

П.М. Гащук, І.І. Назар

Національний університет “Львівська політехніка”,  
кафедра експлуатації та ремонту автомобільної техніки

## ВПЛИВ ЗМУШУВАЛЬНОЇ СИЛИ НА ПАРАМЕТРИЧНІ КОЛИВАННЯ ГНУЧКОГО РОБОЧОГО ЕЛЕМЕНТА МЕХАНІЧНОГО ПРИВОДА

© Гащук П.М., Назар І.І., 2008

Досліджується вплив змушувальної сили на параметричні коливання гнучкого робочого елемента привода, який рухається зі сталою швидкістю. Вважається, що його поперечний переріз є сталим, а маса рівномірно розподілена вздовж довжини. Отримано диференціальне рівняння поперечних коливань гнучкого елемента у випадку змінної в часі сили натягу. Використовуючи метод Бубнова–Гальоркіна, приведено його до нелінійної моделі рівняння типу Мат'є. Для конкретного вигляду нелінійних сил отримано співвідношення, що визначають вплив кінематичних і силових факторів на АЧХ коливань.

**Influence of compel force is explored on the parametrical vibrations of flexible working element of drive which moves with permanent speed. It is considered that his transversal cut is permanent, and mass is evenly distributed along length. Differential equalization of transversal vibrations of flexible element is got in the case of variable in time force of draw. Using the method of Bubnov-Galerkin he is resulted to the nonlinear model of equalization Mat'e. For the concrete type of nonlinear forces correlations which determine influencing of kinematics and power factors on AFD of vibrations are got.**

**Задача про динамічні процеси у приводі з гнучким робочим елементом.** Нормальне функціонування привода з гнучким робочим елементом часто порушується різного роду збуреннями (кінематичного чи силового характеру). Метою роботи є дослідження впливу змінної в часі сили натягу гнучкого елемента, а також нелінійних сил на його амплітуду коливань. Вважається, що сила натягу змінюється за гармонійним законом, а нелінійні сили є малими порівняно із максимальним значенням сили натягу.

**Аналіз відомих досліджень і публікацій.** Найпростіші моделі коливань вказаного типу систем (без врахування змінної в часі сили натягу і малої швидкості позадвожнього руху) розглядалися, наприклад, в [1–3], проте наявність у них перелічених вище обмежень значно звужує коло задач, де вони можуть бути застосовані.

**Постановка задачі.** Досліджуються параметричні коливання гнучкого робочого елемента привода, який рухається зі сталою за модулем швидкістю й моделюється як середовище зі сталим

поперечним перерізом і рівномірно розосередженою вздовж довжини масою. Математичною моделлю поперечних його коливань є диференціальне рівняння [4]

$$u_{tt}(x,t) + 2Vu_{xt}(x,t) - \left( \frac{S}{\rho} - V^2 \right) u_{xx}(x,t) = \mathcal{E}f(u, u_x, u_t, \theta), \quad (1)$$

де  $u(x,t)$  – поперечне переміщення перерізу гнучкого робочого елемента привода з координатою  $x$  в довільну мить часу  $t$ ;  $V$  – модуль швидкості  $\mathbf{V}$  його руху;  $S$  – модуль натягу  $\mathbf{S}$  у гнучкому елементі привода;  $\rho$  – погонна маса гнучкого елемента;  $\mathcal{E}f(u, u_x, u_t, \theta)$  – аналітична функція, яка характеризує пружні властивості гнучкого елемента, дисипативні сили і сили іншої природи,  $\varepsilon$  – малий параметр,  $\theta = \mu t$  – період змушувальної сили. До диференціального рівняння (1) долучаємо крайові умови

$$u(x,t)|_{x=0} = u(x,t)|_{x=l} = 0, \quad (2)$$

що відповідають умовам відсутності поперечних переміщень гнучкого елемента привода у деяких фіксованих точках  $x = 0$ ,  $x = l$  (скажімо, в точках дотику гнучкого елемента до шківів).

Значний теоретичний і практичний інтерес становить випадок, коли сила натягу гнучкого елемента привода змінюється відповідно до закону  $S = S_0 + S_1 \cos mt$  ( $m$  – натуральне або близьке до нього число). Таке представлення натягу охоплює багато практичних задач. З урахуванням вказаного, диференціальне рівняння (1) набуває вигляду

$$u_{tt}(x,t) + 2Vu_{xt} - \left( \frac{S_0}{\rho} - V^2 \right) u_{xx}(x,t) = \frac{S_1}{\rho} u_{xx} \cos mt + \mathcal{E}f(u, u_x, u_t, \theta). \quad (3)$$

До того ж, диференціальне рівняння вигляду (3) описує також і поздовжні коливання гнучкого елемента привода (щоправда, окремі величини набувають іншого змісту). Отже, метою роботи є дослідження впливу параметрів  $V$ ,  $S_0$ ,  $S_1$  та нелінійних сил на коливання гнучкого робочого елемента механічного привода.

**Методика дослідження** коливного процесу побудована на знаходженні асимптотичного розв'язку крайової задачі (3), (2). Використовуючи метод Бубнова–Гальоркіна [5], функцію  $u(x,t)$  шукатимемо у вигляді

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^s X_k(x) T_k(t),$$

де  $X_k(x)$  – функції, що справджують крайові умови (2):  $X_k(0) = X_k(l) = 0$ . Легко переконатись, що такими функціями буде система функцій  $\{X_k(x)\} = \left\{ \sin \frac{k\pi}{l} x \right\}$ . Тоді, враховуючи повноту і ортонормованість системи функцій  $\{X_k(x)\}$ , із (3) після нескладних перетворень для знаходження невідомих функцій  $T_k(t)$  отримуємо звичайне диференціальне рівняння

$$\ddot{T}_k + \left( \frac{S_0}{\rho} - V^2 \right) \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2 T_k = \frac{S_1}{\rho} \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2 T_k \cos mt + \bar{\mathcal{E}}f(T_k, \dot{T}_k, \theta),$$

де  $\bar{\mathcal{E}}f(T_k, \dot{T}_k, \theta) = \frac{1}{p} \int_0^l f(u, u_x, u_t, \theta) X_k(x) dx$ ,  $p = \int_0^l \sin^2 \frac{k\pi}{l} x dx = \frac{l}{2}$ .

Розглянемо найцікавіший з теоретичного і практичного поглядів випадок, а саме, коли виконується рівність

$$\left(\frac{S_0}{\rho} - V^2\right) \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 = n^2 - \alpha n^2,$$

де  $n$  – натуральне число,  $\alpha = \left(\frac{S_0}{\rho} - V^2\right) \left(\frac{k\pi}{nl}\right)^2 - 1$ .

Отже, рівняння коливань гнучкого робочого елемента привода для зазначеного випадку матиме вигляд

$$\ddot{T} + n^2 T = n^2 \alpha T + \gamma T \cos mt + \bar{\mathcal{E}}(T, \dot{T}, \theta),$$

де  $\gamma = \frac{S_1}{\rho} \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$  – коефіцієнт параметричного збурення.

Подальші дослідження проведено для випадку, коли сили внутрішнього тертя, сили зовнішнього опору та змущувальні сили з достатньою точністю можна апроксимувати залежністю  $f(u, u_x, u_t, \theta) = -k_1 u_t + k_2 u_x^3 + g(\theta)$ , тоді  $\bar{\mathcal{E}}(T, \dot{T}, \theta) = -\beta \dot{T} + \delta T^3 + g(\theta)$ ,

де  $\beta = \frac{k_1}{\rho} \int_0^l \sin^2 \frac{k\pi}{l} x dx = k_1$  – коефіцієнт демпфування, пропорційний до швидкості,

$\delta = \frac{k_2}{\rho} \left(\frac{k\pi}{l}\right)^3 \int_0^l \sin^4 \frac{k\pi}{l} x dx = \frac{3}{4} k_2 \left(\frac{k\pi}{l}\right)^3$  – нелінійна складова відновлювальної сили,

$g(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} (\chi_j \cos jt + \Delta_j \sin jt)$  – змущувальна сила, яка представлена рядом Фур'є.

З урахуванням вказаного вище рівняння коливань гнучкого робочого елемента привода набуває вигляду

$$\ddot{T} + n^2 T = n^2 \alpha T + \gamma T \cos mt - \beta \dot{T} + \delta T^3 + g(\theta). \quad (4)$$

Для резонансного випадку ( $m = n$ ,  $\mu = n$ ) розв'язок рівняння (4) шукатимемо у вигляді

$$T = r \cos nt + s \sin nt + T^{(0)}, \quad (5)$$

де  $\sqrt{r^2 + s^2} = A$  – амплітуда коливань гнучкого робочого елемента привода,

$$T^{(0)} = \sum_{j=0}^{\infty} (\vartheta_{j^2}^{n^2} n^2 - j^2)^{-1} (\chi_j \cos jt + \Delta_j \sin jt),$$

де  $\vartheta_{j^2}^{n^2} = \begin{cases} 1 & \text{при } n^2 \neq j^2 \\ 0 & \text{при } n^2 = j^2 \end{cases}$ , отже, у цьому випадку  $\vartheta_{j^2}^{n^2} = 1$ .

Підставляючи (5) в (4), після нескладних перетворень отримуємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} \left( n^2 \alpha + \frac{3}{4} \delta A^2 + k \gamma^2 \right) r + \gamma - n \beta s + \chi_n &= 0; \\ \left( n^2 \alpha + \frac{3}{4} \delta A^2 + k \gamma^2 \right) s - \gamma + n \beta r + \Delta_n &= 0, \end{aligned}$$

розв'язок якої  $\{r, s\}$  визначається залежностями

$$\begin{aligned} \left[ \left( n^2 \alpha + \frac{3}{4} \delta A^2 + k \gamma^2 \right)^2 - \gamma^2 + n^2 \beta^2 \right] r &= - \left( n^2 \alpha + \frac{3}{4} \delta A^2 + k \gamma^2 - \gamma \right) \chi_n - n \beta \Delta_n; \\ \left[ \left( n^2 \alpha + \frac{3}{4} \delta A^2 + k \gamma^2 \right)^2 - \gamma^2 + n^2 \beta^2 \right] s &= - \left( n^2 \alpha + \frac{3}{4} \delta A^2 + k \gamma^2 + \gamma \right) \Delta_n + n \beta \chi_n. \end{aligned} \quad (6)$$

Якщо рівності (6) піднести до квадрата, а потім додати – то в результаті отримаємо амплітудне співвідношення

$$\begin{aligned} \left[ \left( n^2 \alpha + \frac{3}{4} \delta A^2 + k \gamma^2 \right)^2 - \gamma^2 + n^2 \beta^2 \right]^2 A^2 &= \left[ \left( n^2 \alpha + \frac{3}{4} \delta A^2 + k \gamma^2 \right)^2 + \gamma^2 + n^2 \beta^2 \right] (\chi_n^2 + \Delta_n^2) + \\ &+ 2 \left( n^2 \alpha + \frac{3}{4} \delta A^2 + k \gamma^2 \right) (\Delta_n^2 - \chi_n^2) \gamma - 4 n \beta \chi_n \Delta_n \gamma. \end{aligned} \quad (7)$$

Резонансні криві будуватимемо для випадку, коли коефіцієнти змущувальної сили пов'язані співвідношенням  $\Delta_n = \pm \chi_n$ , тоді вираз (7) буде бікватратним рівнянням відносно закритих в дужки виразів, що містять параметр  $\alpha$ .

Для початку розглянемо випадок рівних коефіцієнтів ( $\Delta_n = \chi_n$ ) змущувальної сили. Тоді розв'язок (7) відносно  $\alpha$  при  $A \neq 0$  матиме вигляд

$$n^2 \alpha = - \frac{3}{4} \delta A^2 - k \gamma^2 \pm \sqrt{\gamma^2 - n^2 \beta^2 + \chi_n^2 A^{-2} \pm \chi_n A^{-1} \sqrt{4(\gamma - n\beta)\gamma + \chi_n^2 A^{-2}}} \quad (8)$$

Дослідимо обидва розв'язки рівняння (8), які відповідають верхньому знаку перед внутрішнім коренем (+). Дійсні розв'язки рівняння (8) існують, коли вираз під загальним коренем буде додатним, а саме, коли виконуються такі умови:

- а)  $A^2 \leq \frac{\chi_n^2}{4(n\beta - \gamma)\gamma}$ , тобто, коли  $4(\gamma - n\beta)\gamma + \chi_n^2 A^{-2} \geq 0$ ;
- б)  $A^2 \leq \frac{\chi_n^2}{n^2 \beta^2 - \gamma^2}$ , тобто, коли  $\gamma^2 - n^2 \beta^2 + \chi_n^2 A^{-2} \geq 0$ ;
- в)  $A^2 \leq \frac{2\chi_n^2}{(n\beta + \gamma)^2}$ , тобто, коли  $\gamma^2 - n^2 \beta^2 + \chi_n^2 A^{-2} + \chi_n A^{-1} \sqrt{4(\gamma - n\beta)\gamma + \chi_n^2 A^{-2}} \geq 0$ .

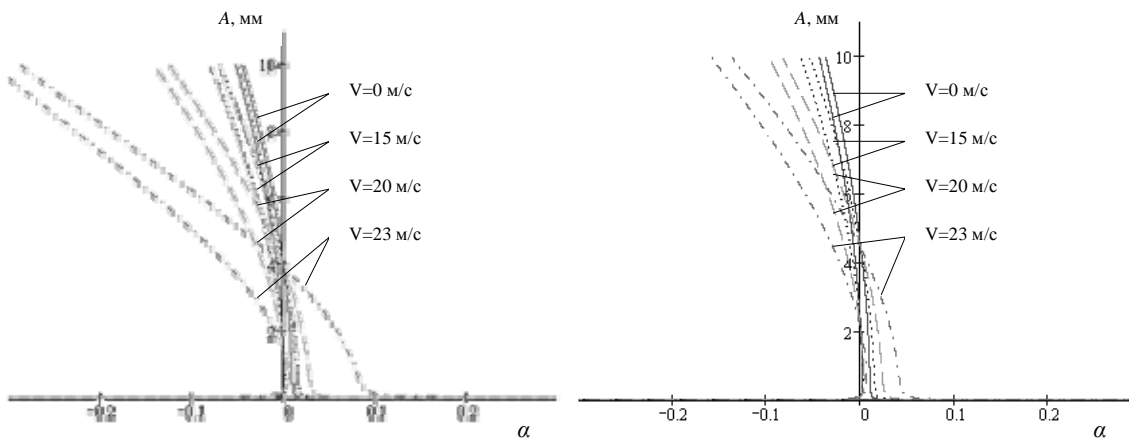
Розглянемо обидва розв'язки рівняння, які відповідають нижньому знаку перед внутрішнім коренем (-). Дійсні розв'язки рівняння (8) існують за таких умов:

- а)  $A^2 \leq \frac{\chi_n^2}{4(n\beta - \gamma)\gamma}$ , тобто, коли  $4(\gamma - n\beta)\gamma + \chi_n^2 A^{-2} \geq 0$ ;
- б)  $A^2 \leq \frac{\chi_n^2}{n^2 \beta^2 - \gamma^2}$ , тобто, коли  $\gamma^2 - n^2 \beta^2 + \chi_n^2 A^{-2} \geq 0$ ;

$$в) A^2 \geq \frac{2\chi_n^2}{(n\beta + \gamma)^2}, \text{ тобто, коли } \gamma^2 - n^2\beta^2 + \chi_n^2 A^{-2} \geq \chi_n A^{-1} \sqrt{4(\gamma - n\beta)\gamma + \chi_n^2 A^{-2}}.$$

Аналогічно знаходяться амплітудні співвідношення, які відповідають умові однакових за значенням, але протилежних за знаком коефіцієнтів змущувальної сили лише з тією різницею, що  $\beta$  замінюється на  $(-\beta)$ .

**Приклад.** Викладену методику дослідження резонансних явищ використано для випадку поперечних коливань гнучкого робочого елемента привода із такими характеристиками:  $l = 0.3\text{ м}$  (довжина гнучкого елемента),  $\rho = 0.2\text{ кг/м}$  (погонна маса). На рисунку представлені резонансні значення амплітуди коливань гнучкого елемента при  $S=120\text{ Н}$  і  $S=140\text{ Н}$  за різних швидкостей його руху.



Резонансні значення амплітуди коливань гнучкого елемента привода при  $S=120\text{ Н}$  (а) і  $S=140\text{ Н}$  (б)

**Висновки.** За наведеними графічними залежностями видно:

- 1) із зростанням швидкості руху гнучкого робочого елемента механічного привода ширина резонансної зони збільшується;
- 2) величина коефіцієнта нелінійної складової відновлювальної сили впливає на кут нахилу резонансних кривих до осі  $\alpha$ ;
- 3) коефіцієнт параметричного збурення  $\gamma$  впливає на ширину резонансної зони, як і швидкість поздовжнього руху гнучкого елемента: із збільшенням коефіцієнта  $\gamma$  її ширина зростає.

Методику дослідження динамічних процесів у приводі з гнучким робочим елементом можна використати для широкого кола рухомих одновимірних систем.

1. Боженко М.В., Сліпчук А.М. Вплив поздовжнього руху на нелінійні поперечні коливання пружних одновимірних систем // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка" "Динаміка, міцність та проектування машин і приладів". – 2004. – № 509. – С.25–30. 2. Назар І.І., Сокіл Б.І. Метод Ван-дер-Поля у дослідженні періодичних збурень рухомих одновимірних систем // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка" "Оптимізація виробничих процесів і технічний контроль у машинобудуванні та приладобудуванні". – 2006. – № 560. – С.71–75. 3. Вікович І.А., Висоцька Х.А. Нелінійні коливання рухомої струни // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка" "Динаміка, міцність та проектування машин і приладів". – 2004. – № 509. – С.30–35. 4. Гащук П.М., Назар І.І. Нелінійні коливання гнучкого робочого елемента привода під дією імпульсних сил // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка" "Динаміка, міцність та проектування машин і приладів". – 2007. – № 588. – С.20–24. 5. Галеркин Б.Г. Стержни и пластинки // Вестник инженеров-техников. – 1915. – №19. – С.23–32.