УДК 004.9:519.8

А.В. Катренко, І.В. Савка
Національний університет "Львівська політехніка"
кафедра інформаційних систем та мереж

ОЦІНЮВАННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТЕЙ ТА АНАЛІЗ НА ЧУТЛИВІСТЬ В МЕТОДІ АНАЛІТИЧНОЇ ІЄРАРХІЇ (МАІ)

© Катренко А.В., Савка І.В., 2008

Розглянуто проблеми аналізу чутливості в методі аналітичної ієрархії (МАІ). Запропоновано методи оцінювання альтернатив з неповними оцінками попарних порівнянь за певними критеріями. Проаналізовано можливості виявлення та вилучення неістотних критеріїв та аспектів в процесі прийняття рішень.

In this article viewed problems of the analytical hierarchy process sensitiveness. The offered evaluation methods of alternatives with the incomplete pair comparisons estimations after certain criteria. Possibilities of exposure and exception of unimportant criteria and aspects are analysed in the process of making a decision.

Постановка проблеми

Проблеми прийняття важливих рішень і особа, що приймає ці рішення – децидент – останнім часом не випадково викликають все більший інтерес дослідників. Посилилася динаміка навколишнього середовища, очевиднішими стали взаємні пов'язання багатьох проблем, зріс темп науково-технічного прогресу. Керівники, що приймають рішення, зустрічаються з важким вибором, з необхідністю розгляду сотень альтернативних варіантів. Для оцінювання альтернатив використовуються не лише кількісні методи, але й знання багатьох спеціалістів, системно-аналітичні дослідження, методи моделювання [1].

При прийнятті рішень і прогнозуванні можливих результатів ОПР зазвичай зустрічається зі складною системою взаємозалежних компонентів (ресурси, бажані результати чи цілі, особи або групи осіб тощо) [2]. Проблеми, незалежно від того, є вони соціальними, політичними чи економічними, не існують ізольовано. Вони не можуть бути виокремлені з цілісної системи, пояснені окремо, а потім інтегровані для пояснення цілого. Всі результати в будь-якій з перерахованих областей застосування пов'язані з відповідними проблемами в інших областях. Окрім того, середовище, в якому виникають проблеми, не є статичним та цілісним. Воно динамічне і змінюється під впливом як зовнішніх, так і внутрішніх факторів. Середовище змінюється разом із своїми проблемами та їх розв'язками в фізичному і концептуальному просторі, а також змінюються відношення між елементами [3].

Системи з ієрархічною структурою є найпристосованішими для розв'язання складних проблем, оскільки в ієрархіях використовується принцип декомпозиції – розбиття проблеми на простіші складові, підпорядкованість елементів нижчих рівнів елементам вищих та аґрегування інформаційних потоків в напрямку «знизу – догори». Крім того, зазвичай вважається, що елементи кожного рівня є незалежними, хоча й можуть обмінюватися інформацією між собою [4].

Метод аналітичної ієрархії (МАІ) є систематичною процедурою для ієрархічного представлення елементів, що визначають суть складної проблеми і полягає в декомпозиції проблеми на простіші складові частини і подальшому опрацюванні послідовності міркувань децидента з використанням попарних порівнянь. У результаті такого процесу оцінюється відносний ступінь чи інтенсивність локальних взаємодій елементів в ієрархії. Надалі в результаті синтезу локальних оцінок отримуються значення глобальних пріоритетів альтернатив відносно фокуса ієрархії – генеральної мети, яка формулюється зазвичай якісно.

Якщо наявна повна інформація про ієрархічну структуру складної проблеми до рівня складових критеріїв, зґенерована множина альтернативних варіантів та оцінений ступінь локальних інтенсивностей взаємодій для всіх складових «нащадки – безпосередній предок», то застосування МАІ не викликає особливих труднощів, і отримані результати будуть достатньо надійними. Але в багатьох випадках така інформація є неповною: відсутні оцінки деяких альтернатив за певними критеріями чи деякі локальні значення інтенсивностей взаємодій, деякі критерії можуть бути неістотними чи взаємно дублюватися, проблеми можуть виникати й у випадку залучення декількох експертів.

Саме тому проблема оцінювання невизначеностей, породжених відсутністю тієї чи іншої інформації, а також чутливості глобальних пріоритетів до змін в структурі ієрархії та інтенсивності локальних взаємозв'язків є важливою та актуальною. Деякі аспекти та можливості розв'язання цієї проблеми й розглядаються нижче.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Початки МАІ виникли восени 1971 р., коли Т. Сааті працював над проблемами планування в непередбачених обставинах для Міністерства оборони США. Становлення теорії відбувалося в 1972 р. під час досліджень з нормування електроенергії для окремих видів промисловості відповідно до їх внеску в добробут країни, проведених для Національного наукового фонду. Шкала для числового оцінювання тверджень експертів виникла в 1972 р. у Каїрі, де Т. Сааті аналізував вплив стану «ні мир, ні війна» на економічний, політичний і військовий статус Єгипту. Практично важливе застосування МАІ було здійснене з дослідженням транспортної системи Судану в 1973 р. Особливо інтенсивно МАІ розвивався в 1974–1978 рр. – аналізувалися тенденції тероризму для Агентства з контролю над озброєннями й роззброєнням у Вашингтоні, у якому Т. Сааті пропрацював сім років, досліджувалися інші конфлікти (наприклад, конфлікт у Північній Ірландії), а також вирішувалося питання розміщення ресурсів відповідно до пріоритетів для великих приватних, урядових і міжнародних концернів. Результати цих досліджень викладені в численних працях Т. Сааті та його послідовників [5].

Теоретичні засади МАІ є моделлю природного перебігу мислення людини, що відтворює концепцію й структуру складної проблеми. На створення теорії вплинули такі чинники [6]:

- При спостереженні за людьми, що брали участь у процесі побудови та встановлення пріоритетів ієрархії, виявлено, що вони природно займаються послідовним групуванням окремих предметів у межах рівнів і поділом рівнів за складністю.
- Особи, знайомі з певною проблемою, можуть побудувати ієрархію, що відповідає декомпозиції проблеми, по-різному, однак якщо міркування людей схожі, те їхні результати будуть подібними. Крім того, цей процес малочутливий, тобто розходження при деталізації в межах ієрархії на практиці не приводять до істотних змін у результатах.
- У процесі розроблення теорії знайдений математично обґрунтований спосіб оперування міркуваннями.

Як метод прийняття рішень в слабоструктурованих ситуаціях МАІ застосовується в найрізноманітніших галузях: оцінювання нерухомості [6], планування рішень в економіці [7], обрання підприємств-аналогів [5], розроблення програмного забезпечення [8], інтернет [9], управлінні проектами [11,14], управління ресурсами [13] та інших. Це свідчить на користь та об'єктивність методу, але водночас питання аналізу на чутливість, які є практично важливими, розглядалися на якісному рівні в невеликій кількості робіт [10].

Мета статті

Метою статті є розроблення підходів та дослідження способів оцінювання невизначеностей та аналізу ієрархії на чутливість, а також підвищення надійності та якості отримання достовірніших даних щодо пріоритетів альтернатив.

Оцінювання невизначеностей та аналіз на чутливість

У багатьох випадках при проведенні аналізу ієрархії для певних альтернатив можуть бути відсутні оцінки відносно якогось критерію. Це може бути спричинене неможливістю оцінити ці альтернативи на етапі попарних порівнянь або відсутністю необхідної інформації. У таких випадках можна перевірити, наскільки оцінка цієї альтернативи є важливою для глобальної цілі (вектора глобальних пріоритетів). Для цього потрібно проаналізувати ієрархію на чутливість щодо цієї альтернативи або спростити ієрархію, вилучивши нерепрезентативні критерії.

Алгоритм МАІ

Метод аналітичної ієрархії ґрунтується на ієрархічному представленні елементів складної проблеми та використовує жорсткі оцінки в шкалі відношень. Побудова ієрархії починається з окреслення проблеми дослідження. Далі будується ієрархія, що містить мету (корінь ієрархії), проміжні рівні (аспекти мети, критерії) та альтернативи (листя ієрархії). Елементи кожного рівня ієрархії порівнюються попарно відносно інтенсивності їх впливу на спільну для них характеристику. Тобто, для всіх елементів-нащадків відповідного елемента-предка будують матриці попарних порівнянь. Попарні порівняння реалізуються в термінах домінування одного елемента над іншим (з використанням оцінок за дев'ятибальною шкалою).

У процесі формування матриці попарних порівнянь на матрицю накладаються обмеження оберненої симетричності. Для оцінки однорідності тверджень експерта використовуються відхилення величини максимального власного значення від порядку матриці. Кількісними характеристиками непослідовності тверджень експерта є індекс узгодженості та відношення узгодженості.

Основним завданням МАІ є розрахунок глобальних пріоритетів альтернатив відносно всієї ієрархії. Ієрархічний синтез використовується для зважування власних векторів матриць парних порівнянь альтернатив вагами критеріїв (елементів), що наявні в ієрархії, а також для обчислення загальних пріоритетів альтернатив. Після розв'язання задачі ієрархічного синтезу оцінюється однорідність ієрархії загалом за допомогою підсумовування показників однорідності всіх рівнів, приведених шляхом «зважування» до першого ієрархічного рівня, де знаходиться коренева вершина.

1. Побудова ієрархії починається з окреслення проблеми дослідження. Далі будується власне ієрархія, що містить мету (призначення), якій відповідає корінь ієрархії, проміжні рівні (аспекти мета, мета критерії, критерії) і альтернативи, що формують найвищий рівень ієрархії (листя).

2. Визначення локальних пріоритетів починається із побудови матриці попарних порівнянь. Елементи задачі МАІ порівнюються попарно відносно їх дії (ваги, інтенсивності) на спільну для них характеристику. Якщо $\mathrm{B} = \{B_1,..., B_n\}$ – множина елементів, а $\mathrm{W} = \{w_1,..., w_n\}$ – відповідно їх ваги, або інтенсивності, то елементи матриці їх порівняльної важливості $A = \{a_{ij}\}$ визначаються формулою $a_{ij} = w_i / w_j$. Якщо W невідомий, то попарні порівняння реалізуються на основі суб'єктивних тверджень, що оцінюється за певною шкалою, і за цими даними знаходяться. Попарні порівняння реалізуються в термінах домінування одного елемента над іншими. Локальні пріоритети отримуються шляхом обчислення множини головних власних векторів для кожної з обернено симетричних матриць ієрархії та нормалізації результату. Обчислення головного власного вектора вектора $x = \{x_1, x_2,..., x_n\}$ позитивної квадратної матриці $A = \{\mathrm{a}_{\mathrm{ij}}\}$ реалізується на підставі визначення рівності $Ax = \lambda_{\max} x$, де $\lambda_{\max}$ – максимальне власне значення матриці A.

3. У процесі формування матриці попарних порівнянь на матрицю накладається умова оберненої симетричності. У практичних задачах кількісна і транзитивна однорідність (узгодженість порушується). Тобто необхідно оцінити узгодженість тверджень експерта. Корисним результатом для оцінювання неузгодженості є індекс узгодженості та відношення узгодженості.

4. Розрахунок глобальних пріоритетів альтернатив, тобто пріоритетів альтернатив відносно всієї ієрархії:

a. Визначаємо головні власні вектори $x_j^{(i)}$ для всіх матриць попарних порівнянь ієрархії з заданою точністю.

b. Починаємо ієрархічний синтез з рівня $(s-1)$, тому номер поточного рівня ієрархії (початкове присвоювання) $i = s-1$

c. Для всіх вершин i - го рівня розраховуємо вектори пріоритетів альтернатив. Для кожного елемента $Q_j^{(i)}$ будуємо матрицю $P_j^{(i)}$ з векторами пріоритетів альтернатив елементів ієрархії, що є прямими нащадками елемента $Q_j^{(i)}$.

d. $i = i - 1$. Якщо $i > 0$, то переходимо до п. 3, продовжуючи розрахунки. В іншому випадку досягнутий корінь ієрархії, і вектор пріоритетів альтернатив $p_1^{(1)}$ є результуючим вектором пріоритетів альтернатив відносно ієрархії..

Аналіз на чутливість

Аналіз на чутливість (аналіз чутливості) – вивчення того, як прогнозовані показники мінятимуться залежно від змін в основних припущеннях, на яких ґрунтується весь прогноз.

Аналіз на чутливість від «найгіршої» оцінки до «найкращої»

Цей спосіб полягає в проведенні аналізу ієрархії для двох випадків: коли альтернатива, оцінка якої невідома, є найкращою і коли вона є найгіршою серед альтернатив, оцінки яких відомі. Так ми можемо побачити, чи впливає зміна оцінки альтернативи на вектор глобальних пріоритетів і наскільки сильним є цей вплив.

Щоб знайти найкращу оцінку, потрібно спершу сформувати нову матрицю попарних порівнянь, вилучивши з існуючої матриці рядок і стовпець, що відповідають альтернативі, оцінки якої невідомі. Якщо, наприклад, відсутні оцінки k-ї альтернативи, тоді потрібно вилучити з матриці попарних порівнянь k-й рядок і k-й стовпець. Так отримаємо матрицю, порядок якої менший на одиницю.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(k-1)} & a_{1(k+1)} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(k-1)1} & \dots & a_{(k-1)(k-1)} & a_{(k-1)(k+1)} & \dots & a_{(k-1)n} \\ a_{(k+1)1} & \dots & a_{(k+1)(k-1)} & a_{(k+1)(k+1)} & \dots & a_{(k+1)n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(k-1)} & a_{n(k+1)} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Обчисливши власний вектор такої матриці, ми визначимо локальні пріоритети. З отриманих оцінок нас будуть цікавити максимальна і мінімальна, щоб визначити, як зміниться головний власний вектор пріоритетів ієрархії із зміною оцінок у межах від найкращої до найгіршої.

Для подальшого аналізу використовуємо оцінки з матриці попарних порівнянь, що відповідають одній з двох альтернатив. Один раз – тій альтернитиві, пріоритет якої найвищий, другий – тій, оцінки у векторі локальних пріоритетів якої найменший. Саме ці оцінки використовуватимемо для характеристики невідомої альтернативи. Після цього розглянемо два випадки. Повертаємося до початкової матриці, заповнивши рядок і стовпець невідомої альтернативи значеннями, що відповідають найкращій і найгіршій альтернативі. В обох випадках діагональний елемент дорівнюватиме одиниці. Наприклад, найкращою альтернативою (з тих, для яких були оцінки) була m-на. Тоді, записуючи оцінки цієї альтернативи у рядок і стовпець, альтернативи оцінки якої відсутні, отримаємо:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(k-1)} & a_{1(k+1)} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(k-1)1} & \dots & a_{(k-1)(k-1)} & a_{(k-1)(k+1)} & \dots & a_{(k-1)n} \\ a_{(k+1)1} & \dots & a_{(k+1)(k-1)} & a_{(k+1)(k+1)} & \dots & a_{(k+1)n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(k-1)} & a_{n(k+1)} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} & \dots & a_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Так можна отримати два варіанти ієрархії (з найкращою і найгіршою оцінкою невідомого елемента) і, відповідно, два вектори глобальних пріоритетів. Якщо в обох випадках результати відрізняються незначно (зберігається порядок пріоритетів або пріоритети альтернатив в багатьох випадках близькі), то оцінка альтернативи, яка була невідома, є неважливою або маловажливою для ієрархії загалом і не впливає на глобальні пріоритети.

Аналіз на чутливість від «істотно гіршої» оцінки до «істотно кращої»

Цей метод є певною видозміною попереднього. Як і в попередньому випадку, спочатку потрібно знайти найкращу і найгіршу альтернативу серед тих, оцінки яких відомі. Після цього необхідно побудувати два варіанти ієрархії. Повертаючись до початкової матриці, заповнюємо рядок і стовпець для альтернативи з невідомими оцінками значеннями, що відповідають оцінкам «значно краща за найкращу оцінку» і «значно гірший за найгіршу». Зрозуміло, що в обох випадках діагональний елемент дорівнюватиме одиниці. Оримавши два варіанти ієрархії, обчислюємо для них глобальні пріоритети. Якщо в обох випадках результати відрізняються незначно (зберігається порядок ранжування або оцінки альтернатив в багатьох випадках близькі), то оцінка альтернативи, яка була невідома, є неважливою або мало важливою для ієрархії загалом і не впливає на глобальні пріоритети.

Аналіз «середньої» оцінки

Цей метод є доповненням до аналізу на чутливість від «найгіршої» оцінки до «найкращої».

Середню оцінку визначаємо як середнє геометричне серед відомих оцінок. Щоб знайти середню оцінку, потрібно спершу сформувати нову матрицю попарних порівнянь, вилучивши з існуючої матриці рядок і стовпець, що відповідають альтернативі, оцінки якої невідомі

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(k-1)} & a_{1(k+1)} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(k-1)1} & \dots & a_{(k-1)(k-1)} & a_{(k-1)(k+1)} & \dots & a_{(k-1)n} \\ a_{(k+1)1} & \dots & a_{(k+1)(k-1)} & a_{(k+1)(k+1)} & \dots & a_{(k+1)n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(k-1)} & a_{n(k+1)} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Обчисливши середнє геометричне елементів кожного рядка (один із способів визначення власного вектора (локальних пріоритетів)) такої матриці, ми визначимо середні оцінки.

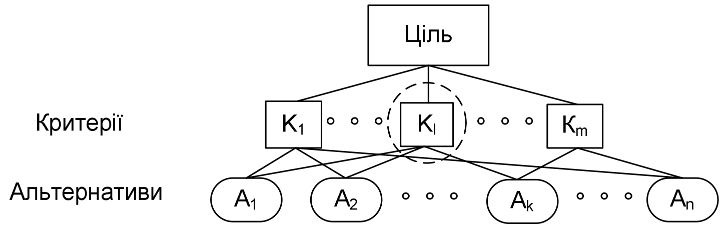
Ці оцінки записуємо у стовпець, що відповідає альтернативі, оцінки якої не відомі. А у відповідний рядок записуємо обернені значення. Діагональний елемент, звичайно, дорівнює одиниці.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(k-1)} & a_{1(k+1)} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(k-1)1} & \dots & a_{(k-1)(k-1)} & a_{(k-1)(k+1)} & \dots & a_{(k-1)n} \\ a_{(k+1)1} & \dots & a_{(k+1)(k-1)} & a_{(k+1)(k+1)} & \dots & a_{(k+1)n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(k-1)} & a_{n(k+1)} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} & \dots & a_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

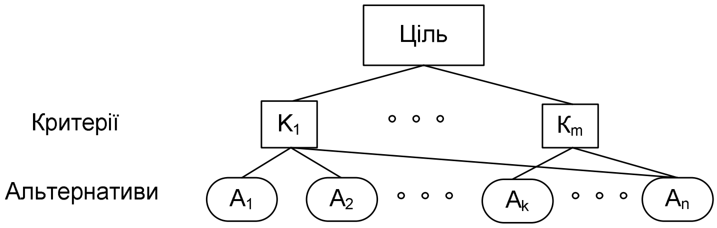
Так отримуємо новий варіант ієрархії. Порівнявши вектор пріоритетів такої ієрархії з векторами двох ієрархій (з найкращою і найгіршою оцінкою невідомого елемента), можна зробити висновки про те, чи альтернатива з невідомими оцінками зміщена у бік кращих чи гірших альтернатив. Якщо оцінка цієї альтернативи у векторі пріоритетів є середньою між оцінками, отриманими в результаті аналізу за «найкращою» та «найгіршою» альтернативами, то можна вважати, що оцінки цієї альтернативи розподілені рівномірно. Інакше можна робити висновок про зміщення оцінок у бік кращих або гірших оцінок.

Вилучення критеріїв, за якими відсутні оцінки для альтернатив

Якщо оцінка критеріїв для загальної цілі не висока, то можна спробувати вилучити із структури ієрархії критерії, за якими відсутні оцінки для альтернативи.



Тобто, якщо невідомі оцінки альтернативи A_k за критерієм K_l, то можна вилучити цей критерій і обчислити вектор глобальних пріоритетів для модифікованої ієрархії. Адже вплив цього критерію на вектор глобальний пріоритетів буде незначний.



Коли проведемо обчислення, отримаємо вектор глобальних пріоритетів для цієї ієрархії. Порівняємо отриманий результат з результатами, отриманими за першими двома методами.

Аналіз на чутливість щодо критеріїв

Будуючи дерево цілей, ми на останньому рівні отримуємо критерії. Ці критерії знаходяться на передостанньому рівні в ієрархії. Але в результаті побудови дерева в нас можуть з'явитися критерії, що є неважливими для досягнення цілі. Постає питання виявлення і вилучення таких альтернатив. Для цього потрібно визначити, як змінюватиметься вектор пріоритетів, якщо з рівня критеріїв видаляти по черзі кожен з елементів.

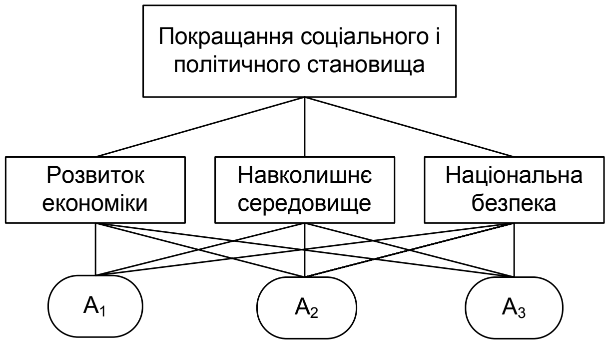
Тобто, при такому методі, потрібно спочатку проаналізувати всю ієрархію. Потім з початкової ієрархії видалити один критерій і провести лінійну згортку. Отже, ми отримаємо інший вектор пріоритетів. Тоді, прирівнявши вектор повної і спрощеної ієрархії, ми можемо зробити висновок щодо важливості відкинутого критерію. Таку процедуру треба повторити для кожного критерію. Тоді ми можемо відкинути критерії, які не є важливими для прийняття рішення.

Приклад розв'язання задачі

Розглянемо приклади використання описаних методів аналізу для конкретної задачі.

Існують три великі споживачі енергії в країні: A_1 – побутове використання, A_2 – транспорт, A_3 – промисловість. Вони становлять третій, найвищий рівень ієрархії. Цілями, відносно яких оцінюються споживачі, є: внесок у розвиток економіки, внесок у якість навколишнього середовища і внесок до національної безпеки. Цілі становлять другий рівень ієрархії.

Отже, ієрархія матиме такий вигляд:



Побудуємо матриці попарних порівнянь трьох цілей відповідно до їхнього впливу на загальну ціль – покращання соціального і політичного становища. У цьому прикладі будемо нав'язувати узгодженість, вимагаючи певності в судженнях. Тому, заповнивши перший рядок, інші елементи отримаємо, виходячи з вимог, що задаються визначенням узгодженості.

Покращання соціального і політичного становища	Розвиток економіки	Навколишнє середовище	Національна безпека	Вектор пріоритетів
Розвиток економіки	1	5	3	0,652
Навколишнє середовище	1/5	1	3/5	0,130
Національна безпека	1/3	5/3	1	0,218

$\lambda_{\max} = 3.0; \qquad ІУ = 0.0; \qquad ВУ = 0.0$

Отже, головне власне значення $\lambda_{\max} = 3.0$, індекс узгодженості $IУ = 0.0$, відношення узгодженості $BУ = 0.0$.

Порівнюючи економіку з навколишнім середовищем, а потім з національною безпекою, вважають, що відповідно до соціально-політичного впливу економіка має сильну перевагу в першому випадку і слабку – в другому; відповідно в першому рядку стоятимуть числа 5 і 3 відповідно. Національній безпеці присвоюється менше порівняно з навколишнім середовищем число 3 (оскільки економічно слабкорозвинені країни з великою охотою закуповують зброю, але не можуть цього зробити, не маючи хоча би мінімальної економічної бази). Числа в другому і третьому рядках отримані з вимоги дотримання узгодженості для цього випадку.

Відповідно, соціально-політичний вплив навколишнього середовища порівняно з національною безпекою отримує 3/5 і т.д. (в інших матрицях цього прикладу не буде вимоги узгодженості). Вектор пріоритетів, отриманий із цієї матриці, представимо у вигляді вектора-стовпця:

$$\omega = \begin{pmatrix} 0.652 \\ 0.130 \\ 0.218 \end{pmatrix}$$

Відповідно, у порівняннях за соціально-політичним впливом, економіка отримує пріоритет 0.652, навколишнє середовище – 0.130 і національна безпека – 0.218. Оскільки пріоритет першого рівня ієрархії (загальна соціально-політична ціль) зазвичай дорівнює 1, зважені величини цих пріоритетів дорівнюють отриманому вектору, помноженому на 1, що дає той самий вектор.

Тепер особа, що приймає рішення, після детального вивчення оцінює відносну важливість кожного споживача з погляду економіки, навколишнього середовища і національної безпеки (другий рівень ієрархії). Матриці, що представляють ці судження, матимуть вигляд:

Економіка	A_1	A_2	A_3
A_1	1	3	5
A_2	1/3	1	2
A_3	1/5	1/2	1

$\lambda_{\max} = 3.0$;
$IУ = 0.0$; $BУ = 0.0$

Середовище	A_1	A_2	A_3
A_1	1	a_{12}	7
A_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
A_3	1/7	a_{32}	1

$\lambda_{\max} = ?$;
$IУ = ?$; $BУ = ?$

Нац. безпека	A_1	A_2	A_3
A_1	1	2	3
A_2	1/2	1	2
A_3	1/3	1/2	1

$\lambda_{\max} = 3.01$;
$IУ = 0.01$; $BУ = 0.02$

У такій ситуації дециденту потрібно провести аналіз на чутливість, щоб визначити, чи важливими для прийняття рішення є невідомі оцінки.

Аналіз на чутливість від «найгіршої» оцінки до «найкращої»

Цей спосіб полягає в проведенні аналізу ієрархії для двох випадків: коли альтернатива, оцінка якої невідома, є найкращою, і коли вона є найгіршою серед альтернатив, оцінки яких відомі.

Щоб знайти найкращу оцінку, вилучаємо з матриці попарних порівнянь другий рядок і другий стовпець.

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & 7 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 1/7 & a_{32} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 1/7 & 1 \end{bmatrix}$$

Обчислимо головний власний вектор цієї матриці

$$\omega = \{0.875; \quad 0.125\}.$$

Запишемо до початкової матриці спершу значення, що відповідають найкращій альтернативі, а потім – значення, що відповідають найгіршій.

Для «найкращої»:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 7 \\ 1/7 & 1/7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\omega = \{0.467; \quad 0.467; \quad 0.066\}.$$

Отже вектор пріоритетів становитиме:

$$\begin{bmatrix} 0.648 & 0.467 & 0.540 \\ 0.230 & 0.467 & 0.297 \\ 0.122 & 0.067 & 0.163 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.652 \\ 0.130 \\ 0.218 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.592 \\ 0.285 \\ 0.123 \end{bmatrix}$$

Для «найгіршої» альтернативи:

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 7 \\ 1/7 & 1 & 1 \\ 1/7 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\omega = \{0.778; \quad 0.111; \quad 0.111\}$$

Отже, вектор пріоритетів становитиме:

$$\begin{bmatrix} 0.648 & 0.778 & 0.540 \\ 0.230 & 0.111 & 0.297 \\ 0.122 & 0.111 & 0.163 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.652 \\ 0.130 \\ 0.218 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.634 \\ 0.234 \\ 0.131 \end{bmatrix}$$

Тобто ми отримали два вектори пріоритетів. В обох випадках зберігається порядок ранжування, і оцінки альтернатив близькі. Отже, оцінка альтернативи, яка була невідома, є неважливою або маловажливою для ієрархії загалом і не впливає на вектор глобальних пріоритетів ієрархії.

Аналіз на чутливість від «істотно гіршої» оцінки до «істотно кращої»

У попередньому прикладі ми знайшли найкращу і найгіршу альтернативи. Цього разу, повертаючись до початкової матриці, заповнюємо рядок і стовпець для альтернативи з невідомими оцінками значеннями, що відповідають оцінкам «значно краща за найкращу оцінку» і «значно гірша за найгіршу».

Для «значно кращої за найкращу»:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/9 & 7 \\ 9 & 1 & 9 \\ 1/7 & 1/9 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\omega = \{0.167; \quad 0.787; \quad 0.046\}$$

Отже, вектор пріоритетів становитиме:

$$\begin{bmatrix} 0.648 & 0.167 & 0.540 \\ 0.230 & 0.787 & 0.297 \\ 0.122 & 0.046 & 0.163 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.652 \\ 0.130 \\ 0.218 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.570 \\ 0.306 \\ 0.125 \end{bmatrix}$$

Для «значно гіршої за найгіршу»:

$$\begin{bmatrix} 1 & 9 & 7 \\ 1/9 & 1 & 1/9 \\ 1/7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\omega = \{0.751; \quad 0.044; \quad 0.205\}$$

Отже, вектор пріоритетів становитиме:

$$\begin{bmatrix} 0.648 & 0.751 & 0.540 \\ 0.230 & 0.044 & 0.297 \\ 0.122 & 0.205 & 0.163 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.652 \\ 0.130 \\ 0.218 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.632 \\ 0.226 \\ 0.142 \end{bmatrix}$$

Пріоритети альтернатив зберігаються, і оцінки близькі за значеннями в обох випадках (як і за варіантом аналізу «від найгіршої до найкращої»). Отже, оцінка альтернативи, яка була невідома, є неважливою або маловажливою для ієрархії загалом і не впливає на глобальні пріоритети.

Аналіз «середньої» оцінки

Щоб знайти найкращу оцінку, вилучаємо з матриці попарних порівнянь другий рядок і другий стовпець

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & 7 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 1/7 & a_{32} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 1/7 & 1 \end{bmatrix}$$

Обчислимо власний вектор цієї матриці

$$\{2.65; \quad 0.38\}$$

Запишемо в початкову матрицю ці значення.

Для «середньої»:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2.65 & 7 \\ 0.38 & 1 & 0.38 \\ 1/7 & 2.65 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\omega = \{0.680; \quad 0.134; \quad 0.186\}$$

Отже, вектор пріоритетів становитиме:

$$\begin{bmatrix} 0.648 & 0.680 & 0.540 \\ 0.230 & 0.134 & 0.297 \\ 0.122 & 0.186 & 0.163 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.652 \\ 0.130 \\ 0.218 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.625 \\ 0.235 \\ 0.140 \end{bmatrix}$$

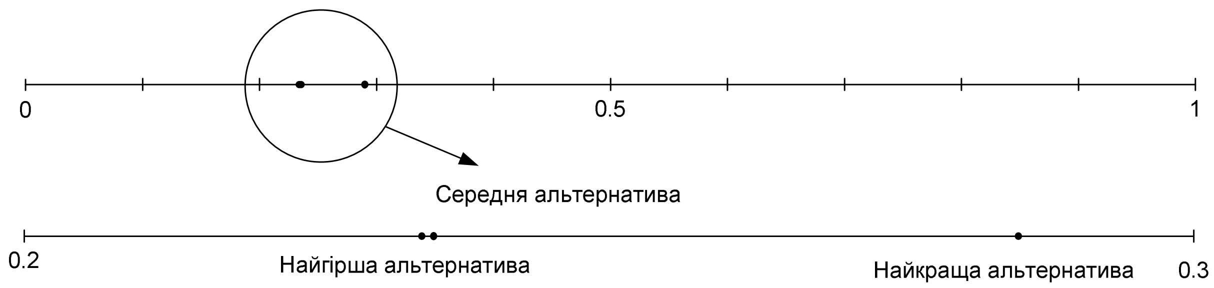
Тобто ми отримали вектор пріоритетів, що відповідає «середній» оцінці невідомої альтернативи. Тепер розглянемо три вектори:

Для найкращої альтернативи: $[0.592 \quad 0.285 \quad 0.123]$

Для найгіршої альтернативи: $[0.634 \quad 0.234 \quad 0.131]$

Для середньої альтернативи: $[0.625 \quad 0.235 \quad 0.140]$

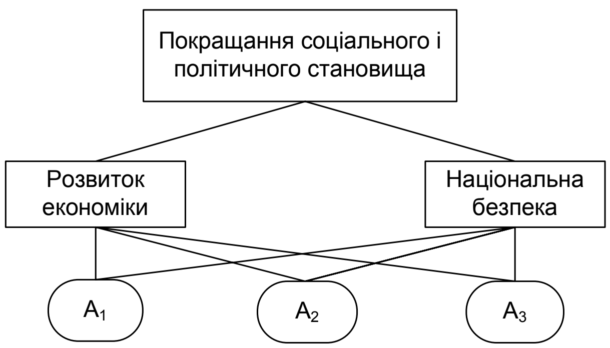
Розглянемо розподіл оцінок невідомої альтернативи:



Отже, розподіл оцінок невідомої альтернативи зміщений у бік гірших альтернатив, тому що оцінка невідомої альтернативи у векторі глобальних пріоритетів зростає значно повільніше, ніж її оцінки при проведенні попарних порівнянь. А тому її вплив на кінцевий результат незначний.

Вилучення критеріїв, за якими відсутні оцінки для альтернатив

Спробуємо видалити з заданої ієрархії критерій «Навколишнє середовище». Отримаємо нову ієрархію, для всіх елементів якої оцінки будуть відомі.



Тепер обчислимо вектор локальних пріоритетів для критеріїв відносно цілі:

Покращення соціального і політичного становища	Розвиток економіки	Національна безпека
Розвиток економіки	1	3
Національна безпека	1/3	1

$$\omega = \{0.750; \quad 0.250\}$$

Обчислимо вектор глобальних пріоритетів для модифікованої ієрархії

$$\begin{bmatrix} 0.648 & 0.540 \\ 0.230 & 0.297 \\ 0.122 & 0.163 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.750 \\ 0.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.617 \\ 0.249 \\ 0.134 \end{bmatrix}$$

Порівнявши отриманий результат з результатами, отриманими першими двома методами, можна зробити той самий висновок: невідома оцінка другої альтернативи за критерієм «Навколишнє середовище» не є важливою для ієрархії загалом.

Висновки

У ситуаціях, коли відсутні певні значення в матрицях попарних порівнянь МАІ, виникає необхідність прийняття рішення в умовах невизначеності, та аналізу прийнятого рішення на чутливість. У цьому процесі використовуються такі стратегії аналізу:

1. Аналіз на чутливість від «найгіршої» оцінки до «найкращої». Цей спосіб полягає в аналізі ієрархії для двох випадків: коли альтернатива, оцінка якої невідома, є найкращою, і коли вона є найгіршою серед альтернатив, оцінки яких відомі.

2. Аналіз на чутливість від «істотно гіршої» оцінки до «істотно кращої». Як і в попередньому випадку, спочатку потрібно знайти найкращу і найгіршу альтернативу серед тих, оцінки яких відомі. Після цього необхідно побудувати два варіанти ієрархії. Повертаючись до початкової матриці, заповнюємо рядок і стовпець для альтернативи з невідомими оцінками значеннями, що відповідають оцінкам «значно краща за найкращу оцінку» і «значно гірша за найгіршу».

3. Вилучення критеріїв, за якими відсутні оцінки для альтернатив. Якщо оцінка критеріїв для загальної цілі незначна, то із структури ієрархії вилучаються критерії, за якими відсутні оцінки для альтернативи. Після обчислення отримуємо вектор глобальних пріоритетів для модифікованої ієрархії.

4. Вилучення неістотних критеріїв. На основі інформації, отриманої в результаті попарних порівнянь, будується вектор глобальних пріоритетів альтернатив. Надалі ця процедура реалізується за умови вилучення кожного одного з критеріїв прийняття рішень. Після цього отримані вектори глобальних пріоритетів порівнюються між собою, що й дає підстави для вилучення критеріїв, що є неістотними для існуючої ситуації прийняття рішень.

Отже, запропоновані методи дають змогу реалізувати як пре-, так і постаналіз конкретної ситуації прийняття рішень і отримати додаткові аргументи на користь обрання тієї чи іншої альтернативи.

1. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. – М.: Радио и связь, 1993. 2. Саати Т. Кернс К. Аналитическое планирование. Организация систем. – М.: Радио и связь, 1991. 3. Teknomo, Kardi. (2006) Analytic Hierarchy Process (AHP) Tutorial . http://people.revoledu.com/kardi/tutorial/ahp/ 4. Daniel L. Schmoldt, Jyrki Kangas, Guillermo A. Mendoza, Mauno Pesonen. The Analytic Hierarchy Process in Natural Resource and Environmental Decision Making (Managing Forest Ecosystems-Vol. Kluwer Academic Publishers 2001. 5. Царев В.В., Новиков А. В. Выбор типичного предприятия – аналога http://www.cfin.ru/finanalysis/value/analog-mai.shtml 6. Ахметов О.А., Мжельский М.Б. Метод анализа иерархий как составная часть методологии проведения оценки недвижимости "Актуальные вопросы оценочной деятельности", ООО «Сибирский Центр Оценки». – Новосибирск, 2001. 7. Андрейчиков А.В., Андрейчикова О.Н. Анализ, синтез, планирование решений в экономике. – М.: Финансы и статистика, 2004 г. 8. Jayaswal, Bijay K., Patton, Peter C., Forman, Ernest H. The Analytic Hierarchy Process (AHP) in Software Development. http://www.franklin.com/estore/dictionary/BBAL0132362783DLDA/ 9. Ching-Fu Chen. Applying the Analytical Hierarchy Process (AHP) Approach to Convention Site Selection Journal of Travel Research, Vol. 45, No. 2, 167-174 (2006). 10. Erhan Erkut, Murat Tarimcilar. On Sensitivity Analysis in the Analytic Hierarchy Process. IMA Journal of Management Mathematics 1991 3(1):61-83. 11. D. Saaty. Use Analytic Hierarchy Process For Project Selection. ASQ Six Sigma Forum Magazine,2007, http://www.highbeam.com/doc/1P3-1336145121.html. 12. Eric E. Spires. Using the Analytic Hierarchy Process to Analyze Multiattribute Decisions.– Multivariate Behavioral Research, 1991, Vol. 26, No. 2, Pages 345-361. 13. Bojan Srdjevic. Linking analytic hierarchy process and social choice methods to support group decision-making in water management. – Decision Support Systems, Volume 42 , Issue 4 (January 2007) Pages: 2261-2273. 14. Fatih Tüysüz, Cengiz Kahraman. Project risk evaluation using a fuzzy analytic hierarchy process: An application to information technology projects. – International Journal of Intelligent Systems, Volume 21, Issue 6 , Pages 559 – 584, 2006.