

damping predictions for laminated plates – theoretical foundations (in press) 6. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М.: Наука, 1967. – 444 p. 7. Hansaka, N. Mifune, Development of a new type high grade damper: magnetic-vibration-damper, Quarterly Report of Railway Technical Research Institute (Japan) 35 (1994). – 199–201. 9. Raja S., Rohwer K., Rose M. Modeling and active vibration control of laminated composite beams, Journal of Intelligent Material Systems and Structures 10 (1999). – 890–899. 10. Rao M.D. Recent applications of viscoelastic damping for noise control in automobiles and commercial airplanes // Journal of Sound and Vibration 262 (2003). – 457–474. 11. Carneala P., Giovanardib M., Fullerc C.R., Palumbo D. Re-Active Passive devices for control of noise transmission through a panel. Journal of Sound and Vibration 309 (2008). – 495–506.

УДК 534.111

П.М. ГАЩУК, І.І. НАЗАР, Б.І. СОКІЛ*

Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра експлуатації та ремонту автомобільної техніки,
*кафедра теоретичної механіки

ВПЛИВ НЕЛІНІЙНОГО ДЕМПФУВАННЯ НА РЕЗОНАНСНІ ЯВИЩА ГНУЧКОГО ЕЛЕМЕНТА МЕХАНІЧНОГО ПРИВОДУ

© Гащук П.М., Назар І.І., Сокіл Б.І., 2009

Досліджено вплив нелінійного демпфування на динамічні процеси у приводах з гнучким робочим елементом у разі змінної сили його натягу. З використанням методу Бубнова-Гальоркіна отримано амплітудні співвідношення, на основі яких побудовано залежності резонансної амплітуди коливань від величини розбалансування частот.

Influence of nonlinear dampfiring is explored on dynamic processes in drives with a flexible working element in the case of variable force of his draw. With the use of Bubnov-Galerkin method correlations of peaks, on the basis of which dependences of resonance amplitude of vibrations are built on the size of disbalancing of frequencies, are got.

Вступ. Вплив різних чинників (наприклад, періодичних гармонійних і імпульсних чи погано впорядкованих і цілком випадкових сил) на механічний привід або безпосередньо на його гнучкий робочий елемент призводить, здебільшого, до порушення нормального його функціонування. Динамічні процеси, які відбуваються, вивчені недостатньо мірою, оскільки їх аналітичне дослідження пов'язане із значними труднощами – відсутністю точних чи наближених методів побудови розв'язків диференціальних рівнянь, які слугують математичною моделлю коливань гнучкого елемента привода. Через наявність у ньому мішаної похідної за лінійною і часовою змінними не вдається застосувати для описання динамічних процесів навіть спрощених (лінійних) їх аналогів такі класичні методи інтегрування рівнянь з частинними похідними, як Фур'є чи Д'Аламбера.

Аналіз відомих досліджень і публікацій. Різні підходи до дослідження динамічних процесів у приводах з гнучким робочим елементом та в подібних системах, які визначають вплив швидкості руху та нелінійних сил на амплітудно-частотну характеристику коливань, виконували, наприклад, в [1–7]. Зокрема, в [1–4] для дослідження відзначених систем використовувались методи Ван-дер-Поля чи Бубнова-Гальоркіна, які дають змогу отримати рівняння у стандартному вигляді, у [5–7] запропоновано так званий хвильовий підхід, який дає змогу точніше отримати вказані рівняння у

стандартному вигляді. Проте такі важливі питання, як вплив змінної сили натягу гнучкого елемента та нелінійного демпфування на динаміку процесу і його стійкість не розглядали. Відзначене і є метою подальших досліджень.

Постановка задачі. Математичною моделлю поперечних коливань гнучкого робочого елемента механічного привода, за умови малої нелінійності (як за рахунок відновлюючої сили, так і сил опору), у змінних Ейлера [8] є диференціальне рівняння

$$u_{tt}(x,t) + 2Vu_{xt}(x,t) - \left(\frac{S}{\rho} - V^2 \right) u_{xx}(x,t) = \varepsilon f(u, u_x, u_t), \quad (1)$$

в якому $u(x,t)$ – поперечне переміщення перерізу гнучкого робочого елемента привода з координатою x в довільну мить часу t ; V – постійна складова швидкості його поздовжнього руху; S – величина натягу у гнучкому елементі привода; ρ – його погонна маса; $f(u, u_x, u_t)$ – аналітична функція, яка характеризує відхилення пружних властивостей гнучкого елемента від лінійного закону, нелінійні та іншої природи сили, ε – малий параметр, який вказує на малу величину зазначених сил. Для диференціального рівняння (1) розглядатимемо крайові умови вигляду

$$u(x,t)|_{x=0} = u(x,t)|_{x=l} = 0, \quad (2)$$

які показують, що у деяких фіксованих точках $x = 0$, $x = l$ (скажімо, в точках дотику гнучкого елемента до шківів) відсутні вертикальні переміщення.

Як і в [1] розглядатимемо найцікавіший з практичного погляду випадок, а саме змінного натягу гнучкого елемента привода, проте сила демпфування нижче задовольняє нелінійному закону. Вважатимемо, що натяг у гнучкому елементі змінюється відповідно до закону $S = S_0 + S_1 \cos \omega t$ (S_0 – стала складова сили натягу, S_1 – амплітуда змінної, гармонійної, складової натягу, ω – її частота). Таке його представлення охоплює багато практичних задач. З урахуванням зазначеного, диференціальне рівняння (1) набуває вигляду

$$u_{tt}(x,t) + 2Vu_{xt} - \left(\frac{S_0}{\rho} - V^2 \right) u_{xx}(x,t) = \frac{S_1}{\rho} u_{xx} \cos \omega t + \varepsilon f(u, u_x, u_t). \quad (3)$$

Метод аналізу. Користуючись принципом одночастотності нелінійних коливань механічних систем, розв'язок рівняння (3) відповідно до методу Бубнова-Гальоркіна [9] подамо у вигляді

$$u(x,t) = X_k(x)T_k(t),$$

де $X_k(x)$ – функції, що визначають форми коливань і справджують крайові умови (2): $X_k(0) = X_k(l) = 0$.

Легко переконатись, що такими функціями буде система функцій $\{X_k(x)\} = \left\{ \sin \frac{k\pi}{l} x \right\}$. У такому разі,

враховуючи повноту і ортонормованість системи функцій $\{X_k(x)\}$, із (3) після нескладних перетворень, для знаходження невідомих функцій $T_k(t)$, отримуємо звичайні диференціальні рівняння

$$\ddot{T}_k + \left(\frac{S_0}{\rho} - V^2 \right) \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 T_k = \frac{S_1}{\rho} \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 T_k \cos \omega t + \varepsilon \bar{f}(T_k, \dot{T}_k),$$

де $\bar{f}(T_k, \dot{T}_k) = \frac{1}{p} \int_0^l f(u, u_x, u_t) X_k(x) dx$, $p = \frac{l}{2}$.

Нижче розглядатимемо найцікавіший випадок, а саме, коли частота гармонійної складової сили натягу близька до частоти власних коливань гнучкого елемента. Тоді справедливе співвідношення

$$S_0 = \rho \left(\frac{l}{k\pi} \right)^2 (\omega^2 - \alpha \omega^2) + \rho V^2.$$

Зазначений випадок називатимемо резонансним. У наведеному вище співвідношенні $\alpha = \left(\frac{S_0}{\rho} - V^2\right) \left(\frac{k\pi}{\omega l}\right)^2 - 1$ – відхилення власної частоти від частоти вимушуючої сили (розбалансування частот). Отже, рівняння коливань гнучкого робочого елемента привода набуває вигляду

$$\ddot{T} + \omega^2 T = \omega^2 \alpha T + \gamma T \cos \omega t + \varepsilon \bar{f}(T, \dot{T}),$$

де $\gamma = -\frac{S_1}{\rho} \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$ – коефіцієнт параметричного збурення.

Подальші дослідження виконано для випадку $f(u, u_x, u_t) = k_1 u_x^2 u_{xx} - k_2 u_t^m$ (m – непарне), і він відповідає нелінійному демпфуванню та найпростішій моделі нелінійної відновлюючої сили.

Так у випадку $m = 3$ функція $\varepsilon \bar{f}(T, \dot{T})$ приймає вигляд

$$\varepsilon \bar{f}(T, \dot{T}) = \delta T^3 - \beta \dot{T}^3,$$

де $\delta = -\frac{1}{4} k_1 \left(\frac{k\pi}{l}\right)^4$ – нелінійна складова відновлювальної сили, $\beta = \frac{3}{4} k_2$ – коефіцієнт нелінійного демпфування.

З урахуванням зазначеного вище рівняння коливань гнучкого робочого елемента привода матиме вигляд

$$\ddot{T} + \omega^2 T = \omega^2 \alpha T + \gamma T \cos \omega t + \delta T^3 - \beta \dot{T}^3. \tag{4}$$

Розв’язок рівняння (4) шукатимемо у вигляді

$$T = r \cos \omega t + s \sin \omega t, \tag{5}$$

якому відповідає амплітуда коливань $a = \sqrt{r^2 + s^2}$.

Невідомі коефіцієнти r, s знаходимо, враховуючи співвідношення

$$\int_0^{2\pi} \tilde{f}(t) \cos \omega t dt = \int_0^{2\pi} \tilde{f}(t) \sin \omega t dt = 0,$$

де $\tilde{f}(t)$ відповідає значенню правої частини рівняння (4) при $T = r \cos \omega t + s \sin \omega t$ та $\dot{T} = -r\omega \sin \omega t + s\omega \cos \omega t$. Зазначене дає змогу отримати для знаходження невідомих параметрів r, s систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} \left(\omega^2 \alpha + \frac{3}{4} \delta a^2 + \frac{\gamma}{2}\right) s + \frac{3}{4} \beta \omega^3 a^2 r &= 0, \\ \left(\omega^2 \alpha + \frac{3}{4} \delta a^2 - \frac{\gamma}{2}\right) r - \frac{3}{4} \beta \omega^3 a^2 s &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Система (6) має нетривіальний розв’язок, коли справджуються співвідношення

$$\omega^2 \alpha = -\frac{3}{4} \delta a^2 \pm \sqrt{\frac{1}{4} \gamma^2 - \frac{9}{16} \beta^2 \omega^6 a^4}. \tag{7}$$

Нижче, на рис. 1 показані залежності амплітуди нетривіального розв’язку від розбалансування частот для жорстких і м’яких систем за різних швидкостей руху гнучкого елемента.

Із графічних залежностей очевидно, що у разі зміни знака нелінійної складової відновлювальної сили змінюється нахил резонансних кривих. Якщо розглядувана система м’яка ($\delta < 0$), то резонансні криві спрямовані праворуч, якщо ж жорстка ($\delta > 0$) – ліворуч.

Діючи подібно для випадку $m = 5$, алгебраїчні рівняння для визначення невідомих параметрів r, s набувають вигляду

$$\left(\omega^2 \alpha + \frac{3}{4} \delta a^2 + \frac{\gamma}{2}\right) s + 1,964 \beta \omega^5 a^4 r = 0,$$

$$\left(\omega^2\alpha + \frac{3}{4}\delta a^2 - \frac{\gamma}{2}\right)r - 1,964\beta\omega^5 a^4 s = 0, \tag{8}$$

де $\beta = 0,313k_2$.

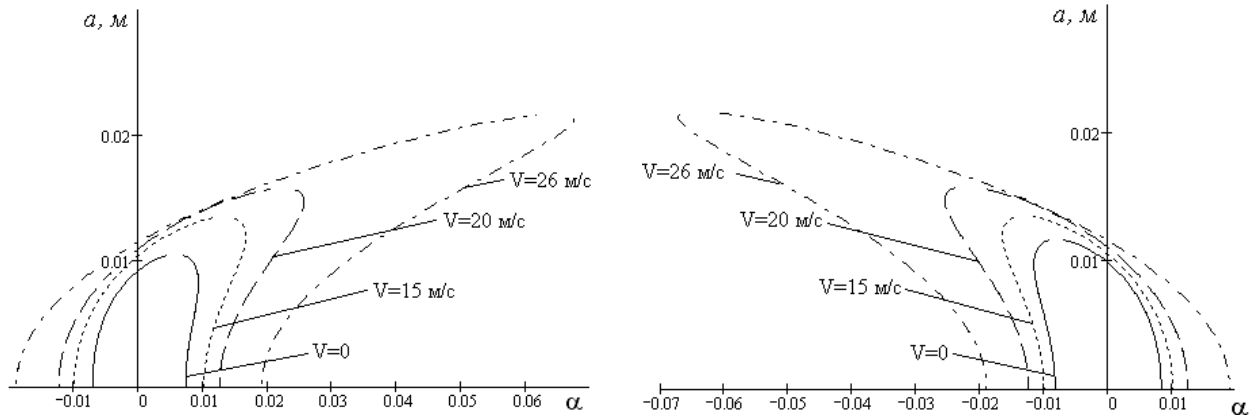


Рис. 1. Залежність резонансної амплітуди коливань гнучкого елемента привода від параметра α за різних значень нелінійної складової відновлювальної сили: а) $\delta < 0$, б) $\delta > 0$

Нетривіальні розв’язки в цьому випадку існують за виконання умови

$$\omega^2\alpha = -\frac{3}{4}\delta a^2 \pm \sqrt{\frac{1}{4}\gamma^2 - 3,857\beta^2\omega^{10}a^8}. \tag{9}$$

На рис. 2 наведені залежності резонансної амплітуди від розбалансування частот за різних швидкостей поздовжнього руху гнучкого елемента.

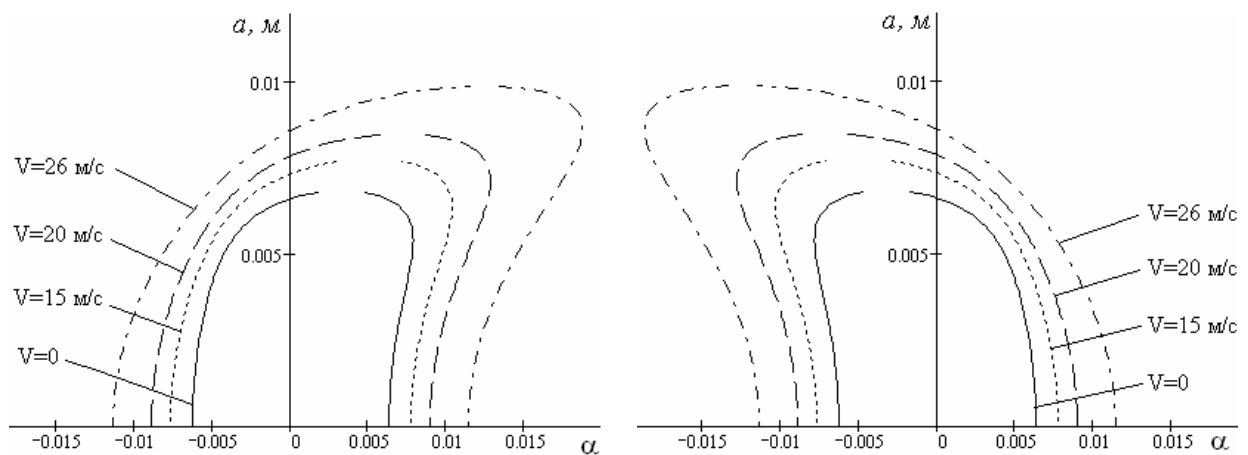


Рис. 2. Залежність резонансної амплітуди коливань гнучкого елемента привода від параметра α , $m = 5$

Висновки. Порівнюючи графічні залежності для різних моделей сили опору, можна стверджувати: а) із зростанням ступеня нелінійності сили опору величина резонансної зони звужується; б) величина резонансної амплітуди для більших нелінійностей є меншою (для однакових коефіцієнтів β); в) із зростанням швидкості поздовжнього руху резонансна зона розширюється, а величина резонансного значення амплітуди зростає.

Треба зауважити, що викладену методику можна узагальнити і на випадок складніших систем, зокрема збурених крайових умов.

1. Гацук П.М., Назар І.І. Параметричне збурення гнучкого робочого елемента механічного приводу // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні: Укр. міжвідомч. наук.-техн. зб. – 2008. – Вип. 42. – С. 65–69. 2. Боженко М.В., Сліпчук А.М. Вплив повздовжнього руху на нелінійні поперечні коливання пружних одновимірних систем. // Вісн. Нац. ун-ту “Львівська політехніка”. – 2004. – № 509: Динаміка, міцність та проектування машин і приладів. – С. 25–30. 3. Назар І.І., Сокіл Б.І. Метод Ван-дер-Поля у дослідженні періодичних збурень рухомих одновимірних систем // Вісн. Нац. ун-ту “Львівська політехніка”. – 2006. – № 560: Оптимізація виробничих процесів і технічний контроль у машинобудуванні та приладобудуванні. – С. 71–75. 4. Доценко П.Д. Колебание и устойчивость движущейся полосы // Машиноведение. – 1969. – № 5. – С. 18–24. 5. Мартинців М.П. Сокіл, Б.І., Сокіл М.Б., Вплив імпульсних сил на нелінійні коливання консервативних систем // Наук. вісник: Зб. наук.-техн. праць. – Львів: УДЛТУ, 2003. – Вип. 13.1. – С. 72–81. 6. Сокіл М.Б. Вимушені коливання рухомих середовищ // Вісн. Нац. ун-ту “Львівська політехніка”. – 2006. – № 556: Динаміка, міцність та проектування машин і приладів. – С. 64–68. 7. Харченко Є.В., Сокіл М.Б. Нелінійні процеси у середовищах, які характеризуються поздовжнім рухом і вплив способу закріплення на їх коливання // Вісн. Нац. ун-ту “Львівська політехніка”. – 2007. – № 41: Автоматизація виробничих процесів в машинобудуванні і приладобудуванні. – С. 156–159. 8. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Главная редакция физ.-мат. л-ры, 1972. – С. 27–28. 9. Галеркин Б.Г. Стержни и пластинки // Вестн. инженеров техников. – 1915. – № 19. – С. 23–32.