

## МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЯ ТЕХНОЛОГІЧНИХ РЕЖИМІВ СУШІННЯ ДЕРЕВИНИ

© Соколовський Я., Бакалець А., 2008

**Числовими методами розв'язана математична модель розвитку напружень та розподілу вологи у деревині під час сушіння та сформульована задача оптимізації цієї моделі. Проаналізовано вибір функції мети для мінімізації кінцевого вологовмісту у висушеному пиломатеріалі з врахуванням обмежень на напруження. Побудований багатоступеневий режим сушіння за рахунок розв'язання задачі оптимізації.**

**For the mathematical model of strain and humidity distribution in the process of wood drying solved by numerical methods an optimization problem is proposed. The goal function for the minization of the final moisture content in wood with strain constriction is discussed. A tri-step regime for wood drying is build by solving the optimization problem.**

### Актуальність проблеми

Сушіння вирізняється з-поміж інших процесів обробки деревини значною тривалістю та великими енергетичними затратами та водночас має колосальне значення для деревообробної промисловості. Проблема сушіння деревини повністю не розв'язана, незважаючи на те, що успішно використовуються різноманітні способи й обладнання. Невчасне або неповноцінне сушіння деревини приводить до різкого скорочення терміну придатності дерев'яних конструкцій і до величезних перевитрат деревини.

Вирішальним фактором інтенсифікації процесу сушіння з одночасним підвищенням якості висушуваних матеріалів є режим сушіння. Від правильного вибору та дотримання параметрів середовища якомога ближче до заданого рівня залежно від стану матеріалу – його вологості та внутрішніх напружень – залежать кількісні та якісні показники процесу сушіння. Вироблення оптимальних технологічних режимів, досягнення необхідного рівня якості сушіння є актуальною проблемою сьогодення, одним із шляхів розв'язання якої є побудова математичних моделей, що дадуть змогу контролювати вологість матеріалу і розвиток внутрішніх напружень.

### Аналіз відомих результатів

Більшість досліджень щодо оптимізації процесів сушіння деревини стосуються або оптимізації різних характеристик камер сушіння, або автоматизації процесу сушіння. При цьому практично відсутні публікації щодо побудови оптимальних режимів сушіння з погляду фізико-механічних процесів, що відбуваються у деревині, які є визначальними для забезпечення якості готової продукції. Більшість режимів сушіння будуються емпірично, а пізніше вдосконалюються, оптимізуються за економічними або технічними критеріями. Відповідно відомі критерії оптимізації умовно поділяють на економічні, технічні та технологічні [1].

### Формулювання задачі оптимізації

У попередніх статтях [2, 3] розглянуто реалізацію методу скінченних елементів, за допомогою якого розв'язана нестационарні задача тепловологоперенесення та задача розподілу деформаційно-релаксаційних полів для зміни тривалості сушіння на проміжку  $\tau \in [0, \theta]$  в області  $\Omega = \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2) : x_i \in [0, l_i], i = 1, 2 \}$ , що являє собою поперечний перетин прямокутного дерев'яного бруса, центр якого суміжний з початком координат (рис. 1). Двовимірна анізотропна модель розглядається з двох міркувань: по-перше, напруження, що виникають у деревині під час сушіння у

тангентальному та радіальному напрямках анізотропії, значно перевищують напруження в напрямку волокон і є основним джерелом дефектів у висушених пиломатеріалах; по-друге, розмір пиломатеріалу вздовж волокон практично завжди значно більший від розмірів поперек волокон.

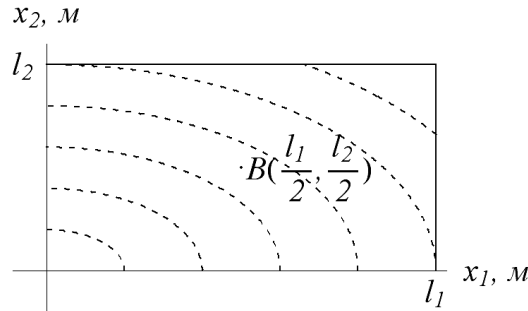


Рис. 1. Схема поперечного перерізу бруса ( $l_1, l_2$  – половини геометричних розмірів)

На основі наявної моделі розподілу температури, вологи та напружень у деревині в процесі сушіння сформулюємо задачу оптимального керування нестационарними полями вологи та вологісними деформаціями, яка можна подати так.

Необхідно знайти такі функції керування: температуру середовища  $t_c(\mathbf{x}, \tau)$ , відносну вологість  $\varphi(\mathbf{x}, \tau)$  та швидкість руху агента сушіння  $v(\mathbf{x}, \tau)$ , враховуючи обмеження, накладені на них

$$\begin{aligned} t_{c_a} &\leq t_c(\mathbf{x}, \tau) \leq t_{c_b}; \\ \varphi_a &\leq \varphi(\mathbf{x}, \tau) \leq \varphi_b; \\ v_a &\leq v(\mathbf{x}, \tau) \leq v_b \end{aligned} \quad (1)$$

і на в'язкопружні напруження

$$\begin{aligned} |\sigma_{11}(\mathbf{x}, \tau)| &\leq \sigma_{11_a}; \\ |\sigma_{22}(\mathbf{x}, \tau)| &\leq \sigma_{22_a}; \\ |\sigma_{12}(\mathbf{x}, \tau)| &\leq \sigma_{12_a}, \end{aligned} \quad (2)$$

щоб для дерев'яного бруса з початковим вологовмістом

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) \quad (3)$$

за заданий час сушіння  $T$  мінімізувати середнє інтегральне значення кінцевого вологовмісту, який обчислюється за формулою:

$$J(u) \equiv \frac{\int_{\Omega} u(\mathbf{x}, T) d\Omega}{l_1 \times l_2} \rightarrow \min. \quad (4)$$

При цьому поле вологовмісту у дерев'яному бруську  $\Omega$  задовольняє двовимірне рівняння масоперенесення

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( a_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( a_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \quad (5)$$

та граничні умови

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_{x_i=l_i} &= \beta_i \left( \frac{1}{a_i} - \left[ \frac{\delta}{\lambda_i} \right] \rho_0 (1 - \varepsilon) \beta_i \right) (u_p - u|_{x_i=l_i}) - \frac{\delta}{\lambda_i} \alpha_i (t_c - t|_{x_i=l_i}); \\ \left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_{x_i=0} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Тут  $u_p(t, \varphi)$  – рівноважна вологість;  $c(t, u)$  – теплоємність;  $\lambda_1(t, u)$ ,  $\lambda_2(t, u)$  – коефіцієнти теплопровідності у напрямках анізотропії;  $\rho_0$  – базисна густина;  $\delta(t, u)$  – термоградієнтний коефіцієнт;  $a_1(t, u)$ ,  $a_2(t, u)$  – коефіцієнти вологопровідності у напрямках анізотропії;  $\alpha_1(t_c, v)$ ,  $\alpha_2(t_c, v)$  – коефіцієнти теплообміну та  $\beta_1(t_c, \varphi, v)$ ,  $\beta_2(t_c, \varphi, v)$  – коефіцієнти вологообміну;  $\mathbf{n} = (n_1, n_2)^T$  – вектор зовнішньої нормалі границі області  $\Omega$ .

Алгоритм числового розв'язування крайової задачі (3), (5), (6) розглянутий у попередній статті співавторів [3]. У цій статті також наведені результати числового знаходження розподілу температури  $t(\mathbf{x}, \tau)$  та вмісту води  $u(\mathbf{x}, \tau)$ , тому надалі вважаємо ці функції відомими в області  $\Omega$  та кожен момент часу  $\tau \in [0, T]$ . При цьому зауважимо, що в задачі оптимізації температура  $t(\mathbf{x}, \tau)$  в поперечному перерізі деревного взірця вважається сталою, а вологовміст  $u(\mathbf{x}, \tau)$  входить до функції мети.

Функцію мети, тобто функціонал  $J(u)$  у формулі (4) можна вибрати іншого вигляду. Наприклад, мінімальний або максимальний кінцевий вологовміст тіла. Але у випадку вибору критерію оптимізації у вигляді мінімального кінцевого вологовмісту

$$\min_{\mathbf{x} \in \Omega} (\tau_k, \mathbf{x}) \rightarrow \min$$

функція мети набуватиме свого мінімального значення на границі тіла, а саме у точці  $(l_1, l_2)$ . Математичне моделювання показало, що отримані функції керування (режими сушіння) зменшуватимуть вологість поверхневих шарів деревини, незважаючи на розподіл вологості у внутрішніх шарах деревини. При цьому напруження в поверхневих шарах досягнуть значень, близьких до межі міцності і підтримуватимуться на цьому рівні.

Аналогічно, у випадку вибору критерію оптимізації у вигляді максимального кінцевого вологовмісту

$$\max_{\mathbf{x} \in \Omega} (\tau_k, \mathbf{x}) \rightarrow \min$$

отримаємо режими сушіння, які зменшуватимуть вологість центральних або внутрішніх шарів пиломатеріалу, незважаючи на розподіл вологовмісту на поверхні матеріалу.

Окрім середнього кінцевого вологовмісту в об'ємі пиломатеріалу  $J(u)$ , серед технологічних критеріїв оптимізації [1] пропонується, наприклад, перепад вологості за товщиною пиломатеріалу, або градієнт вологовмісту. Але градієнт вологості є основним джерелом виникнення напружень у деревині в процесі сушіння, на які накладаються обмеження (2). Тобто перепад вологості за товщиною пиломатеріалу належить до обмежень задачі оптимізації, а не до цільових функцій.

Щоб завершити формулювання задачі оптимізації, необхідно обчислити значення напружень  $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, \tau)$ , що входять в обмеження (2). Сформулюємо задачу визначення напружено-деформівного стану деревини в процесі сушіння.

Напруження  $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, \tau)$ , що виникають у деревині в процесі сушіння, задовольняють рівняння рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = 0, \quad (7)$$

де  $b_i$  – компоненти об'ємних напружень.

Зв'язок між компонентами напружень і деформацій записуються за допомогою співвідношень Больцмана–Вольтера у вигляді:

$$\boldsymbol{\sigma}(\tau) = \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}(\tau) - \boldsymbol{\beta}\Delta u) - \mathbf{C} \int_0^\tau \mathbf{R}(s - \tau)\boldsymbol{\varepsilon}(s)ds \quad (8)$$

або у скалярній формі за формулами:

$$\begin{aligned}\sigma_{11}(t) &= C_{11}(\varepsilon_{11} - \beta_1 \Delta U) - C_{11} \int_0^t R_{11}(t, \tau) \varepsilon_{11}(\tau) d\tau + C_{12}(\varepsilon_{22} - \beta_2 \Delta U) - C_{12} \int_0^t R_{12}(t, \tau) \varepsilon_{22}(\tau) d\tau; \\ \sigma_{22}(t) &= C_{21}(\varepsilon_{11} - \beta_1 \Delta U) - C_{21} \int_0^t R_{21}(t, \tau) \varepsilon_{11}(\tau) d\tau + C_{22}(\varepsilon_{22} - \beta_2 \Delta U) - C_{22} \int_0^t R_{22}(t, \tau) \varepsilon_{22}(\tau) d\tau; \\ \sigma_{12}(t) &= 2C_{33} \varepsilon_{12} - 2C_{33} \int_0^t R_{33}(t, \tau) \varepsilon_{12}(\tau) d\tau;\end{aligned}$$

Співвідношення Коші задають зв'язок між деформаціями  $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, \tau)$  та переміщеннями  $u_i(\mathbf{x}, \tau)$ :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (9)$$

а деформації задовольняють шість рівнянь геометричної сумісності:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{jl,ik} - \varepsilon_{ik,jl} = 0. \quad (10)$$

У формулі (7) вектор коефіцієнтів всихання  $\boldsymbol{\beta}$  та градієнт вмісту вологи  $\Delta U$  виражають вологісні деформації, що зумовлені перепадом вологості і є основним джерелом виникнення напружень у деревині в процесі сушіння. Для анізотропного тіла у випадку плоского напружено-деформівного стану матриця пружності має вигляд

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{E_{11}}{1-\nu_1\nu_2} & \frac{\nu_1 E_{22}}{1-\nu_1\nu_2} & 0 \\ \frac{\nu_1 E_{22}}{1-\nu_1\nu_2} & \frac{E_{22}}{1-\nu_1\nu_2} & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix},$$

де  $E_{11}$ ,  $E_{22}$  – модулі Юнга,  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  – коефіцієнти Пуассона,  $\mu$  – модуль зсуву.

У цій задачі враховано, що коефіцієнти матриці пружності залежать від значень температури та вмісту вологості матеріалу. Ядра релаксації  $R(t, \tau)$ , які характеризують реологічну поведінку деревини у процесі сушіння, мають вигляд

$$R = R(t, \tau) = R_1(t - \tau) \cdot R_2(\tau) = \left[ \sum_{j=1}^L \eta_j e^{-\chi_j(t-\tau)} \right] \cdot \left[ \sum_{j=1}^L \mu_j e^{-\kappa_j(\tau-\tau_0)} \right], \quad (11)$$

До рівнянь (7)–(11) необхідно додати граничні умови (що враховують симетричність області задачі  $\Omega$ ):

$$u_i \Big|_{x_i=0} = 0, \quad (12)$$

$$\sigma_{ii} \Big|_{x_i=l_i} = 0 \quad (13)$$

та початкову умову вигляду

$$u_i \Big|_{\tau=0} = 0. \quad (14)$$

Отже, отримаємо нестационарну, сформульовану в переміщеннях  $\mathbf{u} = \{u_1, u_2\}$  задачу визначення напружено-деформівного стану висушеної деревини. Після обчислення полів переміщень можна моделювати розподіл деформацій  $\varepsilon_{ij}(\tau, \mathbf{x})$  та напружень  $\sigma_{ij}(\tau, \mathbf{x})$ , що є обмеженнями (2) у задачі оптимізації, при різних температурно-вологісних умовах.

## Аналіз результатів моделювання

### Моделювання одноступеневого режиму

Для побудови одноступеневого режиму, тобто режиму, при якому шукані функції керування – температура середовища  $t_c(\mathbf{x}, \tau) = const$  та відносна вологість  $\varphi(\mathbf{x}, \tau) = const$  – сталі, обчислення здійснено методом перебору – обчислені значення цільової функції  $J(u)$  та максимальні напруження при різних значеннях функцій керування  $t_c(\tau)$  та  $\varphi(\tau)$ . Далі відкинута функції керування, при яких максимальні напруження досягли значень, більших за 75% межі міцності.

При цьому виявлена закономірність, що із збільшенням температури середовища для утримання напружень, нижчих за межу міцності, необхідно одночасно збільшувати відносну вологість повітря в камері. Це збігається з експериментальними дослідженнями різних дослідників. Наприклад, у статті [5] запропоновані високотемпературні режими для сушіння деревини буку наголошують на необхідності збільшення відносної вологості в камері з метою зменшення величини всихання.

### Моделювання багатоступеневого режиму

Для розв'язання сформульованої оптимізаційної задачі (1)–(10) використано метод генетичних алгоритмів. Згідно з основними означеннями та положеннями теорії еволюційних алгоритмів [6], для розв'язування оптимізаційної задачі необхідно задати вигляд хромосоми, яка представлятиме розв'язок та задати функцію придатності, згідно з якою визначатиметься найпридатніша хромосома, тобто найкращий розв'язок.

Для побудови триступеневого режиму розв'язок задачі набуде вигляду:

$$t_c(\tau) = \begin{cases} t_{c1}, & 0 \leq \tau \leq \tau_1 - 1; \\ (t_{c2} - t_{c1})(\tau - \tau_1 + 1), & \tau_1 - 1 < \tau \leq \tau_2; \\ t_{c2}, & \tau_2 - 1 < \tau \leq \tau_2 - 1; \\ (t_{c3} - t_{c2})(\tau - \tau_2 + 1), & \tau_2 - 1 < \tau \leq \tau_2; \\ t_{c3}, & \tau_2 < \tau \leq 30 \end{cases} \quad (15)$$

$$\varphi(\tau) = \begin{cases} \varphi_1, & 0 \leq \tau \leq \tau_1 - 1; \\ (\varphi_2 - \varphi_1)(\tau - \tau_1 + 1), & \tau_1 - 1 < \tau \leq \tau_2; \\ \varphi_2, & \tau_2 - 1 < \tau \leq \tau_2 - 1; \\ (\varphi_3 - \varphi_2)(\tau - \tau_2 + 1), & \tau_2 - 1 < \tau \leq \tau_2; \\ \varphi_3, & \tau_2 < \tau \leq 30. \end{cases}$$

Тобто температура та відносна вологість у камері сушіння сталі на кожному ступені режиму сушіння та змінюються за лінійним законом між ними. Відповідна хромосома матиме вигляд

$$\{\tau_1, \tau_2, t_{c1}, t_{c2}, t_{c3}, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}. \quad (16)$$

Функцію придатності записано так

$$P(\{\tau_1, \tau_2, t_{c1}, t_{c2}, t_{c3}, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}) = \begin{cases} 0, & \max_{\Omega} \sigma_{ij} \geq 75\% \sigma_{m.m.}, \\ J(u), & \text{інакше} \end{cases}, \quad (17)$$

де  $\sigma_{i,i}(t, u)$  – експериментально визначена межа міцності [4]. Як видно із вигляду хромосоми (16), необхідно підібрати не лише значення температури середовища та відносної вологості на кожному із ступенів, але й визначити оптимальні моменти часу, в котрі необхідно здійснювати перехід на наступний ступінь.

Результати числового розв'язування оптимізаційної задачі представлено на рис. 2. Числовий експеримент проведено для деревини сосни ( $\rho_0 = 460 \text{ кг/м}^3$ ) з початковими значеннями вологовмісту  $U_0 = 0,2 \text{ кг/кг}$  і температури  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ .

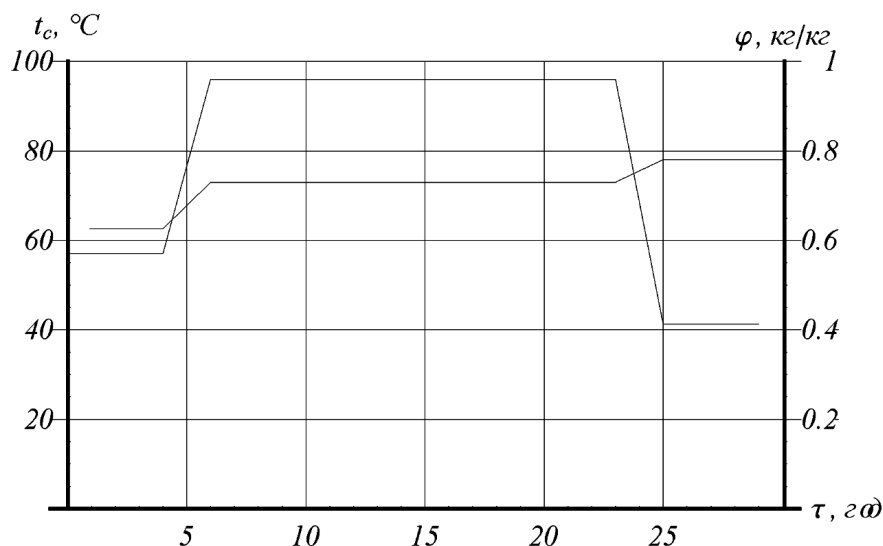


Рис. 2. Зміна в часі параметрів зовнішнього середовища  $t_c(\tau)$  та  $\phi(\tau)$

Для порівняння впливу отриманого триступеневого режиму та режиму із сталими параметрами зовнішнього середовища на процес сушіння деревини на рис.3. представлено розподіл вологовмісту в поверхневому та центральному шарах деревного взірця. Відповідно на рис. 4 та рис. 5 показаний розвиток вологісних напружень.

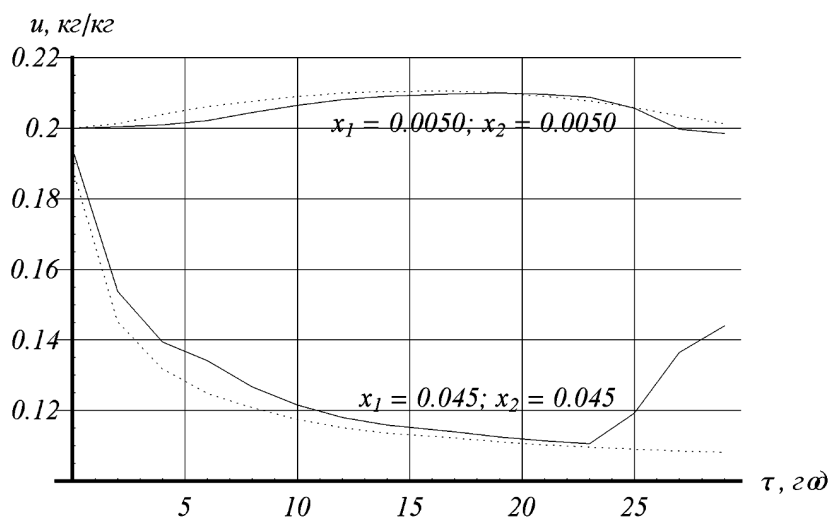


Рис. 3. Розподіл в часі вологовмісту в поверхневих та центральних шарах деревини ( $x_i$  – координати точки у взірці, ——— триступеневий режим, - - - - стали параметри середовища)

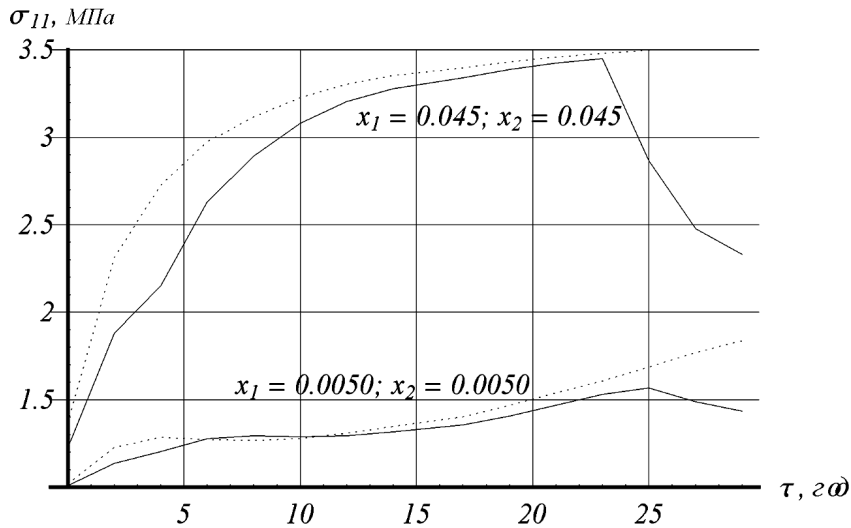


Рис. 4. Розподіл в часі нормальних напружень в поверхневих та центральних шарах деревини ( $x_i$  – координати точки у взірці, ——— триступеневий режим, - - - - сталі параметри середовища)

### Висновок

На основі математичної моделі розподілу температурно-вологісних полів та напружено-деформівного стану у деревині під час сушіння сформульовано задачу оптимізації. Поставлено за мету мінімізувати вологовміст в деревині при обмеженнях на напруження. За допомогою генетичних алгоритмів розв'язано задачу оптимізації та побудовано триступеневий режим, що дає змогу не лише мінімізувати вміст вологості в деревині під час сушіння, але й зменшити значення кінцевих напружень.

1. Биллей П.В. Сушка древесины твердых лиственных пород. – М.: Экология, 1992. – 224 с.
2. Соколовський Я.І., Бакалець А.В. Моделювання деформаційно-релаксаційних процесів у висушуваній деревині методом скінченних елементів // Вісн. Нац. ун-ту “Львівська політехніка”: Комп’ютерні науки та інформаційні технології. – Львів. – 2006. – № 565. – С.51–57.
3. Бакалець А.В., Соколовський Я.І. Моделювання нелінійних тепломасообмінних процесів у висушуваній деревині методом скінченних елементів // Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка”. – 2005. – № 543. – С.58–63.
4. Чернышев А.Н. Экспериментальное определение показателей деформативности и прочности древесины в условиях вакуума // Деревообрабатывающая пром-сть. – 2006. – № 2. – С.9–11.
5. Marinescu I., Curtu I., Campean M. The influence of the air parameters during the drying process of beech at high temperature // 5<sup>th</sup> IUFRO International Wood Drying Conference. – 1996. – pp. 485–492.
6. Шестакевич Т.В., Косак Б.О. Модифікований генетичний алгоритм та його програмна реалізація // Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка”. – 2004. – № 542. – С.335–349.