

## ПЕРЕДМОВА

Теорія ймовірностей та математична статистика сьогодні стали невід’ємними складовими фундаментальної підготовки фахівців з усіх галузей знань і основою викладення багатьох спеціальних дисциплін. Автори сподіваються, що навчальний посібник “Теорія ймовірностей та математична статистика” допоможе майбутнім фахівцям на підставі математико-статистичних методів аналізувати різноманітні явища та процеси.

Посібник створений для студентів технічних спеціальностей вищих навчальних закладів. Висвітлений у ньому матеріал відповідає навчальній програмі курсу вищої математики, а в окремих розділах виходить за межі цієї програми. Матеріал складається з 13 розділів, в яких викладені основні теоретичні положення теорії ймовірностей та математичної статистики: Вступ (О. Рибицька, О. Слюсарчук), Основні поняття теорії ймовірностей (Х. Дрогомирецька, О. Рибицька), Основні теореми теорії ймовірностей, Повторні незалежні випробування. Схема Бернуллі. Граничні теореми (О. Рибицька), Випадкові величини. Закони розподілу дискретних випадкових величин, Неперервні випадкові величини, Закони розподілу неперервних випадкових величин (О. Рибицька, Х. Дрогомирецька, Д. Білонога), Граничні теореми теорії ймовірностей (Х. Дрогомирецька), Системи випадкових величин (О. Веселовська), Числові характеристики системи двох випадкових величин (О. Рибицька), Функції випадкових величин та їх числові характеристики (О. Рибицька, Л. Гошко), Елементи математичної статистики. Основні поняття. Числові характеристики вибірки, Статистичні оцінки параметрів розподілу (О. Слюсарчук), Статистична перевірка гіпотез. Критерій згоди, Елементи теорії кореляції та регресії (Н. Пабирівська). Наукове редагування здійснювали Х. Дрогомирецька, О. Рибицька, Л. Гошко.

Колектив авторів щиро вдячний доцентам І.Я. Олексіву та Г.В. Понеділку за слушні зауваження та рекомендації.

Посібник рекомендовано як студентам денної форми навчання, так і студентам, які здобувають освіту за дистанційною формою навчання.

Автори будуть вдячні за всі зауваження щодо матеріалу посібника, які читачі надішлють авторам.

*Електронні пошти авторів:*

olga.rybyska@gmail.com

christdr@mail.lviv.ua

nelyapab@gmail.com

olga\_slusarchuk@ukr.net

“... я припускаю, що під час уважного вивчення предмета читач зауважить, що має справу не лише з грою, але що тут закладають основи дуже цікавої і глибокої теорії”

Христіан Гюйгенс (1629–1695 рр.)

## ВСТУП

Теорія ймовірностей, як математична наука, мала доволі тривалий шлях формування. Тепер вже важко встановити, хто перший поставив запитання про можливість кількісного вимірювання впевненості в появі деякої випадкової події чи явища. Математичний підхід до вивчення випадкових явищ намагалися знайти ще в стародавньому Китаї, Римі, Греції.

Сьогодні нам відомо, що першими задачами, які ставили собі дослідники випадкових явищ, були такі:

- підрахунок кількості різних можливих результатів під час підкидання декількох гральних костей;
- розподіл ставок між гравцями, якщо гру перервано на деякому етапі;
- визначення кількості підкидань двох або декількох гральних костей, за якої кількість випадків, сприятливих для випадання однакових граней (наприклад “шісток”), хоча б під час одного кидання, була більшою, ніж кількість випадків, в яких така подія не настане жодного разу.

Це задачі, які поставали перед гравцями в так звані азартні ігри. Слово “азарт” є перекладом французького слова *hazard*, що означає “випадок”. Тож азартна гра – це гра, результат якої залежить від випадку, його неможливо визначити наперед.

Кількість різних можливих результатів під час підкидання трьох гральних костей визначив у 960 році єпископ Віболд з міста Камбре. В одній з перших математичних книг початку епохи італійського Відродження “Сума знань з арифметики, геометрії, відно-

шень і пропорційності”, написаній Лукою Пачолі<sup>1</sup>, міститься, зокрема, формулювання такої задачі: “Товариство грає в м’яча до 60 очок і робить ставку в 22 дукати. У зв’язку з певними обставинами гра не може бути завершеною, причому одна сторона в цей момент має 50, а інша – 30 очок. Яку частину загальної ставки повинна одержати кожна зі сторін?” Розв’язок цієї та інших задач, запропонованих Пачолі, згодом був визнаний неправильним, але поставлені проблеми дали поштовх подальшим дослідженням. Рукопис “Книга про гру в кості” (1526 р.) італійського мислителя Джироламо Кардано<sup>2</sup> безсумнівно істотно вплинув на формування принципів розв’язання первинних задач теорії ймовірностей. У цій книзі, зокрема, є такі слова: “Ціла серія ігор не дає відхилення, хоча в одній грі це може статися ... при великій кількості ігор виявляється, що дійсність істотно наближається до цього припущення”, тобто тут знаходимо деяке первинне формулювання закону великих чисел.

Звиклим є вважати, що теорія ймовірностей зародилась в переписці двох великих вчених – Блеза Паскаля<sup>3</sup> та П’єра Ферма<sup>4</sup>. Паскаль істотно розвинув комбінаторику і вказав на її значення для нової науки. Однак у переписці цих вчених ще відсутнє поняття ймовірності події, вони обмежуються розглядом кількості сприятливих для події шансів.

Змістовний виклад тогочасної теорії ймовірностей можна знайти в додатку “Про рахунки в азартній грі”, який написав нідерландський

---

<sup>1</sup> Лука Пачолі, фра Лука Бартоломео де Пачолі (Fra Luca Bartolomeo de Rasio), близько 1445–1517 рр.) – італійський чернець, математик, засновник принципів сучасного бухгалтерського обліку.

<sup>2</sup> Джироламо (Джироламо, Иеронім) Кардано (Gerolamo Cardano, 1501–1578) – італійський математик, інженер, філософ, медик і астролог. На його честь названі відкриті Сципіоном дель Ферро формули для знаходження розв’язку кубічного рівняння (Кардано вперше їх опублікував) і карданний вал.

<sup>3</sup> Блез Паскаль (Blaise Pascal, 1623–1662 рр.) – французький математик, фізик, літератор і філософ, один із засновників математичного аналізу, теорії ймовірностей, проективної геометрії, творець перших взірців обчислювальної техніки, автор основного закону гідростатики.

<sup>4</sup> П’єр Ферма (Pierre Fermat, 1601–1665 рр.) – французький математик, один з творців аналітичної геометрії, математичного аналізу, теорії ймовірностей, теорії чисел. За фахом – юрист, блискучий політолог.

вчений Христіан Гюйгенс<sup>5</sup> до книжки свого вчителя ван Схоотена “Математичні етюди”. Завдяки цій книзі ознайомився з теорією ймовірностей Якоб Бернуллі<sup>6</sup>, який і завершив формування основних принципів теорії.

Пізніше, у XVIII–XIX ст. розвиток теорії ймовірностей був спричинений задачами теорії стрільби, теорії похибок, проблемами демографії тощо. Значного розвитку теорія ймовірностей досягла в XIX–XX ст. завдяки працям А. Муавра, П. Лапласа, К. Гаусса, С. Пуассона, К. Пірсона, П. Чебишова, А. Маркова, А. Ляпунова, А. Колмогорова та українських математиків Б. Гнеденка<sup>7</sup>, І. Коваленка<sup>8</sup> та інших вчених.

Підходи до оцінювання можливості реалізації того чи іншого результату гри поступово були поширені на військову стратегію і тактику, на тактику проведення політичних переговорів, а пізніше – і на ділові виробничі відносини. З часом імовірнісні способи передбачення результатів поширилися на фізику, зокрема радіофізику, а згодом їх почали застосовувати у технічних, технологічних, економічних, соціологічних та інших науках.

Сьогодні методи теорії ймовірностей широко застосовують у теорії надійності, теорії масового обслуговування, теорії інформації, статистичній фізиці, економічній теорії, математичній лінгвістиці та інших галузях знань.

---

<sup>5</sup> Христіан Гюйгенс (Christiaan Huygens, 1629–1695 pp.) – нідерландський фізик, механік, математик і астроном, винахідник маятникового годинника з анкерним обмежувачем, автор хвильової теорії світла, праць з оптики і теорії ймовірностей, відкривач кільця Сатурна і його супутника.

<sup>6</sup> Якоб Бернуллі (Jakob Bernoulli, 1655–1705 pp.) – швейцарський математик і фізик, основоположник теорії варіаційного числення, диференціальних рівнянь, один з основоположників теорії ймовірностей, йому належать значні досягнення в теорії рядів, диференціальному численні та теорії чисел.

<sup>7</sup> Борис Володимирович Гнеденко (1912–1995 pp.) – український математик, спеціаліст з теорії ймовірностей та математичної статистики, ймовірнісних і статистичних методів, член-корреспондент (1945 р.) і академік (1948 р.) АН УРСР. Найвідоміші його роботи стосуються граничних теорем теорії ймовірностей. За його посібником “Курс теорії ймовірностей” навчались багато поколінь спеціалістів.

<sup>8</sup> Ігор Миколайович Коваленко (1935 р.) – учений у галузі теорії надійності та захисту інформації, академік Національної академії наук України, двічі лауреат Державної премії України у галузі науки і техніки.

Математична статистика як наука починається з робіт відомого німецького математика Карла Фрідріха Гаусса<sup>9</sup>. На підставі теорії ймовірностей Гаусс дослідив і обґрунтував метод найменших квадратів, створений ним у 1795 р. Цей метод він застосував для опрацювання астрономічних даних з метою уточнення орбіти малої планети Церера. Часто іменем Гаусса називають найвідоміший закон розподілу – нормальний, а в теорії випадкових процесів основними об'єктами вивчення є так звані гауссівські процеси.

Наприкінці XIX – на початку XX століття значний внесок у математичну статистику зробили англійські дослідники, насамперед Карл Пірсон<sup>10</sup> та Роналд Фішер<sup>11</sup>. Зокрема Пірсон розробив критерій “хі-квадрат” для перевірки статистичних гіпотез, а Фішер – дисперсійний аналіз, теорію планування експерименту, метод максимальної правдоподібності оцінки параметрів.

У 30-ті роки XX ст. Єжи Нейман<sup>12</sup> і Карл Пірсон створили загальну теорію перевірки статистичних гіпотез. У цей самий період академік АН СРСР Андрій Колмогоров<sup>13</sup> заклав основи непараметричної статистики. У 40-ві роки XX ст. Абрахам Вальд<sup>14</sup> побудував теорію послідовного статистичного аналізу. Тест Вальда

---

<sup>9</sup> Йоганн Карл Фрідріх Гаусс (Johann Carl Friedrich Gauss, 1777–1855 pp.) – німецький математик, астроном, геодезист та фізик.

<sup>10</sup> Карл Пірсон (Karl (Carl) Pearson, 1857–1936 pp.) – англійський математик, статист, біолог та філософ, один із засновників математичної статистики. Розробив теорію кореляції, критерій узгодженості, алгоритм прийняття рішень тощо.

<sup>11</sup> Сер Рональд Ейлмер Фішер (Sir Ronald Aylmer Fisher, 1890–1962 pp.) – англійський статистик, біолог-еволюціоніст, генетик. Запропонував методологію проектування експерименту у своїй інноваційній книзі “Планування експериментів” (1935).

<sup>12</sup> Єжи (Юрій Чеславович) Нейман (Jerzy Neyman, 1894–1981 pp.) – польський і американський математик, статистик. Розвивав (від 1930 р.) так звану біхевіористську статистику (методологію прийняття рішень в умовах невизначеності), яка має багато застосувань у наукових дослідженнях в астрономії, фізиці, біології, медицині – скрізь, де необхідно знижувати частоту помилок.

<sup>13</sup> Андрій Миколайович Колмогоров (1903–1987 pp.) – російський математик, один з найвизначніших вчених XX ст., засновник сучасної теорії ймовірностей.

<sup>14</sup> Абрахам Вальд (Abraham Wald, 1902–1950 pp.) – угорський математик і статистик. Засновник статистичного послідовного аналізу. Його іменем названий закон розподілу Вальда.

(Wald test) – статистичний тест, що має широкий діапазон застосування, зокрема, використовується для оцінки параметрів статистичних моделей на підставі вибіркових даних.

На розвиток математичної статистики значною мірою вплинули і українські математики, такі як М. Зарицький<sup>15</sup>, М. Кравчук<sup>16</sup>, А. Скороход<sup>17</sup>, М. Ядренко<sup>18</sup>, А. Фоменко<sup>19</sup> та інші.

Відомий український вчений Мирон Зарицький цікавився теорією ймовірностей та математичною статистикою як філософ. У 1937 р. вийшла друком його стаття “Про коефіцієнт кореляції в теорії математичної статистики”, в якій він зробив спробу аналізу балансів західноукраїнських кооперативів. Михайло Кравчук написав за життя 10 книг із різних розділів математики, зокрема і з теорії ймовірностей та математичної статистики. Анатолій Скороход продовжив розробляти статистику випадкових процесів та марківські процеси. Михайло Ядренко у 1970 р. заснував науковий журнал з теорії ймовірностей та математичної статистики українською мовою. З 1974 р. Американське математичне товариство перевідає цей

---

<sup>15</sup> Мирон Онуфрійович Зарицький (1889–1961 рр.) – український математик, професор Львівського державного університету, дійсний член Наукового товариства ім. Т. Шевченка, фундатор української математичної культури.

<sup>16</sup> Михайло Пилипович Кравчук (1892–1942 рр.) – український математик, академік АН УРСР, професор. Був вчителем Архипа Люльки – конструктора реактивних авіадвигунів та Сергія Корольова – конструктора радянських космічних кораблів. Методи М. Кравчука використані в США, Японії та інших країнах під час моделювання кібернетичної техніки. Наукові праці М. Кравчука широко використовували американські автори першого у світі комп’ютера.

<sup>17</sup> Анатолій Володимирович Скороход (1930–2011 рр.) – український математик, професор, академік НАНУ, член Американської академії мистецтв і наук.

<sup>18</sup> Михайло Йосипович Ядренко (1932–2004 рр.) – український математик, професор, член-кореспондент НАНУ. З 1966 по 1998 роки завідував кафедрою теорії ймовірностей та математичної статистики Київського університету імені Тараса Шевченка.

<sup>19</sup> Анатолій Тимофійович Фоменко (1945 р.) – російський математик українського походження, академік Російської академії наук, лауреат Державної премії РФ у галузі математики. Відомий як розробник і прихильник однієї з теорій нової хронології – напрямку сучасних історико-філософських досліджень, які вважають хибною сучасну стандартну хронологію історичних подій, створену у загальних ознаках європейською наукою в XVIII–XIX ст. Роботи Фоменка свідчать про важливість залучення до вивчення історії методів математичної статистики, астрономічного датування подій і комп’ютерного оброблення письмових джерел.

журнал англійською мовою. Видання мало велике значення у розвитку всесвітньовідомої Київської школи з теорії ймовірностей та математичної статистики. Також Михайло Ядренко здійснив важливі дослідження у галузі прикладної теорії ймовірностей та математичної статистики (оптимальні методи профілактики і контролю якості продукції, статистичне моделювання шумів у напівпровідниках, статистичний аналіз датчиків випадкових чисел, статистичні задачі теорії надійності, статистичне моделювання розподілів з випадковою інтенсивністю).

Математична статистика успішно розвивається і сьогодні. Методи математичної статистики широко застосовують в організації виробництва, банківській справі, економічній теорії, радіотехніці, військовій справі, теорії автоматичного керування, біології, економіці, статистичній фізиці, астрономії тощо. Математичну статистику використовують також під час розв'язання теоретичних і практичних задач кібернетики. За останні 40 років можна виділити чотири принципово нові напрями досліджень:

- розроблення і впровадження математичних методів планування експерименту;
- розвиток статистичних методів, стійких щодо малих відхилень від ймовірнісної моделі;
- розвиток статистики об'єктів нечислової природи як самостійного напрямку в прикладній математичній статистиці;
- значне розгортання робіт зі створення комп'ютерних пакетів програм для проведення статистичного аналізу даних.