

Цеолитовые молекулярные сита. – М.: Мир, 1976. – 778 с. 11. Роговой М.И. Технология искусственных пористых заполнителей и керамики – М.: Стройиздат, 1994. – 315 с. 12. Овчаренко Г.И., Свиридов В.Л., Казанцева Л.К. Цеолиты в строительных материалах. – Барнаул: Изд-во АлтГТУ, 2000. – 320 с. 13. Горшков В.С., Тимашев В.В., Савельев В.Г. Методы физико-химического анализа вяжущих веществ: Учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 1984. – 335 с. 14. Минералогическая энциклопедия / Под ред. К. Фрея. – Л.: Недра, 1985. – 511 с. 15. Семушин В.Н. Рентгенографический определитель цеолитов – Новосибирск: Наука, 1986. – 126 с. 16. Petrov S.L. X-ray quantitative determination of mordenite in zeolite rock // Докл. Болг. АН. – 1984. – Т. 37. – № 2. – С. 179–182. 17. Белицкий И.А., Букин Г.В., Топор Н.Д. Термографическое исследование цеолитов // Материалы по генетической и экспериментальной минералогии. – Новосибирск: Изд-во ВО АН СССР, 1972. – Т. 7.– С. 255–309. 18. Van Reewijk L.P. The thermal dehydration of natural zeolites. – Wageningen. – Netherlands. – Madedelingen Landboeahogeschool. – 1974. – 88 p. 19. Глуховский В.Д., Жукова Р.С. Синтез щелочных алюмосиликатов на основе глин и гидроксида калия // Материалы III Всесоюз. науч. конф. “Шлакощелочные цементы, бетоны и конструкции”. – К.: КИСИ, 1989. – Т. 1. – С. 42–44.

УДК 624.075: 539.3

О.Р. Давидчак

Національний університет “Львівська політехніка”,  
кафедра будівельної механіки

## РОЗРАХУНОК РАМ ІЗ ДОВІЛЬНИМ РОЗПОДІЛОМ МАСИ ТА РУХОМИМИ ВУЗЛАМИ НА ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ

© Давидчак О.Р., 2007

**Запропоновано методику дослідження вільних коливань рам із довільним розподілом мас та рухомими вузлами, розроблену на основі алгоритму методу граничних елементів і теорії квазидиференціальних рівнянь.**

**The method of research of free vibrations of frames is offered with the arbitrary division of the masses and mobile knots, developed on the basis of algorithm of method of maximum elements and theory quasi-differential equalizations.**

**Вступ. Стан проблеми.** Важливим етапом проектування рамних систем є визначення їх динамічних характеристик (частот вільних коливань, амплітуд вимушених коливань, динамічного коефіцієнта). Під час визначення цих параметрів у практичних методах розрахунку споруду із безмежним ступенем вільності заміняють системою із скінченною кількістю ступенів вільності шляхом зведення розподілених мас (власної ваги конструкції та навантаження) до зосереджених точкових мас. Цей підхід використовується і в сучасних програмних комплексах автоматизованого проектування, в основу яких покладено метод скінченних елементів. Проте відомо, що заміна пружної системи з безмежною кількістю ступенів вільності на системи із скінченною кількістю вільностей задовільно визначає тільки першу частоту, а збільшення точності досягається дробленням сітки скінченних елементів із відповідним збільшенням порядку системи рівнянь, до яких зводиться розрахунок. Цього недоліку позбавлений метод граничних елементів [1]. Проте він також потребує певних спрощень за вибору розрахункової схеми, якщо система має зосереджені маси або змінну жорсткість.

**Мета роботи** – розробити методику розрахунку та чисельного дослідження рам із рухомими вузлами, як системи із дискретно-неперервними розподілами параметрів (змінна жорсткість, довільний розподіл та розташування мас вздовж стрижнів) на динамічні впливи. У запропонованій методиці використано для знаходження частот і форм власних коливань рам алгоритм методу граничних елементів (МГЕ) та розв’язки рівнянь коливань стрижнів на основі теорії квазидиференціальних рівнянь.

У цій роботі пропонується до розрахунку рам використати алгоритм методу граничних елементів у поєднанні із розв’язком квазидиференціальних рівнянь з узагальненими коефіцієнтами.

**Методика розрахунку.** Задачі динаміки окремих стрижнів із довільним розподілом параметрів зводяться до розв’язку лінійних диференціальних рівнянь, які задовольняють початковим параметрам стрижнів. Така задача називається задачею Коші. Для описання динаміки стрижневих систем, зокрема рам, можна записати систему лінійних диференціальних рівнянь із взаємопов’язаними початковими параметрами і граничними умовами. Загалом у прямолінійному стрижні можуть відбуватись поперечні (у двох напрямках), поздовжні і крутні коливання. Якщо переміщення малі і матеріал стрижня приймається пружним (дійсний закон пружності Гука), то виконується принцип суперпозиції у межах кожного стрижня. Відповідно до останніх можна об’єднати в одне матричне рівняння розв’язок задачі Коші для перелічених чотирьох видів коливань.

Для апробації запропонованої методики розрахунку розглянемо плоску раму та коливання у її площині (рисунок).

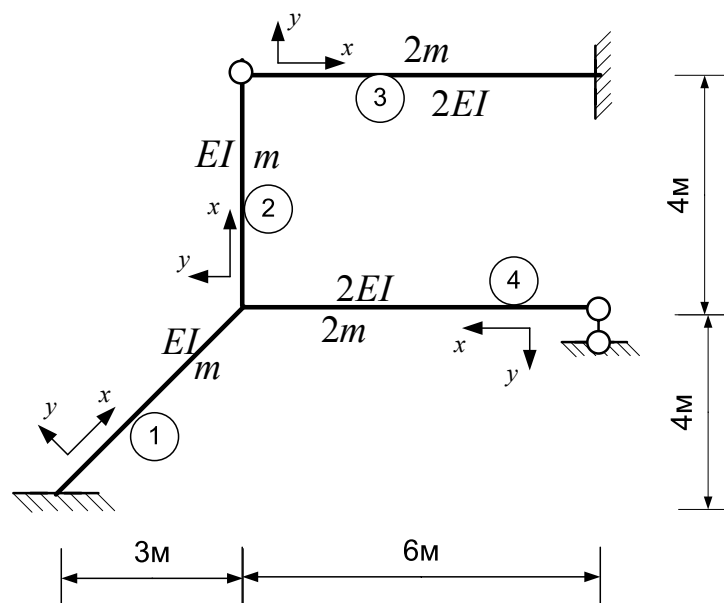


Схема рами із номерами стрижнів і системами координат

Диференціальне рівняння поперечних коливань стрижня має такий вигляд [2]:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} (m^*(x) \cdot y(x,t)) = -q^*(x,t), \quad (1)$$

де  $q^*(x,t)$  – задане зовнішнє навантаження;  $m^*(x) = m(x) + \sum M_i \delta(x - x_i)$  – погонна маса стрижня, причому  $m(x)$  звичайна функція, а  $M_i$  – маса вантажів, зосереджених у перерізах  $x = x_i$ .

Використавши метод розділення змінних Фур'є, переходимо до рівняння

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI(x) \cdot \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right) - m^*(x) \cdot \omega^2 \cdot v(x) = -q(x). \quad (2)$$

Рівняння (2) повинно задовольняти початковим параметрам:

$$v(0) = v_0; v'(0) = \varphi(0); EI(0)v''(0) = -M(0); (EI(0)v'')' = -Q(0). \quad (3)$$

Розв'язок задачі Коші (2, 3) для окремого стрижня можна записати у матричному вигляді

$$\begin{pmatrix} y(x) \\ \varphi(x) \\ M(x) \\ Q(x) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11}(x) & B_{12}(x) & B_{13}(x) & B_{14}(x) \\ B_{21}(x) & B_{22}(x) & B_{23}(x) & B_{24}(x) \\ B_{31}(x) & B_{32}(x) & B_{33}(x) & B_{34}(x) \\ B_{41}(x) & B_{42}(x) & B_{43}(x) & B_{44}(x) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y(0) \\ \varphi(0) \\ M(0) \\ Q(0) \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} G(x, \xi) \\ G^{[1]}(x, \xi) \\ G^{[2]}(x, \xi) \\ G^{[3]}(x, \xi) \end{pmatrix} \cdot q(\xi) d\xi \quad (4)$$

або у скороченому записі

$$Y(x) = B(x) \cdot Y(0) + P(x), \quad (5)$$

де  $Y(x)$  – вектор параметрів напружено-деформованого стану стрижня у точці  $x$ ;  $Y(0)$  – вектор початкових параметрів стрижня;  $P(x)$  – вектор навантаження;  $B(x)$  – фундаментальна матриця диференціального рівняння (2), яку отримаємо за формулою [3]

$$B(x) = \prod_{k=1}^m (E + \Delta C(x_k)) \times B^*(x_k - 0, x_{k-1}), \quad (6)$$

де  $E$  – одинична матриця  $4 \times 4$ ;  $B^*(x_k - 0, x_{k-1})$  – еволюційний оператор диференціального рівняння

$$(EIy'''' = 0; \text{ для стрижня із сталою жорсткістю } B^*(\alpha + h, \alpha) = \begin{pmatrix} 1 & h & \frac{h^2}{2EI} & \frac{h^3}{6EI} \\ 0 & 1 & h & \frac{h^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; m = \frac{x}{h}; h = \frac{l}{n}; n -$$

кількість ділянок, на які розбивається стрижень за апроксимації коефіцієнтів диференціальних рівнянь;

$$\Delta C(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta a_1(x) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \Delta a_1(x_k) \sim -\omega^2 \left( hm_0 + \sum_{i=1}^m M_i \delta(x - x_i) \right). \quad (10)$$

Розглянемо для прикладу раму на рисунку, утворену із чотирьох стрижнів.

Об'єднуючи розв'язки рівняння коливань кожного стрижня в одне матричне рівняння за алгоритмом, описаним в [1], отримаємо систему рівнянь такої самої будови, як і в (5). Матриця  $B$  перетвориться у квазидіагональну, а вектори  $Y(x)$  і  $Y(0)$  будуть містити параметри деформівного стану усіх стрижнів у довільній і початковій точках:

$$B = \begin{pmatrix} B_1(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_3(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_4(x) \end{pmatrix}; Y(x) = \begin{pmatrix} Y_1(x) \\ Y_2(x) \\ Y_3(x) \\ Y_4(x) \end{pmatrix}; Y_0 = \begin{pmatrix} Y_{01} \\ Y_{02} \\ Y_{03} \\ Y_{04} \end{pmatrix}; P(x) = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

Граничні і початкові параметри різних стрижнів системи пов'язані рівняннями рівноваги й сумісності переміщень вузлів. Це дає змогу за граничного значення змінної  $x=l$  перенести граничні параметри стрижнів із вектора  $Y$  на місце нульових параметрів вектора  $Y_0$ . При цьому вектор  $Y$  стає нульовим і вилучається із розгляду. У матриці  $B$  відповідні стовпчики замінюються нульовими і вводяться елементи, які компенсують перенесення параметрів. Тоді вектор  $Y_0^*$  міститиме вже невідомі граничні і початкові параметри усіх стрижнів системи відповідно до методу граничних елементів. Перетворення виконуємо за такою схемою:

$$Y(l) = B(l) * Y_0 + P(l) \rightarrow B(l) * Y_0 - Y(l) = -P(l) \rightarrow B^*(l) * Y_0^* = -P(l). \quad (12)$$

Отже, розв'язування задачі зводиться до розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь стосовно невідомих початкових і кінцевих параметрів стрижнів (кінематичних і статичних параметрів вузлів).

За вільних коливань вектор навантаження дорівнює нулю і із умови існування нетривіального розв'язку однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$B^*(l) * Y_0^* = 0, \quad (13)$$

отримаємо частотне рівняння

$$|B^*(l)| = 0. \quad (14)$$

Після визначення коренів рівняння (14) можна знайти форми і відносні амплітуди вільних коливань. Для цього визначену частоту вільних коливань підставляємо в аргумент стрибків матриці  $B$  (10) і розв'язуємо рівняння (13) за одиничного значення одного із параметрів вектора  $Y_0^*$ .

Запропонований алгоритм розрахунку може бути використаний для визначення параметрів вимушених гармонійних коливань стрижневих систем із дискретно-неперервними розподілами параметрів, розв'язку задач стійкості тощо.

У таблиці наведені значення частот вільних коливань рами на рисунку, отримані методами граничних елементів із використанням функцій акад. А.Н. Крилова [1], методом скінченних елементів для розрахункової схеми із приведеними вузловими масами [8] і запропонованою методикою. Таблиця свідчить, що похибка результатів, отриманих авторською методикою для першої частоти, не перевищує 4 % порівняно із МГЕ для вибраної моделі, а для вищих частот практично результати збіглися. Проте наведений приклад лишень частковий випадок у використанні цієї методики, яка розроблена практично для довільного дискретно-неперервного розподілу параметрів вздовж стрижнів (змінна жорсткість, довільний розподіл та розташування мас).

#### Частоти вільних коливань рами

Номер частоти	МГЕ	Авторський метод	МСЕ
1	$0,0762 \sqrt{EI/m}$	$0,0733 \sqrt{EI/m}$	$0,096 \sqrt{EI/m}$
2	$0,2662 \sqrt{EI/m}$	$0,2661 \sqrt{EI/m}$	$0,543 \sqrt{EI/m}$
3	$0,405 \sqrt{EI/m}$	$0,411 \sqrt{EI/m}$	-
4	$0,448 \sqrt{EI/m}$	$0,448 \sqrt{EI/m}$	-

У традиційному МГЕ зосереджені маси замінюються еквівалентними розподілами, що призводить, як показано у [3], до похибки, яка зростає із зростанням номера частоти.

Для рами на рисунку описані матриці мають такий вигляд:

$$Y(\ell) = \begin{bmatrix} y_1(\ell) = y_2(0) \cdot \cos^{-1} \alpha \\ \varphi_1(\ell) = \varphi_2(0) \\ M_1(\ell) \\ Q_1(\ell) \\ y_2(\ell) = 0 \\ \varphi_2(\ell) \\ M_2(\ell) = 0 \\ Q_2(\ell) \\ y_3(\ell) = 0 \\ \varphi_3(\ell) = 0 \\ M_3(\ell) \\ Q_3(\ell) \\ y_4(\ell) = -y_2(0) \cdot \operatorname{tg} \alpha \\ \varphi_4(\ell) = \varphi_2(0) \\ M_4(\ell) = -M_1(\ell) + M_2(0) \\ Q_4(\ell) = \sin^{-1} \alpha \cdot (Q_1(\ell) - Q_2(0) \cos \alpha - Q_3(0) \sin \alpha) \end{bmatrix}; Y_o^* = \begin{bmatrix} y_1(0) = 0; M^{0-1}(\ell) \\ \varphi_1(0) = 0; Q_1(\ell) \\ M_1(0) \\ Q_1(0) \\ y_2(0) \\ \varphi_2(0) \\ M_2(0) \\ Q_2(0) \\ y_3(0) = y_2(0) \cdot \operatorname{tg} \alpha; Q_2(\ell) \\ \varphi_3(0) \\ M_3(0) = 0; \varphi_2(\ell) \\ Q_3(0) \\ y_4(0) = 0; M_3(\ell) \\ \varphi_4(0) \\ M_4(0) = 0; Q_3(\ell) \\ Q_4(0) \end{bmatrix};$$

$$B^*(l) = \begin{bmatrix} . & . & B_{13}^1 & B_{14}^1 & -\cos^{-1} \alpha & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & B_{23}^1 & B_{24}^1 & . & -1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ -1 & . & B_{33}^1 & B_{34}^1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & -1 & B_{43}^1 & B_{44}^1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & B_{11}^2 & B_{12}^1 & B_{13}^1 & B_{14}^1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & B_{21}^1 & B_{22}^1 & B_{23}^1 & B_{24}^1 & . & . & -1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & B_{31}^1 & B_{32}^1 & B_{33}^1 & B_{34}^1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & B_{41}^1 & B_{42}^1 & B_{43}^1 & B_{44}^1 & -1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & \operatorname{tg} \alpha \cdot B_{11}^3 & . & . & . & B_{12}^3 & B_{14}^3 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & \operatorname{tg} \alpha \cdot B_{21}^3 & . & . & . & B_{22}^3 & B_{24}^3 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & \operatorname{tg} \alpha \cdot B_{31}^3 & . & . & . & B_{23}^3 & B_{34}^3 & -1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & \operatorname{tg} \alpha \cdot B_{41}^3 & . & . & . & B_{24}^3 & B_{44}^3 & . & . & -1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & \operatorname{tg} \alpha & . & . & . & . & . & . & . & B_{12}^4 & . & B_{14}^4 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & -1 & . & . & . & . & . & . & B_{22}^4 & . & B_{24}^4 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & -1 & . & . & . & . & . & B_{32}^4 & . & B_{34}^4 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & \operatorname{ctg} \alpha & . & . & . & 1 & B_{42}^4 & . & B_{44}^4 & . & . & . \end{bmatrix}$$

У матриці  $B^*$  крапками (“.”) позначені нульові члени.

**Висновок.** Отримано нову методику розрахунку на вільні коливання пружних стрижневих систем із дискретно неперервним розподілом параметрів, яка має певні переваги над класичними

відомими методами. Ця методика дає змогу отримувати нові результати у дослідженні динаміки стрижневих систем.

1. Баженов В.А., Даценко А.Ф., Коломиец Л.В., Оробей В.Ф. *Строительная механика: Специальный курс. Применение метода граничных элементов.* – Одесса: Астропринт, 2001. – 240 с.  
2. *Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений / Под ред. А.Ф. Смирнова.* – М.: Стройиздат, 1984. – 415 с.  
3. Давидчак О.Р., Тацій Р.М., Ушак Т.І. Розв'язок задач динаміки дискретно-неперервних стрижневих систем методом граничних елементів з апроксимацією коефіцієнтів диференціальних рівнянь // *Вісн. Нац. ун-ту "Львівська політехніка".* – 2004. – № 495. – С. 62–64.  
4. Давидчак О., Тацій Р. Розв'язок задач динаміки і стійкості стержневих систем із дискретно-неперервним розподілом параметрів // *ZESZYTY NAUKOWE Politechniki Rzeszowskiej. Budownictwo i inżynieria srodowiska.* – Rzeszow, 2004. – Z. 37. – С. 57–60  
5. Давидчак О.Р. Розрахунок рам як дискретно-неперервної стрижневої системи на вільні коливання // *Вісн. Нац. ун-ту "Львівська політехніка".* – 2004. – № 520. – С. 53–56.  
6. Тацій Р., Давидчак О. *Lbyfvsxyf cnsqrsent rjucnherws] ghb ls] ckslre.xj] cbkb d evjdf[ dskmyuj gjkmjne* // *6<sup>th</sup> International Scitntific Conference Aktualne problemy budownictwa i inzynierii srodowiska. Politechniki Rzeszowskiej.* – Rzeszow, 2001. – С. 368–371.  
7. Тацій Р., Давидчак О. Про оптимальне розташування мас на консолі при автоколиванні втраті стійкості // *5<sup>th</sup> International Scitntific Conference Aktualne problemy budownictwa i inzynierii srodowiska. Politechniki Rzeszowskiej.* – Rzeszow, 2000. – С. 547–550.

УДК 624.154.54

Б.Г. Демчина, В.Г. Корвін, В.В. Корвін, І.Є. Демчина  
Національний університет "Львівська політехніка",  
кафедра будівельних конструкцій та мостів

## ВИПРОБУВАННЯ БУРОНАБИВНИХ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ ПАЛЬ НА ГОРИЗОНТАЛЬНЕ ЗУСИЛЛЯ НА ЗАБУДОВАНИХ ТЕРИТОРІЯХ

© Демчина Б.Г., Корвін В.Г., Корвін В.В., Демчина І.Є., 2007

**Проведено експериментальні випробування натурних зразків палей на дію горизонтального зусилля, наведено порівняння експериментальної та розрахункової несучої здатності, визначено точки умовного защемлення палей в ґрунті.**

**The experimental tests of standards of models of piles on the action of horizontal effort are conducted. Comparison of experimental and calculation bearing capabilities is conducted. Certain points of the conditional jamming of piles in soil are defined.**

**Постановка проблеми.** На вул. Головацького, 23 у м. Львові планується будівництво багатоповерхового житлового комплексу. Враховуючи, що проєктовані будинки є вставками між існуючими житловими громадськими та виробничими будинками, застосування забивних палей може значно погіршити технічний стан існуючих будинків, які після тривалої експлуатації (близько 100 років), мають значні пошкодження. У таких випадках є доцільним використання буронабивних палей. Для ефективного їх використання необхідно експериментально перевірити їх несучу здатність на дію горизонтального зусилля у ґрунтових умовах будівельного майданчика.

**Постановка завдання.** Завданням випробування було встановлення експериментальної несучої здатності палей на горизонтальне навантаження і порівняння її з розрахунковою.

**Виклад основного матеріалу.** Буронабивні палі виготовляють у попередньо пробурених свердловинах, в яких встановлюють металеву трубу або арматурний каркас і вкладають бетон. Останнім часом цим палям надають перевагу, оскільки порівняно із іншими варіантами