УДК 336.764.2

Н.Л. Іващук
Національний університет "Львівська політехніка"

ДЕЯКІ РІЗНОВИДИ БІНАРНИХ ТА КОРЕЛЯЦІЙНИХ ОПЦІОНІВ

Робота присвячена ринку похідних фінансових інструментів. Проведено огляд його сучасного стану, а саме, роль і місце деривативів на світовому фінансовому ринку. Висвітлено актуальну ситуацію вітчизняного строкового ринку, зокрема ринку опціонів. Показано способи їх використання інвесторами. Описано особливості нестандартних опціонів. Детальніше розглянуто функції виплати та формули для обчислення цін бінарних опціонів, зокрема стандартних, американських та подвійних бінарних опціонів, а також опціонів типу „supershares". Описано також функції виплати та способи оцінювання кореляційних опціонів, зокрема кореляційного бінарного опціону та опціону кращої ефективності.

Work to the market of derivative financial tools is devoted. The review of its modern condition is carried out, namely, a role and a place of derivatives in the global financial market. The actual situation of the domestic derivative market, in particular the option market is covered. Ways of their use are shown by investors. Features of non-standard options are described. Functions of payment and the formula for calculation of the prices digital options, including standard, American and double-digital options, and also options such as "supershares" are in more details considered. Functions of payment and ways of definition of the prices of correlation options, in particular correlation digital option and out-performance option are described also.

Постановка проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями. Фінансовий ринок є одним із найважливіших елементів ринкової економіки. Динамічні економічні зміни, які в останні роки відбуваються в Україні, стали причиною бурхливого розвитку фінансового ринку, зокрема строкового. Як випливає зі звіту Державної комісії з цінних паперів та фондового ринку, першочерговими заходами щодо вирішення проблем функціонування фондового ринку є зосередження укладання угод щодо цінних паперів та похідних цінних паперів на організованому ринку, створення сприятливих умов для зосередження укладання угод щодо цінних паперів та похідних цінних паперів на організованому ринку, розширення переліку цінних паперів, щодо яких укладання угод можливе лише на організаторах торгівлі.

На європейських та світових фінансових ринках в останні 30 років можна зауважити періодичну появу нових, привабливіших для інвесторів похідних фінансових інструментів (деривативів), зокрема нестандартних (екзотичних) опціонів. Натомість, що стосується України, то про вітчизняний ринок похідних фінансових інструментів можна сказати, що він є ще досить молодим ринком, а його роль на міжнародній арені є зовсім незначною.

Аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання цієї проблеми. Дослідженнями опціонів загалом, зокрема бінарних та кореляційних, займалися такі зарубіжні вчені: А. Печтл [1], Ф. Блек, М. Шоулс [2], Н. Гекенссон [3, 5], М. Ґарман [4], П. Занґ [6], Д. Кокс, Г. Міллер [7], Ґ. Ґастінеу [8].Серед вітчизняних науковців вивченню деяких аспектів, пов'язаних зі стандартними опціонами, присвятили свої роботи Л. Примостка [9], О.М. Сохацька [10], В.М. Шелудько [11] та інші. Однак екзотичні опціони, зокрема бінарні та кореляційні, в Україні ще малодосліджені.

Цілі статті можна сформулювати так:

– визначити роль і місце деривативів, зокрема опціонів та ф'ючерсів, на світовому фінансовому ринку;

– показати значення опціонів на вітчизняному строковому ринку;

– описати особливості нестандартних опціонів;

– дослідити способи застосування цих деривативів;

– визначити функції виплати та формули для обчислення цін бінарних опціонів, зокрема стандартних, американських (з відстроченим та невідстроченим платежем) та подвійних бінарних опціонів, а також опціонів типу „supershares”;

– описати функції виплати та формули для обчислення цін кореляційних опціонів, зокрема кореляційного бінарного опціону та опціону кращої ефективності.

Основний матеріал дослідження. За даними Державної комісії з цінних паперів та фондового ринку України станом на 1.01.2006р. у нашій країні було зареєстровано випусків опціонів на суму 470.970 млн. грн. Лідерами первинного розміщення опціонів на суму 9.15 млн. грн. у 2005 році були Українська фондова біржа (УФБ), Придніпровська фондова біржа (ПФБ) та Перша фондова торговельна система (ПФТС). Натомість на вторинному ринку відзначилися УФБ, ПФБ та Українська міжбанківська валютна біржа (УМВБ), причому обсяг обороту становив 675.06 млн. грн. Обсяги та кількість зареєстрованих в Україні опціонів наведено у табл. 1.

Таблиця 1

Обсяги та кількість зареєстрованих в Україні опціонів у 2000–2005 роках

Рік	Обсяг (млн. грн)	Відносна зміна (%) [приріст(+), спадання(-)]	Кількість (тис. шт.)	Відносна зміна (%) [приріст(+), спадання(-)]
2000	23.10		230.50	
2001	57.76	150.04	228.20	-1,00
2002	17.67	-69.41	43.30	-81.03
2003	99.69	464.18	315.43	628.48
2004	112.21	12.55	12375.28	3823.31
2005	160.55	43.09	4561.14	-63.14

Джерело: Державний комітет з цінних паперів і фондового ринку// http://www.sscs.gov.ua

Частка усіх деривативів у загальному обороті фондового ринку України становить менше 1 %. Натомість, за даними Банку міжнародних розрахунків, частка опціонів у загальносвітовому обороті фінансового ринку становить понад 15 %, а їх динаміку та розподіл по регіонах світу, а також залежно від типу базового інструменту наведено у табл. 2.

Таблиця 2

Сумарна вартість контрактів, проданих на організованих біржах (мільярдів доларів США)

Локалізація/базовий інструмент	Вартість опціонів 12/2003	12/2004	12/2005	9/2006	Вартість ф’ючерсів 12/2003	12/2004	12/2005	9/2006
1	2				3			
Всі ринки	**23034,0**	**27688,8**	**36196,9**	**49753,9**	**13752,9**	**18903,7**	**21619,2**	**25824,5**
На процентну ставку	20793,8	24604,1	31588,2	43369,3	13123,7	18164,9	20708,7	24699,0
На валюту	37,9	60,7	66,1	68,0	79,9	103,5	107,6	139,9
На біржовий індекс	2202,4	3024,0	4542,6	6316,5	549,3	635,2	802,9	985,6
Північна Америка	**11804,0**	**17142,6**	**24067,4**	**31221,1**	**7700,0**	**10465,9**	**12326,8**	**14677,6**
На процентну ставку	10381,8	15286,7	21255,4	27488,1	7384,6	10043,6	11855,2	14072,8
На валюту	18,5	40,6	28,3	34,1	64,9	91,5	90,7	102,9
На біржовий індекс	1403,7	1815,2	2783,8	3698,9	250,4	330,7	380,8	501,9
Європа	**11043,3**	**10335,5**	**11697,6**	**17079,8**	**4363,2**	**5972,4**	**6284,8**	**7551,5**
На процентну ставку	10357,2	9282,0	10235,7	14703,5	4200,2	5756,1	6050,5	7226,5
На валюту	0,3	0,5	0,6	1,3	0,3	0,3	2,4	3,0
На біржовий індекс	685,8	1053,0	1461,4	2375,0	162,7	215,9	231,9	322,1

Продовження табл. 1

1	2				3			
Азія і Тихоокеанський басейн	**128,7**	**133,1**	**319,0**	**1304,7**	**1531,2**	**2293,8**	**2695,0**	**3230,1**
На процентну ставку	44,2	13,7	67,4	1102,8	1395,4	2208,0	2509,8	3065,1
На валюту	-	-	-	-	3,4	3,7	4,3	20,2
На біржовий індекс	84,5	119,4	251,6	201,9	132,5	82,0	180,9	144,7
Інші ринки	**58,0**	**77,6**	**112,9**	**148,3**	**158,5**	**171,6**	**312,7**	**365,3**
На процентну ставку	10,6	21,7	29,8	74,9	143,4	157,2	293,2	334,6
На валюту	19,0	19,5	37,2	32,7	11,3	7,9	10,2	13,9
На біржовий індекс	28,4	36,4	45,8	40,7	3,7	6,6	9,3	16,8

Джерело: Semiannual OTC derivatives statistics at end-September 2006 // http://www.bis.org

Опціони – це такі похідні інструменти, які дають можливість страхувати фінансові інвестиції від змін цін окремих видів активів, на які ці інструменти виставляються. Однак опціони стандартної форми (класичні) не завжди задовольняють очікування усіх суб’єктів, які сподіваються обмежити свій фінансовий ризик. Передусім, з огляду на їх високу ціну, а також через відсутність можливості еластично пристосовуватися до конкретних потреб інвесторів. Тому з часом почали з’являтися наступні їх різновиди, функції виплати яких дещо відрізняються від класичних. Такі опціони називаються екзотичними, або нестандартними.

Причиною динамічного розвитку похідних інструментів в останні десятиліття була можливість їх універсального застосування. У зв’язку з тим, що основним їх призначенням є страхування від ризику, це спонукало до розроблення похідних інструментів з новішими та складнішими функціями виплати. Якщо існує змінність якогось чинника, то з’являється також і необхідність страхування від неї, а це, своєю чергою, вимагає пристосування деривативу до кожного конкретного випадку. Тому сьогодні щоразу популярнішими стають на ринку інструменти, „шиті за розміром” (tailor made). Прикладом можуть бути деякі різновиди екзотичних опціонів, які характеризуються дуже обмеженою ліквідністю. Натомість популярніші деривативи, такі як, наприклад, бар’єрні опціони, хоча теж виникли внаслідок пристосування класичних інструментів до індивідуальних потреб інвесторів, однак настільки поширилися, що це дало змогу поглибити їх ринок, а завдяки цьому знизити витрати на страхування від ризику за їх допомогою.

Розглянемо особливості деяких різновидів бінарних та кореляційних опціонів, які належать до групи екзотичних опціонів.

Бінарні опціони (***digital options***) ще відомі під назвою цифрові, двійкові або опціони закладу (bet – заклад, спір, парі). Зважаючи на дуже просту модель кінцевої виплати цих деривативів та інші особливі характеристики, вони приваблюють багатьох учасників позабіржового ринку. Взагалі кажучи, виплата за бінарним опціоном може набути форми фіксованої грошової суми, активу або різниці між ціною активу і встановленим рівнем, який часто відрізняється від ціни виконання. Такі бінарні опціони відомі під назвою „готівка або нічого”, „актив або нічого” та опціони відступу (або геп-опціони).

В основу звичайних бінарних опціонів покладено один базовий актив. Натомість існує інший різновид бінарних опціонів, в основу якого покладено два активи. Такі опціони називають кореляційними бінарними опціонами. Ці деривативи є еластичнішими, ніж звичайні бінарні опціони, а тому мають більший потенціал щодо можливостей їх практичного використання.

Деякі бінарні опціони, такі як „готівка або нічого” чи „актив або нічого” є простішими з огляду на модель виплати, ніж класичні опціони. А тому часто з’являються пропозиції, щоб розглядати такі опціони як основні структурні блоки, з яких побудовані класичні опціони. Наприклад, Печтл [1] показав, що виплату за класичним опціоном можна представити як суму безмежної кількості виплат бінарних опціонів. Хоч такий аргумент є цікавим з теоретичного погляду, однак він не має широкого практичного використання.

Стандартні бінарні опціони (standard digital options). Найпростіші бінарні опціони – це опціони типу „готівка або нічого”. Вони дуже нагадують парі. Якщо базовий актив зросте вище (або спаде нижче) від визначеного рівня, тоді певна сума готівки виплачується покупцю опціону купівлі (або продажу). У протилежному випадку опціон цілком втрачає свою вартість.

Розглянемо опціон „готівка або нічого” (asset or nothing) з виплатою, що доівнює 1.00$. Такий опціон, який ще називають однодоларовим, є найпростішим, зважаючи на те, що ціну будь-якого аналогічного опціону з іншою сумою виплати можна обчислити шляхом множення ціни однодоларового опціону на суму виплати.

Функція виплати однодоларового опціону може набувати двох значень: 1 або 0. Звідси і походить назва – двійковий, бінарний, або цифровий. Оскільки ймовірність того, що опціон „готівка або нічого” буде „в грошах”, тобто ймовірність того, що $\omega S(\tau) > \omega K$ дорівнює $N(\omega d)$, в умовах припущень Блека–Шоулса [2], то його ціну можна обчислити на підставі формули

$$CON = e^{-r\tau} N(\omega d), \tag{1}$$

де ω – це бінарний оператор, причому $\omega = 1$ – для опціону купівлі, $\omega = -1$ – для опціону продажу, r – процентна ставка без ризику, τ – час до погашення (термін дії) опціону, $S(\tau)$ – ринкова ціна (спот) базового активу у момент погашення опціону, K – ціна виконання опціону, узгоджена в опціонному контракті.

Supershares. Розглянутий опціон „актив або нічого” є опціоном з однією ціною виконання, за якими у момент погашення виплачується актив або не виплачується нічого залежно від того, чи поточна ціна (спот) базового активу знаходиться вище чи нижче від ціни виконання. Існує інший тип опціонів „актив або нічого”, котрий часто зустрічається на строковому ринку. Цей тип опціонів називається „supershares” (у дослівному перекладі означає „суперчастка” або „суперакція”). Ці деривативи ще у 1976 році були запропоновані Гекенссоном [3] та у 1978 році оцінені Ґарманом [4, с. 3–10]. Опціони „supershares” можна розглядати як спеціальний випадок опціонів „актив або нічого”, оскільки виплата за ними здійснюється також у вигляді активу, якщо ціна базового інструменту на момент погашення опціону знаходиться у межах визначеної області, і не виплачується нічого – у протилежному випадку.

Конструкцію опціону „supershares” вперше запропонував Гекенссон як концепцію суперфонду, який він назвав „Фондом купівельної спроможності” (Purchasing power fund). Ідея полягає у тому, що суперфонд купує диверсифікований портфель цінних паперів, під який емітує власні боргові цінні папери нового типу, які приносять дохід лише тоді, коли вартість цього портфеля знаходиться у наперед визначених межах. Гекенссон зауважив, що більшість цінних паперів, з яких складається портфель, можна виразити через комбінацію цінних паперів, емітованих таким суперфондом, і назвав цю групу паперів „supershares” [3, с. 49–59].

Припустимо, що така область для опціонів „supershares” визначається двома величинами K_1 та K_2. Опціони такого типу можна розглядати як портфель, що складається з двох звичайних опціонів „актив або нічого”, а саме, з довгої позиції в опціоні купівлі з ціною виконання K_1 та короткої позиції в опціоні купівлі з ціною виконання K_2. Така стратегія нагадує спред бика (bull spread), який складається з двох стандартних опціонів купівлі. Функція виплати опціонів „supershares” матиме вигляд [5, с. 602–603]:

$$payoff = \begin{cases} S/K_1 & для \quad K_1 \le S \le K_2 \\ 0 \quad для \quad S < K_1 & або \quad S > K_2 \end{cases}, \tag{2}$$

де K_1 – рівень, що визначає нижню межу цінового інтервалу, в межах якого виплачується дохід за опціоном, K_2 – верхня межа цього інтервалу, S – спотова ціна портфеля цінних паперів.

Отже, опціон типу „supershares” є фінансовим інструментом, вартість якого залежить від портфеля інших фінансових інструментів, і дає його утримувачу умовне право до отримання доходу, який дорівнює частині вартості цього портфеля. Умовність цього права полягає у тому, що такий дохід виплачуватиметься утримувачу опціону за умови, що вартість портфеля в обумовлений момент часу знаходитиметься у визначених межах. У протилежному випадку опціон погашається без жодної виплати.

Ціну опціону типу „supershares" можна обчислити за формулою [4, с. 3–10]:

$$SS = \frac{Se^{-g\tau}}{K_1}\left[N(w_1) - N(w_2)\right], \tag{3}$$

$$w_1 = \frac{\ln(S/K_1) + \left(r - g + \sigma^2/2\right)}{\sigma\sqrt{\tau}},$$

$$w_2 = \frac{\ln(S/K_2) + \left(r - g + \sigma^2/2\right)}{\sigma\sqrt{\tau}},$$

де $N(.)$ – функція (дистрибуанта) стандартного нормального розподілу випадкової змінної, g – дохідність портфеля цінних паперів, σ – змінність портфеля цінних паперів, r – процентна ставка без ризику, τ – час до погашення опціону, S – поточна ціна (спот) портфеля цінних паперів.

Характерною рисою опціону „supershares" є наявність цінового інтервалу, в межах якого повинна формуватися вартість портфеля, щоб опціон був „у грошах". Чим ширшим встановлено такий інтервал, тим дорожчим буде опціон. Важливо також, щоб верхня і нижня межа цього інтервалу були рівномірно розташовані відносно вартості портфеля. Наприклад, якщо нижня межа буде розташована занадто близько до актуальної вартості портфеля, то незважаючи на те, що верхня межа знаходиться від неї досить далеко, опціон матиме невисоку ціну. Це пояснюється тим, що ймовірність виходу поза межі інтервалу зростає у міру наближення значень K_1 і K_2 до поточної вартості портфеля. Якщо прогнози щодо формування курсів цінних паперів, які входять до складу портфеля, є неоднозначними, то в такій ситуації краще купувати опціон „supershares", в якому ціновий інтервал дає змогу коливатися вартості портфеля цінних паперів. При цьому треба пам'ятати, що чим ширший цей інтервал, тим дорожчим буде опціон. Отже, необхідно шукати компроміс між вигодою та витратами.

Ціну опціону типу „supershares" можна також обчислити за допомогою формули [6, с. 405]:

$$SUP = Se^{-g\tau}\left\{N\left[\varpi d(S, K_1) + \varpi\sigma\sqrt{\tau}\right] - N\left[\varpi d(S, K_2) + \varpi\sigma\sqrt{\tau}\right]\right\}, \tag{4}$$

де $N(.)$ – функція (дистрибуанта) стандартного нормального розподілу випадкової змінної, $d(S, K)$ – аргумент дистрибуанти нормального розподілу, визначений у моделі Блека–Шоулса [2], зі спотовою ціною S та ціною виконання K, який обчислюється на підставі формули:

$$d(S, K) = \frac{\ln(S/K) + \left(r - g - \sigma^2/2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}.$$

Американські бінарні опціони. На відміну від європейського опціону, виплата одного долара за американським бінарним опціоном (American digital option) здійснюється негайно, як тільки базовий актив досягне рівня ціни виконання, у будь-який час протягом терміну дії опціону. Американські бінарні опціони можна розглядати як звичайні бінарні опціони з невідстроченим платежем.

Якщо ж однодоларовий платіж є відстроченим до моменту закінчення терміну дії опціону, то такий бінарний опціон називається „опціоном одного дотику" (one-touch digital option/ one-touch digitals). Такий опціон передбачає виплату одного долара у момент закінчення дії опціону, якщо ціна базового активу досягне рівня ціни виконання у будь-який час протягом дії опціону.

Невідстрочені бінарні опціони. Американські бінарні опціони – це не зовсім новий вид фінансових інструментів, оскільки їх можна вважати спеціальним випадком бар'єрних опціонів виходу (knockout barrier options). Виплата американського невідстроченого бінарного опціону є спеціальним випадком невідстроченого ребату бар'єрного опціону, коли ребат зафіксовано на рівні одного долара. Оскільки ціна американського бінарного опціону є поточною вартістю одного долара для бар'єрного опціону виходу, то формулу для її обчислення можна отримати з формул оцінювання бар'єрних опціонів. Отже, ціну американського бінарного опціону з невідстроченим платежем, що дорівнює одному долару, можна обчислити за формулою [6, с. 406]:

$$NAD = \left(\frac{H}{S}\right)^{q_1} e^{-\phi_1}\left[N_2\left(D_1, -DD_1, c\right) + N_2\left(-D_1, DD_1, c\right)\right] +$$

$$\left(\frac{H}{S}\right) e^{-\phi_{-1}}\left[N_2\left(D_{-1}, -DD_{-1}, c\right) + N_2\left(-D_{-1}, DD_{-1}, c\right)\right], \tag{5}$$

$$D_v = d_{bs}\left(S, H, \tau_1\right) - \sigma q_v \sqrt{\tau_1},$$

$$DD_v = d_{bs}\left(S, H, \tau_1 + \tau_e\right) - \sigma q_v \sqrt{\tau_1 + \tau_e},$$

$$\phi_v = \left(r + \upsilon q_v - \sigma^2 q_v^2 / 2\right)\tau_1, \ \psi = \sqrt{\upsilon^2 + 2r\sigma^2},$$

$$q_v = \frac{\upsilon + v\psi}{\sigma^2}, \ c = -\sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_1 + \tau_e}},$$

$$\upsilon = r - g - \sigma^2/2, \ v = 1 \quad або \quad -1,$$

$$d_{bs}\left(S, H, s\right) = \frac{\ln\left(S/H\right) + \upsilon s}{\sigma\sqrt{s}},$$

де S – спотова ціна, H – ціна виконання, s – час до закінчення терміну дії, τ_1 – час, коли починає діяти бар'єр, τ_e – час, коли закінчує діяти бар'єр, τ – час до закінчення дії опціону, $N_2\left(a, b, \rho\right)$ – функція стандартного двовимірного нормального розподілу з верхніми межами a і b та коефіцієнтом кореляції ρ.

Формула (5) є загальним випадком, в якому бар'єр діє деякий обмежений час (від τ_1 до τ_e) протягом терміну дії опціону. Якщо ж бар'єр діє від самого початку (тобто $\tau_1 = 0$) і до кінця терміну дії опціону ($\tau_e = \tau$), то такий однодоларовий американський бінарний опціон можна оцінювати за простішою формулою, а саме [6, с. 407]:

$$NAD1 = \left(\frac{H}{S}\right)^{q_1} N\left(\theta Q_1\right) + \left(\frac{H}{S}\right)^{q_{-1}} N\left(\theta Q_{-1}\right), \tag{6}$$

$$Q_v = \frac{\ln\left(H/S\right) + v\tau\psi}{\sigma\sqrt{\tau}}, \ q_v = \frac{\upsilon + v\psi}{\sigma^2},$$

$$\upsilon = r - g - \sigma^2/2, \ v = 1 \quad або \quad -1,$$

$$\psi = \sqrt{\upsilon^2 + 2r\sigma^2},$$

$$\theta = \begin{cases} 1 & для \quad H > S \\ -1 & для \quad H < S \end{cases},$$

де всі позначення аналогічні до попередніх, а θ – це бінарний оператор.

Бінарний опціон одного дотику. Бінарний опціон одного дотику (one-touch digital option/one-touch digitals) – це фактично американський бінарний опціон з виплатою, відстроченою до кінця терміну його дії. Виплата належиться утримувачу опціону лише за умови, що ціна базового активу досягне рівня бар'єру у будь-який час, у межах терміну дії опціону.

Оцінити бінарний опціон одного дотику можна за формулою [6, с. 409]:

$$OTD = e^{-r\tau}\left[N\left(\frac{\upsilon - a}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) + \left(\frac{H}{S}\right)^{2\upsilon/\sigma^2} N\left(\frac{\upsilon + a}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)\right] \tag{7}$$

де $a=\ln\left(\frac{H}{S}\right)$, а решта позначень такі, як і раніше.

Подвійні бінарні опціони (double-digital options/ range binares), аналогічно до двобар'єрних опціонів (double-barrier options), мають дві границі, з яких одна розташована вище від ціни виконання, а друга – нижче. Виплата утримувачу цього опціону в сумі 1$ здійснюється за умови, що ціна базового активу у момент закінчення дії опціону знаходиться в межах деякої області, визначеної двома границями. За інших умов опціон втрачає свою вартість. Отже, ціна подвійного бінарного опціону визначається ймовірністю того, що ціна базового активу потрапить до деякої області у відповідний момент часу, яка дисконтується згідно з процентною ставкою без ризику. Отже, ціну такого опціону можна обчислити за формулою [6, с. 409]:

$$PDD=e^{-r\tau}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\left(\frac{U}{L}\right)^{\frac{2n\upsilon}{\sigma^2}}\left\{N\left[\omega d_{bs}(S,K,\upsilon)+\left(\frac{\omega x_n'}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)\right]-N\left[\omega d_{bs}(S,W_\omega,\upsilon)+\left(\frac{\omega x_n'}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)\right]\right\}-\right.$$

$$\left.\left(\frac{U}{S}\right)^{\frac{2\upsilon}{\sigma^2}}\left(\frac{L}{U}\right)^{\frac{2n\upsilon}{\sigma^2}}\left\{N\left[\omega d_{bs}(S,K,\upsilon)+\left(\frac{\omega x_n''}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)\right]-N\left[\omega d_{bs}(S,W_\omega,\upsilon)+\left(\frac{\omega x_n''}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)\right]\right\}\right], \tag{8}$$

$$x_n'=2n(a-b),\ x_n''=2a-x_n'=2(1-n)a+2nb,$$

$$a=\ln\left(\frac{U}{S}\right)>0,\ b=\ln\left(\frac{L}{S}\right)<0,$$

$$W_\omega=\begin{cases}U & якщо \quad \omega=1\\ L & якщо \quad \omega=-1\end{cases},$$

де U – верхня границя опціону, L – нижня границя опціону.

Існує ще один спосіб визначення ціни подвійних бінарних опціонів, який оснований на використанні функції густини з двома бар'єрами. Цю функцію впровадили та дослідили у 1965 році Кокс і Міллер [7, с. 222]. Функція густини з двома бар'єрами, з яких один знаходиться вище, а другий нижче від ціни виконання, має вигляд:

$$P_{db}(x,t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}p_n(x,t) \text{ для } b<x<a,$$

де $p_n(x,t)=e^{x_n'\upsilon/\sigma^2}f(x-x_n')-e^{x_n''\upsilon/\sigma^2}f(x-x_n'')$.

Використовуючи цю функцію, можна отримати таку формулу для обчислення ціни подвійного бінарного опціону [6, 410]:

$$PDD1=e^{-r\tau}\sigma^4(a-b)\left(\frac{L}{S}\right)^{\frac{\upsilon}{\sigma^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{na_ne^{-\lambda_n\tau}}{n^2\pi^2\sigma^4+\upsilon^2(a-b)^2}\left[(-1)^{n-1}\left(\frac{U}{L}\right)^{\frac{\upsilon}{\sigma^2}}\right]^{\frac{1+\omega}{2}}+\omega\right\}, \tag{9}$$

$$a_n=-\frac{2}{a-b}\sin\left(\frac{n\pi b}{a-b}\right),\ \lambda_n=\frac{1}{2}\left[\frac{\upsilon^2}{\sigma^2}+\frac{n^2\pi^2\sigma^2}{(a-b)^2}\right],$$

де $\omega=1$ для опціону купівлі, а для опціону продажу $\omega=-1$.

Кореляційні бінарні опціони (correlation digital options). Припустимо, що існують два активи, один з яких виконує в опціоні функцію вимірювання, а другий – функцію виплати. Нехай $M(t)$ – ціна активу вимірювання, а $S(t)$ – ціна активу, в якому здійснюється кінцевий розрахунок між покупцем та продавцем опціону. Припустимо також, що ціни обох активів змінюються згідно зі стандартним стохастичним процесом, який описується геометричним рухом Броуна, доходи обох активів корелюють між собою з коефіцієнтом кореляції ρ, а σ та σ_2 – це стандартні відхилення (змінності) обох активів відповідно.

Функція виплати за європейським кореляційним опціоном описується математично у вигляді

$$payment = \begin{cases} \omega[S(\tau) - X], & \omega M(\tau) \geq \omega K \\ 0, & \omega M(\tau) < \omega K \end{cases}, \tag{10}$$

де K – ціна виконання опціону, X – наперед встановлена ціна, яка дає змогу визначити рівень гепу навколо ціни активу виплати, ω – бінарний оператор.

Розглядаючи, згідно з припущеннями моделі Блека–Шоулса [2], ризиконейтральне середовище, застосовуємо для дисконтування очікуваного значення виплати процентну ставку без ризику і отримуємо формулу для обчислення ціни кореляційного бінарного опціону [6, с. 412]:

$$CDOP = \omega S e^{-g\tau} N_2\left[\omega d_1(S, K, \sigma, g), \theta d(M, K, \sigma_2, g_2) + \theta\rho\sigma_2\sqrt{\tau}, \omega\theta\rho\right] - \omega X e^{-r\tau} N_2\left[\omega d(S, K, \sigma, g), \theta d(M, K, \sigma_2, g_2), \omega\theta\rho\right], \tag{11}$$

$$d(A, B, C, D) = \frac{\ln(A/B) + (r - D - C^2/2)\tau}{C\sqrt{\tau}},$$

$$d_1(S, K, \sigma, g) = d(S, K, \sigma, g) + \sigma\sqrt{\tau},$$

$$\theta = \begin{cases} 1 & для \quad X > S \\ -1 & для \quad X < S \end{cases},$$

де всі позначення такі, як і раніше.

Кореляційні бінарні опціони за своєю природою дуже схожі на зовнішні бар'єрні опціони (outside barrier options), оскільки в обох цих деривативах використовуються два активи, кожен з яких виконує свою роль: один виконує функцію вимірювання, а другий – функцію виплати. Отже, кореляційні бінарні опціони можна вважати зовнішніми бар'єрними опціонами, виплата яких залежить від того, чи ціна активу вимірювання перевищить деякий встановлений рівень у момент погашення, чи ні. Інші опціони, так звані "pure vega options", є фактично кореляційними бінарними опціонами, в яких актив вимірювання визначається як очікувана вартість іншого опціону.

Сьогодні багато існуючих фінансових інструментів мають схожі властивості до кореляційних бінарних опціонів. Наприклад, більшість процентних свопів ґрунтуються або на місячній, або на тримісячній ставці LIBOR. На ринку існує багато екзотичних свопів, котрі характеризуються властивостями опціонів входу (knock-in options) або опціонів виходу (knock-out options), залежно від того, чи ставка LIBOR перевищує наперед визначену ставку на деяку узгоджену дату, чи ні. Ставку LIBOR у таких свопах можна розглядати як інструмент вимірювання у кореляційних бінарних опціонах, а плаваючу ставку (floating leg – дослівно „плаваючу ногу") – як актив виплати.

Треба зазначити, що досить складно хеджувати свопи з властивостями опціону виходу. У цьому випадку можуть допомогти кореляційні бінарні опціони, які є добрим способом хеджування таких свопів. Кореляційні бінарні опціони також можуть використовуватися для хеджування та спекуляції у фінансових активах, котрі є дуже чутливими до інфляції, використовуючи в опціонах форвардну ціну золота як інструмент вимірювання. Вони також можуть використовуватися як управлінські компенсаційні пакети, в яких інструментом вимірювання може бути обсяг продажу чи обсяг виробництва, а виплатою – готівка, акції або їх поєднання. Систематичний оборот кореляційних бінарних опціонів свідчить про їх високу популярність серед інвесторів.

„Опціон кращої ефективності" (out-performance option) – це спеціальний кореляційний опціон, котрий дає інвестору змогу використати з вигодою для себе очікувану різницю у відносній ефективності двох базових активів (індексів). Кінцева виплата за таким опціоном обчислюється як різниця між ефективністю першого та другого базового інструменту. Ефективність вимірюється як ставка або дохідність, у процентах. Однак при підписанні опціонного контракту сторони узгоджують між собою також деяку величину, на яку множиться отримане значення ставки, та ставку виконання. Базовим активом можуть бути будь-які комбінації акцій, облігацій, валют, товарів або індексів, які обчислюються на підставі цих інструментів. На практиці найчастіше в „опціонах кращої ефективності” використовується комбінація, яка складається з індексу облігацій та індексу акцій, або навпаки. Особливо популярними серед них в останні роки стали опціони „yield spread options”, за котрими виплачується різниця між дохідностями цінних паперів з фіксованим доходом у двох різних країнах або різниця між двома різними точками на кривій дохідності вибраної країни.

„Опціони кращої ефективності” також використовуються з метою отримання вигоди від відносної ефективності функціонування двох різних бірж або позабіржових ринків. Наприклад, різниця між американським індексом Standard & Poor’s 500 та японським індексом Nikkei 225. Сьогодні „опціони кращої ефективності” можна розглядати як спред-опціони на різницю між дохідностями, на відміну від звичайних спред-опціонів, які виставляються на різницю між цінами двох інструментів. У 1993 році Ґастінеу [8] вперше описав дію цих деривативів. Інвестори, які купують опціони кращої ефективності, повинні прогнозувати не тільки кращу перспективу для першого інструменту, але й гіршу – для другого. У цьому випадку вони можуть максимізувати свої прибутки.

„Опціони кращої ефективності” відрізняються від більшості інших екзотичних опціонів тим, що їх функція виплати виражається у формі ставки, а не в грошовому еквіваленті (наприклад, у доларах), як це передбачає більшість інших опціонів. Зважаючи на цю важливу відмінність, „опціони кращої ефективності” завжди містять один додатковий фактор (параметр), який називають номінальної сумою або номінальним значенням, аналогічно до своп-контрактів. Тобто, загальна виплата за „опціоном кращої ефективності” здійснюється у грошовому еквіваленті, який є добутком цієї номінальної суми (або значення) та ставки виплати, у момент погашення опціону. Оскільки номінальна сума завжди узгоджується наперед, у момент укладання опціонного контракту, то нас цікавитиме тільки формування ставки виплати „опціону кращої ефективності”.

Ставку виплати європейського „опціону кращої ефективності”, виставленого на спред відносної ефективності двох базових активів, можна записати у такому математичному вигляді:

$$payoff_{rate} = \max\left\{\omega\left[\frac{I_1(\tau)}{I_1} - \frac{I_2(\tau)}{I_2}\right] - \omega k, 0\right\}, \tag{12}$$

де I_1 та I_2 – поточні ціни двох базових інструментів, $I_1(\tau)$ та $I_2(\tau)$ – ціни двох базових інструментів у момент погашення опціону, k – ставка виконання опціону, $\tau = t^* - t$ – час до погашення опціону, ω – бінарний оператор, описаний вище.

Ціну європейського „опціону кращої ефективності” з правом купівлі можна обчислити на підставі формули [6, с. 529]:

$$OUT = e^{-g_1\tau} A_{o1} - e^{-g_2\tau} A_{o2} - k e^{-r\tau} A_{o3}, \tag{13}$$

$$A_{o1} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\upsilon) N\left[\frac{\varsigma_1 + \sigma_1\sqrt{\tau} + \rho\upsilon + \phi_0\left(\upsilon + \rho\sigma_1\sqrt{\tau}\right)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right] d\upsilon,$$

$$A_{o2} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\upsilon) N\left[\frac{\varsigma_1 + \rho\sigma_2\sqrt{\tau} + \rho\upsilon + \phi_0\left(\upsilon + \sigma_2\sqrt{\tau}\right)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right] d\upsilon,$$

$$A_{o3} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\upsilon) N\left[\frac{\varsigma_1 + \rho\upsilon + \phi_0(\upsilon)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right] d\upsilon,$$

$$\varsigma_1 = \sqrt{\tau}\left(r - g_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)\Big/\sigma_1, \quad \phi_0(\upsilon) = -\frac{1}{\sigma_1\sqrt{\tau}} \ln\left\{k + \exp\left[\left(r - g_2 - \sigma_2^2/2\right)\tau\right] + \upsilon\sigma_2\sqrt{\tau}\right\},$$

де ρ – коефіцієнт кореляції між двома активами, g_1 – дохідність першого активу, g_2 – дохідність другого активу, σ_1 – змінність першого активу, σ_2 – змінність другого активу, r – процентна ставка без ризику, τ – час до погашення опціону.

Висновки та перспективи подальших досліджень. Операції з похідними фінансовими інструментами проводяться як з метою управління ризиком портфеля активів, так і отримання спекуляційних та арбітражних прибутків. Похідні інструменти є предметами обігу на строкових ринках, зокрема на багатьох біржах та позабіржовому ринку, і становлять для інвесторів привабливий вид інвестицій. На ринку деривативів виступають дві групи учасників, а саме:

- господарські та інші суб'єкти, котрі намагаються зредукувати ризик власних інвестицій за допомогою хеджингових операцій;
- фінансові інституції, які переймають на себе ризик першої групи учасників за відповідну оплату. При цьому вони сподіваються, при сприятливих для них умовах, отримати вищі від середнього прибутки.

Цей ринок, враховуючи прискорений темп глобалізації фінансових оборотів, концентрацію банків і все частішу появу особливо великих контрактів, має перспективи розвитку. Банки та інші фінансові інституції, як правило, утримують цілий штат спеціалістів та експертів, які спеціалізуються на трансакціях з похідними фінансовими інструментами і мають у своєму розпорядженні великий потенціал математичного та програмного забезпечення для грамотного проведення операцій на строковому ринку, зокрема світовому. Завдяки цьому, спреди (різниця між курсом купівлі і продажу) екзотичних опціонів зменшуються, а їх ліквідність – зростає. Отже, майбутнє кожного фінансового ринку безпосередньо пов'язане з кваліфікацією їх учасників, а остання залежить від розуміння суті, потенціалу і особливостей застосування усіх, без винятку, інструментів, які знаходяться в обігу. Перспективи подальших досліджень стосуватимуться вивченню нових форм фінансових деривативів та способів їх використання на практиці.

1. Pechtl A. Classified Information. Risk N 8 (6), 1995. – P.59-61. 2. Black F., Scholes M.J. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. Journal of Political Economy. – 1973. – 3(81). – P.637-654. 3. Hakansson N. The Purchasing Power Fund: A New Kind of Financial Intermediary. Financial Analysis Journal N 32, 1976. – P.49-59. 4. Garman M. The Pricing of Supershares. Journal of Financial Economics, N 6, 1978. – P.3-10. 5. Hakansson N. The Purchasing Power Fund: A New Kind of Financial Intermediary / Kolb R.W. Futures, Options, and Swaps. Blackwell Publishing, Padstow, 2003. 6. Zhang P. Exotic Options. World Scientific. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 2001, - 692p. 7. Cox D.R, Miller H.D. The Theory of Stochastic Processes. John Wiley & Sons Inc., New York, 1965. 8. Gastineau G. An Introduction to Special-Purpose Derivatives: Options with a Payout Depending on More Than One Variable. The Journal of Derivatives N 1 (1), 1993. – P.98-104. 9. Примостка Л.О. Фінансові деривативи: аналітичні та облікові аспекти: Монографія. – К.: КНЕУ, 2001. – 263 с. 10. Сохацька О.М. Міжнародні ф'ючерсні ринки: тер етико-методологічні аспекти. Тернопіль: Карт-бланш, 2002. – 454 с. 11. Шелудько В.М.. Фінансовий ринок. К.: Знання, 2006. – 535 с.