ є k-простором, то $(X\oplus Y)^n$ є k-простором для усіх натуральних n, отже, за твердженням III. маємо, що $SP^n(X)\overset{A}{\sim}SP^n(Y)$ для усіх натуральних n. Отже, з твердження I. випливає, що $S_A(X)\overset{M}{\sim}S_A(Y)$. ■

Нехай $a\in X$. Означимо відношення еквівалентності на вільній топологічній напівгрупі $S(X)$, поклавши

$$(x_1,x_2,.,x_{i-1},a,x_{i+1},..x_n)\sim(x_1,x_2,...x_{i-1},x_{i+1},..x_n)$$
.

Позначимо фактор-простір $S(X)/\sim$ через $S(X,a)$.

Твердження 3.7. *Нехай $X\overset{A}{\sim}Y$, $a\in X,b\in Y$ і топологічний простір $S(X\oplus Y)$ є k-простором. Тоді $S(X,a)\overset{A}{\sim}S(Y,b)$.*

□ *Доіедення.* Нехай $i\colon A(X)\to A(Y)$ – спеціальний топологічний ізоморфізм такий, що $i(a)=b$. Тоді відповідно до твердження 3.3 ми можемо задати топологічний ізоморфізм $h\colon A(S(X))\to A(S(Y))$, причому, якщо $i(x_n)=\sum\limits_{i_n=1}^{k_n}\lambda_{i_n}\times y_{i_n}$, тоді

$$h(x_1,x_2,...x_n)=\sum_{i_1=1}^{k_1}\sum_{i_2=1}^{k_2}....\sum_{i_n=1}^{k_n}\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}....\lambda_{i_n}(y_{i_1},y_{i_2}...y_{i_n}).$$

Позначимо через $s_X\colon S(X)\to S(X,a)$, $s_Y\colon S(Y)\to S(Y,b)$ – фактор-відображення, через $s_X^*\colon A(S(X))\to A(S(X,a))$, $s_Y^*\colon A(S(Y))\to A(S(Y,b))$ – їхні гомоморфні продовження. Доведемо, що $h(\ker s_X^*)=\ker s_Y^*$. Підгрупа $\ker s_X^*$ породжена елементами вигляду $(x_1,x_2,...,x_{q-1},a,x_{q+1},...,x_n)-$ $-(x_1,x_2,...x_{q-1},x_{q+1},...x_n)$.

Подіємо на них відображенням h. Оскільки $i(a)=b$, то $k_q=1$, $\lambda_{q_1}=1$, тому

$$h((x_1,x_2,.,x_{q-1},a,x_{q+1},..x_n)-(x_1,x_2,...x_{q-1},x_{q+1},..x_n))=$$
$$=\sum_{i_1=1}^{k_1}\sum_{i_2=1}^{k_2}....\sum_{i_n=1}^{k_n}\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}....\lambda_{i_n}(y_{i_1},y_{i_2}....,y_{i_{q-1}},b,y_{i_{q+1}},...y_{i_n})-$$
$$-\sum_{i_1=1}^{k_1}\sum_{i_2=1}^{k_2}....\sum_{i_n=1}^{k_n}\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}....\lambda_{i_n}(y_{i_1},y_{i_2}....,y_{i_{q-1}},y_{i_{q+1}},...y_{i_n})=$$
$$=\sum_{i_1=1}^{k_1}\sum_{i_2=1}^{k_2}....\sum_{i_n=1}^{k_n}\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}....\lambda_{i_n}((y_{i_1},y_{i_2}....,y_{i_{q-1}},b,y_{i_{q+1}},...y_{i_n})-$$
$$-(y_{i_1},y_{i_2}....,y_{i_{q-1}},y_{i_{q+1}},...y_{i_n})\in\ker s_Y^*.$$

Отже, за твердженням 1.2, існує топологічний ізоморфізм $i_M\colon A(S(X,a)) \to A(S(Y,b))$ такий, що $s_Y^* \circ h = i_M \circ s_X^*$. ■

Нехай $a \in X$. Означимо відношення еквівалентності на $S_A(X)$, поклавши $[x_1, x_2, ...x_n] \sim \sim [a, x_1, x_2, ...x_n]$. Позначимо фактор-простір $S_A(X)/\sim$ через $SP(X,a)$.

Твердження 3.8. *Нехай* $X \overset{A}{\sim} Y$, $a \in X$, $b \in Y$ *і топологічний простір* $S(X \oplus Y)$ *є* k*-простором. Тоді* $SP(X,a) \overset{A}{\sim} SP(Y,b)$.

□ *Доведення.* Нехай $i\colon A(X) \to A(Y)$ – спеціальний топологічний ізоморфізм такий, що $i(a)$=b. Тоді відповідно до твердження 3.6 ми можемо задати топологічний ізоморфізм $h\colon A(S_A(X)) \to A(S_A(Y))$, причому якщо $i(x_n) = \sum_{i_n=1}^{k_n} \lambda_{i_n} \times y_{i_n}$, тоді

$$h[x_1, x_2, ...x_n] = \sum_{i_1=1}^{k_1}\sum_{i_2=1}^{k_2} .... \sum_{i_n=1}^{k_n} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}....\lambda_{i_n}[y_{i_1}, y_{i_2}...y_{i_n}].$$

Позначимо через $s_X\colon S_A(X) \to SP(X,a)$, $s_Y\colon S_A(Y) \to SP(Y,b)$ фактор-відображення, через $s_X^*\colon A(S_A(X)) \to A(SP(X,a))$, $s_Y^*\colon A(S_A(Y)) \to \to A(SP(Y,b))$ – їхні гомоморфні продовження. Доведемо, що $h(\ker s_X^*) = \ker s_Y^*$. Підгрупа $\ker s_X^*$ породжена елементами вигляду $[x_1, x_2, ...x_n] - [a, x_1, x_2, ...x_n]$. Подіємо на них відображенням h. Матимемо

$$\begin{aligned} &h([x_1, x_2, ...x_n] - [a, x_1, x_2, ...x_n]) = \\ &= \sum_{i_1=1}^{k_1}\sum_{i_2=1}^{k_2} .... \sum_{i_n=1}^{k_n} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}....\lambda_{i_n}[y_{i_1}, y_{i_2}...y_{i_n}] - \\ &- \sum_{i_1=1}^{k_1}\sum_{i_2=1}^{k_2} .... \sum_{i_n=1}^{k_n} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}....\lambda_{i_n}[b, y_{i_1}, y_{i_2}...y_{i_n}] = \\ &= \sum_{i_1=1}^{k_1}\sum_{i_2=1}^{k_2} .... \sum_{i_n=1}^{k_n} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}....\lambda_{i_n}([y_{i_1}, y_{i_2}...y_{i_n}] - \\ &-[b, y_{i_1}, y_{i_2}...y_{i_n}]) \in \ker s_Y^*. \end{aligned}$$

Отже, за твердженням 1.2 існує топологічний ізоморфізм $i_{SP}\colon A(SP(X,a)) \to A(SP(Y,b))$ такий, що $s_Y^* \circ h = i_{SP} \circ s_X^*$. ■

Джойн $X * Y$ просторів X та Y зручно уявити собі, як об'єднання відрізків, що з'єднують кожну точку простору X з кожною точкою простору Y. Формально означити джойн можна так: візьмемо добуток $X \times Y \times I$ і утотожнимо кожну точку $(x, y_1, 0)$ з точкою $(x, y_2, 0)$ для довільних $x \in X$ та $y_1, y_2 \in Y$; аналогічно утотожнимо кожну точку $(x_1, y, 1)$ з точкою $(x_2, y, 1)$ для довільних $x_1, x_2 \in X$ та $y \in Y$.

Твердження 3.9. *Нехай* $X \overset{M}{\sim} Y$ *і простір* Z *є локально компактним, або простір* $(X \oplus Y) \times Z$ *є* k*-простором. Тоді* $X * Z \overset{M}{\sim} Y * Z$.

□ *Доведення.* Нехай $X \overset{M}{\sim} Y$, тоді існує спеціальний топологічний ізоморфізм $p\colon F(X) \to \to F(Y)$. Означимо топологічний ізоморфізм $i\colon F(X \times Z \times I) \to F(Y \times Z \times I)$ методом, описаним у твердженні 1.1 роботи [4]. Нехай $x \in X$ і $p(x) = y_1^{\epsilon_1} y_2^{\epsilon_2} ... y_n^{\epsilon_n}$. Розглянемо відображення $i'\colon X \times Z \times I \to F(Y \times Z \times I)$, поклавши $i'(x,z,r)$=$(y_1,z,r)^{\epsilon_1}(y_2,z,r)^{\epsilon_2}...(y_n,z,r)^{\epsilon_n}$. Продовжимо відображення i' до неперервного гомоморфізму $i\colon F(X \times Z \times I) \to F(Y \times Z \times I)$. В аналогічний спосіб можна побудувати гомоморфізм, обернений до i, тобто i є топологічним ізоморфізмом [4]. Позначимо через $p_X\colon X \times Z \times I \to X * Z$, $p_Y\colon Y \times Z \times I \to Y * Z$ R-факторні відображення, через $p_X^*\colon F(X \times Z \times I) \to F(X * Z)$, $p_Y^*\colon F(Y \times Z \times I) \to F(Y * Z)$ — їхні гомоморфні продовження. Щоб довести наше твердження, нам, згідно з твердженням 1.2, достатньо показати, що $i(\ker p_X^*) = = \ker p_Y^*$. Підгрупа $\ker p_X^*$ породжена всеможливими елементами вигляду $u_1 u_2^{-1}$, де u_1=(x_1, z), u_2=(x_2, z) або $u_1 = (x, z_1), u_2 = (x, z_2)$.

Нехай $p(x_1) = y_1^{\epsilon_1} y_2^{\epsilon_2} ... y_n^{\epsilon_n}$. Тоді

$$i(u_1) = i(x_1, z, 0) = (y_1, z, 0)^{\epsilon_1}(y_2, z, 0)^{\epsilon_2}...(y_n, z, 0)^{\epsilon_n}.$$

Отже

$$\begin{aligned} p_Y^*(i(v_1)) &= (y,z,0)^{\epsilon_1}(y,z,0)^{\epsilon_2}...(y,z,0)^{\epsilon_n} = \\ &= (y,z,0)^{\sum_{i=1}^{n}\epsilon_i} = (y,z,0)^1 = (y,z,0). \end{aligned}$$

Аналогічно $p_Y^*(i(v_2)) = (y,z,0)$. Отже, $p_Y^*(i(u_1)) = p_Y^*(i(u_2))$, тобто $i(u_1 u_2^{-1}) \in \ker p_Y^*$.

Другий випадок: $u_1 = (x, z_1, 1)$, $u_2 = (x, z_2, 1)$, $z_1 \neq z_2$. Нехай $p(x) = y_1^{\epsilon_1} y_2^{\epsilon_2} ... y_n^{\epsilon_n}$, тоді

$$i(u_1) = i(x, z_1, 1) = (y_1, z_1, 1)^{\epsilon_1}(y_2, z_1, 1)^{\epsilon_2}...(y_n, z_1, 1)^{\epsilon_n}.$$

Отже, $p_Y^*(i(u_1)) = (y,z,0)^{\epsilon_1}(y,z,0)^{\epsilon_2}...(y,z,0)^{\epsilon_n} = = p_Y^*(i(u_2))$. У такий спосіб $p_Y^*(i(u_1)) = p_Y^*(i(u_2))$, тобто $i(u_1 u_2^{-1}) \in \ker p_Y^*$. ■ Аналогічне твердження справедливе для відношення A-еквівалентності.

Зауваження. Топологічні простори X і Y називаються L-еквівалентними, якщо вільні локально опуклі простори $L(X)$ і $L(Y)$ [3] є лінійно гомеоморфними. Усі твердження цієї роботи будуть справедливими також і для відношення L-еквівалентності.

Література

[1] Граев М.И. Свободные топологические группы // Известия АН СССР Сер. мат. – 1948. – Т.12, № 3, – С. 279–324.

[2] Гуран І.Й., Зарічний М.М. Елементи теорії топологічних груп. – К., 1991. – 75 с.

[3] Марков А.А. О свободных топологических группах // Известия АН СССР, Сер. мат. – 1945. – Т.9, № 1. – С. 3–64.

[4] Окунев О.Г. М-эквивалентность произведений // Труды Московского математического общества. – 1995. – Т.56. – С. 192–205.

[5] Ткаченко М.Г. О полноте свободных абелевых топологических групп // Доклады АН СССР. – 1983. – Т. 269. – С. 299–303.

[6] Choban M.M. Algebraic equivalence of topological spaces // Buletinul A.S. a R.M. Matematica. – 2001. – V. 35. – P. 12–36.

[7] Okunev O.G. A method for consructing examples of M-equivalent spaces // Topology and its Applications. – 1990. – vol. 36. – P. 157–171; Correction: Topology and its Applications. – 1993. – Vol. 49. – P. 191–192.

[8] Pyrch N.M. On M-equivalence of mappings // Matematichni Studii, – 2005. – Vol. 24, N1. – P. 21–30.

[9] Pyrch N.M. M-equivalence of Cylinders, Cones and Joins // Third Summer School in Algebra, Analysis and Topology. – Kozeva. – August 9–20, 2005. – P. 146–147.

[10] Pyrch N.M. On isomorphisms of free abelian topological groups of G-symmetric products and smash products // 5^{th} International Algebraic Conference in Ukraine, Odessa, July 20–27, 2005. – P. 166–167.

CONSTRUCTIONS PRESERVING M-EQUIVALENCE

N.M. Pyrch

Ukrainian Academy of Printing,
79020, Lviv, 19, Pidgolosko Str., Ukraine

Generalization of the Okunev's theorem on special isomorphisms of the free abelian topological groups is given and constructions preserving relation M-equivalence of the Tychonoff spaces are presented.

Keywords: free topological group, M-equivalence, A-equivalence, join.

2000 MSC: 22A05

УДК: 512.546