УДК621.317

М.В. Наконечний[1], Ю.М. Наконечний[2]
Національний університет “Львівська політехніка”,
[1]кафедра комп’ютеризованих систем автоматики,
[2]кафедра захисту інформації

ОСОБЛИВОСТІ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ДИНАМІЧНИХ ОБ’ЄКТІВ ЗА ДОПОМОГОЮ РЕКУРЕНТНИХ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ

Розглянуто особливості ідентифікації динамічних об’єктів за допомогою рекурентних нейронних мереж, архітектура яких відповідає поданню моделі об’єкта в просторі станів і нейронних мереж, які виконано на основі моделі нелінійної авторегресії з одним входом і одним виходом.

In the articles considered of feature authentication dynamic objects by recurrent neuron networks, architecture of which answers presentation of model of object in space of problems and neuron networks which are executed on the basis of model of nonlinear autoregression with one entrance and one output.

1. Постановка проблеми. Останнім часом нейронному керуванню приділяється значна увага. Одна із причин такого явища полягає в тому, що традиційні методи керування, як правило, спираються на лінійну теорію керування, яка передбачає використання лінійних моделей об’єктів, тоді як реальні об’єкти керування за своєю природою є нелінійними.

Розробляючи стратегії керування, для забезпечення максимальної ефективності функціонування системи необхідно в повному обсязі враховувати особливості реального об’єкта і його реакцію на різного виду обмеження.

Один із можливих способів побудови контролерів, при реалізації якого повною мірою враховуються особливості об’єкта, полягає у використанні нейронних емуляторів, які на етапі синтезу контролера виконують функції ідентифікатора нелінійного об’єкта.

2. Аналіз відомих досліджень. Сьогодні виконані дослідження, в яких розглянуто особливості ідентифікації нелінійних динамічних об’єктів, серед яких можна виділити роботи [3, 4]. Огляд цього напрямку з акцентом на нейронні мережі міститься в роботах [2, 5, 6]. Однак практично відсутні роботи, в яких розглядається ідентифікація динамічних обєктів на базі рекурентних нейронних мереж, архітектура яких відповідає поданню моделі об’єкта в просторі станів і нейронних мереж, виконаних на основі нелінійної авторегресії.

3. Мета роботи. Метою роботи є ідентифікація динамічних об’єктів за допомогою рекурентних нейронних мереж з різними типами обернених зв’язків і порівняння результатів їхнього функціонування моделюванням у системі MATLAB.

4. Ідентифікація динамічних об’єктів за допомогою рекурентних нейронних мереж та результати моделювання. Завдання побудови будь-якої системи автоматичного керування полягає в доповненні керованого об’єкта такими зовнішніми ланками, які забезпечували б проходження процесів в об’єкті відповідно до певних попередньо сформульованих критеріїв.

Будь-який реальний динамічний об’єкт характеризується певними особливостями, основною з яких є його інерційність, коли при зміні значення вхідної величини в ньому відбувається перехідний процес. Крім того, іноді на об’єкт діють різноманітні збурення, що приводить до зміни значень вихідної величини за сталого значення вхідної. Отже, при створенні системи автоматичного керування необхідно, враховуючи особливості керованого об'єкта, сформувати таку його математичну модель, яка адекватно б віддзеркалювала процеси, що відбуваються в ньому.

Отже, побудова математичної моделі об'єкта стає вагомою складовою створення системи автоматичного керування.

Створення математичної моделі об'єкта здійснюється на підставі інформації про фізичні процеси, які проходять у цьому об'єкті. Як відомо з [1], розробка моделей динамічних об'єктів становить близько 80 відсотків від кількості всіх операцій, необхідних для побудови систем автоматичного керування.

В багатьох випадках створення математичної моделі на основі відомих теоретичних залежностей істотно утруднене, а тоді, коли природа фізичних процесів в об'єкті недостатньо досліджена, взагалі не вдається в аналітичному вигляді побудувати його модель.

Усіх вищевказаних труднощів можна уникнути, використавши підхід, при реалізації якого модель об'єкта створюється тільки на основі даних, які отримані у ході його експериментальних досліджень. Для одержання таких даних на входи об'єкта подаються тестові сигнали, а на його виході вимірюються відповідні їм вихідні сигнали. Так, зокрема, можна одержати частотні характеристики об'єкта, подаючи на його вхід синусоїдальні сигнали з різною частотою та однаковою амплітудою. Проте такий підхід найпридатніший для побудови моделей лінійних об'єктів.

В загальному випадку модель об'єкта можна побудувати, якщо застосувати певний механізм апроксимації, що ґрунтується на використанні одержаних під час його досліджень послідовностей вхідних і вихідних сигналів, які виміряні в певні моменти часу. В цьому випадку створити аналітичну модель об'єкта складно, а тому доцільно використовувати спосіб, який забезпечує можливість побудови моделі в автоматичному режимі. Такий спосіб ґрунтується на використанні штучної нейронної мережі як універсального апроксиматора, який з використанням заданих послідовностей може в ході навчання пристосуватися до вхідних даних так, щоб на виході мережі одержувати значення, які максимально наближені до відповідних значень заданих вихідних сигналів. Тоді при достатній повноті навчальних послідовностей і оптимальному виборі архітектури нейронної мережі вона зможе сама коректно ідентифікувати об'єкт, тобто відреагувати на будь-які вхідні сигнали так, як на це відреагував би об'єкт.

Як відомо, останнім часом для ідентифікації динамічних об'єктів широко використовують рекурентні нейронні мережі, важливою особливістю яких є наявність у структурі мережі одного або декількох обернених зв'язків.

Обернені зв'язки в рекурентних нейронних мережах можуть бути локальними або глобальними.

Якщо рекурентна нейронна мережа реалізована на базі багатошарового персептрона, то обернені зв'язки в такій мережі можуть замикати вихідний або один з прихованих шарів персептрона на вхідний, що вказує на наявність в мережі глобального оберненого зв'язку, а в тих випадках, коли виходи одного або декількох нейронів мережі під'єднані до своїх входів, мережа вважається охопленою локальним оберненим зв'язком.

Здебільшого рекурентні нейронні мережі використовують для відображення поданих у вхідному просторі часових змінних в часові змінні вихідного простору, що вказує на здатність таких мереж відтворювати динаміку процесів, які проходять в часі, і, як наслідок, використовувати їх для ідентифікації нелінійних динамічних об'єктів і синтезу контролерів у системах автоматичного керування.

Переваги рекурентних нейронних мереж зумовлені використанням в них локальних і, особливо, глобальних обернених зв'язків, наявність яких приводить до істотного скорочення об'єму пам'яті у вхідному шарі мережі, і ставить такі мережі в ряд альтернативних до динамічних нейронних мереж прямого поширення сигналу.

Як показано в роботі [1], всі рекурентні нейронні мережі будуються на базі статичного багатошарового персептрона і короткотермінової пам'яті, яка виконується на основі ліній затримки з відводами.

Сьогодні можна виділити декілька структур рекурентних нейронних мереж, кожна з яких характеризується певною формою оберненого зв'язку.

Розглянемо детальніше архітектуру рекурентних нейронних мереж з різними способами реалізації оберненого зв’язку.

Модель у просторі станів на основі рекурентної нейронної мережі. Узагальнена модель такої мережі наведена на рис. 1. Мережа виконана на базі багатошарового персептрона і блока одиничних затримок.

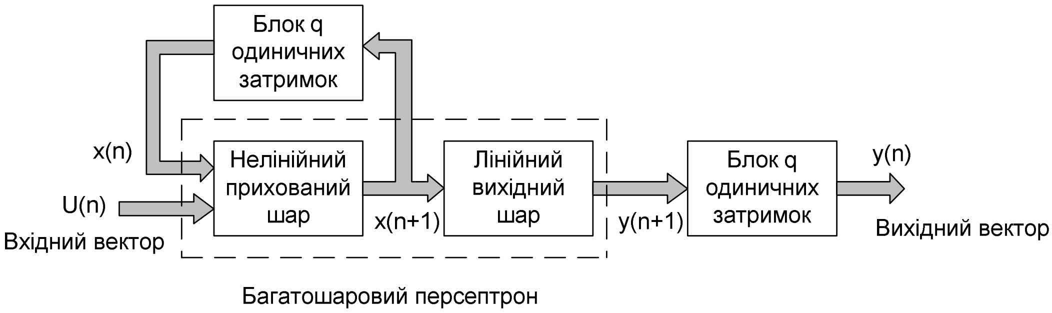

Рис. 1. Модель у просторі станів на основі рекурентної нейронної мережі

Вхідний шар мережі складається з вузлів вхідного сигналу і вузлів оберненого зв’язку. Вихід нелінійного прихованого шару через блок q-одиничних затримок замкнуто на вхідний шар. Кількість ліній затримок, за допомогою яких вихід прихованого шару замикається з входом мережі, визначає порядок моделі.

Динаміка моделі в просторі станів, виконаної на основі рекурентної нейронної мережі, описується системою нелінійних диференціальних рівнянь:

$$x(n+1) = f(x(n), U(n)), \tag{1}$$

$$y(n) = Cx(n), \tag{2}$$

де $U(n)$ – вектор вхідних сигналів розмірності $m \times 1$ в момент часу n; $x(n)$ – вектор вихідних сигналів прихованого шару розмірності $q \times 1$ в момент часу n; $y(n)$ – вектор вихідних сигналів розмірності $p \times 1$ в момент n; $f(\cdot,\cdot)$ – деяка нелінійна функція, яка характеризує прихований шар; C – матриця синаптичних зв’язків вихідного шару.

Вектор $x(n)$ описує стан нелінійної системи в конкретний момент часу і визначається множиною величин, які містять інформацію про стан системи у певний момент часу і яка необхідна для однозначного визначення її стану в наступний момент часу.

Рівняння динаміки рекурентної нейронної мережі (1)–(2) з урахуванням особливостей перетворень у нелінійному прихованому шарі можуть бути подані у вигляді

$$x(n+1) = \varphi(W_a x(n), W_b U(n)), \tag{3}$$

$$y(n) = Cx(n), \tag{4}$$

де W_a – матриця розмірності $q \times q$ містить синаптичні ваги нейронів прихованого шару, які з’єднані з вузлами оберненого зв’язку вхідного шару; W_b – матриця розмірності $q \times (m+1)$ складається з синаптичних ваг q нейронів прихованого шару, які з’єднані з m вузлами вхідного сигналу і джерелом зміщення; C – матриця розмірності $p \times q$ містить синаптичні зв’язки p нейронів лінійного вихідного шару з q нейронами прихованого шару;

Функція φ визначає діагональне відтворення виду

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_q \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \varphi(\cdot) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varphi(\cdot) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \varphi(\cdot) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \dots \\ V_q \end{bmatrix}, \tag{5}$$

де V_1, V_2, $\dots V_q$ – індуковані локальні поля (потенціали активації) нейронів нелінійного прихованого шару.

Функції активації прихованих нейронів найчастіше подають сигмоїдальними функціями, які задають у вигляді функції гіперболічного тангенса

$$\varphi(x) = th(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}, \tag{6}$$

або логістичної функції

$$\varphi(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}. \tag{7}$$

Блок одиничних затримок забезпечує запам'ятовування вихідних сигналів прихованих нейронів на один крок з подальшим їхнім передаванням на вхідний шар. Отже, у вузлах оберненого зв'язку вхідного шару записуються отримані на попередньому кроці вихідні сигнали нейронів прихованого шару, що при одночасному підведенні до мережі вхідного сигналу дає змогу здійснювати її навчання з урахуванням динаміки процесів, які проходять в нелінійному динамічному об'єкті або його математичній моделі.

Приховані нейрони одночасно передають інформацію нейронам лінійного вихідного шару, які формують вихідні сигнали мережі в моменти часу *n+1*. Для одержання реакції мережі в моменти часу n використовується блок р-одиничних затримок.

Доцільно зазначити, що охоплення нейронів прихованого шару мережі оберненим зв'язком забезпечує можливість проходження в ній повторних циклів поширення інформації упродовж великої кількості кроків, що відкриває доступ до вивчення процесів, які відбуваються в нелінійних динамічних об'єктах, створення математичних моделей яких є складним, а іноді і неможливим.

Модель нелінійної авторегресії із зовнішніми входами на основі рекурентної нейронної мережі, структурна схема якої наведена на рис. 2, як і розглянута вище модель в просторі станів, будується на основі багатошарового персептрона, охопленого оберненим зв'язком.

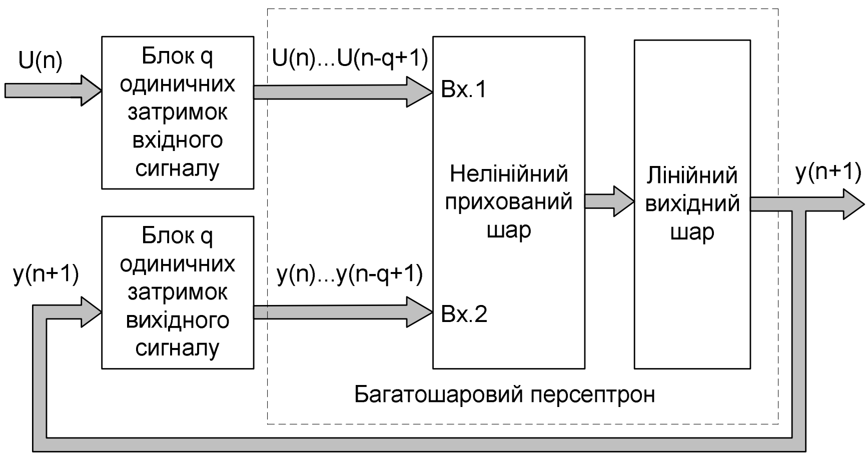

Рис. 2. Модель нелінійної авторегресії із зовнішніми входами на основі рекурентної нейронної мережі

До першого входу мережі через блок одиничних затримок, пам'ять якого реалізована на *q* лініях затримки, підводиться вхідний сигнал *U(n)*, а на другий вхід цієї мережі через блок одиничних затримок, який також виконаний на *q* лініях затримки, подається вихідний сигнал мережі *y(n+1)*.

Вектор сигналу, який підводиться до входу багатошарового персептрона, має дві складові. Перша складова вхідного вектора подана у вигляді поточного значення вхідного сигналу *U(n)* і *(q-1)* його значень в попередні моменти часу, а друга – у вигляді поточного значення вихідного сигналу *y(n)* і *(q-1)* його значень в попередні моменти часу. Динаміка моделі нелінійної авторегресії з зовнішніми входами описується рівнянням виду:

$$y(n+1) = F(y(n),(y(n-1),..., y(n-q+1),U(n),U(n-1),...,U(n-q+1)), \tag{8}$$

де *F* – нелінійна функція аргументів *y(n)…*, *U(n)…*,.

Якщо динаміка моделі в просторі станів, яка реалізована на основі рекурентної нейронної мережі з одним входом і одним виходом, описується системою рівнянь (3) і (4), то після перетворень [1], вихід мережі *y(n+q)* можна подати через вектор змінних стану x(n) і вектор вхідного сигналу *u(n)* у вигляді:

$$y(n+q) = \Phi(\mathrm{x(n)}, \mathrm{U_q}(n)), \tag{9}$$

де q – розмірність простору станів, Φ – матриця $R^{2q} \to R$.

Якщо модель рекурентної нейронної мережі є спостережуваною, тобто матриця $M_0 = [C, CA^T, ..., e(A^T)^{q-1}]$, яка отримана в результаті лінеаризації системи рівнянь (1), (2), має повний ранг, то на основі теореми про локальну спостережувальність можна записати:

$$x(n) = \psi(y_q(n), U_{q-1}(n)), \tag{10}$$

де $R^{2q-1} \to R^q$.

Здійснивши підстановку (10) в (9), одержимо:

$$y(n+q) = \Phi(\psi(y_q(n), U_{q-1}(n)), \mathrm{U_q}(n)) = F(\mathrm{y_q}(n), \mathrm{U_q}(n)), \tag{11}$$

де нелінійне відтворення $F\colon R^{2q} \to R$ є композицією перетворень Φ і ψ, а $U_{q-1}(n)$ входить до складу $U_q(n)$ у вигляді його перших $(q-1)$ елементів.

Якщо послідовність вхідних сигналів рекурентної нейронної мережі, яка описується рівняннями (1)–(2), подати у вигляді

$$U_{q-1}(n) = [U(n), U(n+1), ..., U(n+q-2)]^T \tag{12}$$

а вектор вихідного сигналу мережі, який отримано в результаті подавання на її входи вектора станів і вектора вхідних сигналів, подати у формі:

$$y_q(n) = [y(n), y(n+1), ..., y(n+q-1)]^T, \tag{13}$$

то співвідношення (11) можна переписати у вигляді:

$$y(n+q) = F(y(n+q-1), ..., y(n), U(n+q-1), ..., U(n)). \tag{14}$$

Замінивши *n* співвідношенням *n-q+1*, вираз (14) можна переписати у вигляді

$$y(n+1) = F(y(n), ..., y(n-q+1), U(n), ..., U(n-q+1)). \tag{15}$$

Зі співвідношення (15) випливає, що поточне значення виходу нейронної мережі *y(n+1)* однозначно визначається нелінійним відтворенням попередніх значень виходу *y(n), …, y(n-q+1)*, а також поточного і попередніх значень вхідного сигналу *U(n), …, U(n-q+1)*. Модель нелінійної авторегресії з зовнішніми входами є еквівалентною до моделі в просторі станів, якщо рекурентна мережа, яка відповідає моделі в просторі станів, є спостережуваною.

Практична цінність вказаної еквівалентності полягає в тому, що модель нелінійної авторегресії із зовнішніми входами, в якій обернений зв'язок реалізується тільки з виходу нейронної мережі, повинна відтворювати динаміку процесів моделі в просторі станів у випадку, коли така модель має один вхід і один вихід.

Порівняння ідентичності процесів у моделі авторегресії з зовнішніми входами і в моделі простору станів на основі рекурентної нейронної мережі здійснювалося на прикладі параметричної ідентифікації математичної моделі нелінійного об'єкта.

Будемо вважати, що модель нелінійного об'єкта описується нелінійним диференціальним рівнянням другого порядку

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1\frac{dx}{dt} + a_2 \sin x = U, \tag{16}$$

яке в просторі станів має вигляд:

$$\dot{x}_1 = x_2, \tag{17}$$

$$\dot{x}_2 = U - a_2 \sin x_1 - a_1 x_2. \tag{18}$$

У зв'язку з тим, що ідентифікація здійснюється для нелінійного об'єкта з одним входом і одним виходом і враховуючи те, що в загальному вигляді математична модель в просторі станів на основі рекурентної нейронної мережі описується системою рівнянь (3)–(4), можна, задавши відповідну кількість нейронів прихованого шару (для нашого випадку *L=5*) і вибравши *C=1* з урахуванням того, що об’єкт має тільки один вихід, записати матриці нейронної мережі, яка використовується для імітації динаміки моделі об’єкта, у вигляді

$$W_a = \begin{vmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} & W_{14} & W_{15} \\ W_{21} & W_{22} & W_{23} & W_{24} & W_{25} \\ W_{31} & W_{32} & W_{33} & W_{34} & W_{35} \\ W_{41} & W_{42} & W_{43} & W_{44} & W_{45} \\ W_{51} & W_{52} & W_{53} & W_{54} & W_{55} \end{vmatrix}, \qquad (19)$$

$$W_b = \begin{vmatrix} W_{10} & W_{16} \\ W_{20} & W_{26} \\ W_{30} & W_{36} \\ W_{40} & W_{46} \\ W_{50} & W_{56} \end{vmatrix}, \qquad (20)$$

$$C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]. \qquad (21)$$

Тоді для нашого випадку структурна схема, яка використовується для навчання нейронної мережі, що відповідає повній рекурентній моделі в просторі станів, буде мати вигляд, наведений на рис. 3.

Доступна інформація про характеристики об’єкта задана у вигляді двох числових послідовностей вхідної – *U[n]=[U(1), U(2),…, U(n)]*, та відповідної їй вихідної – *Y[n]=[Y(1), Y(2),…, Y(n)]*.

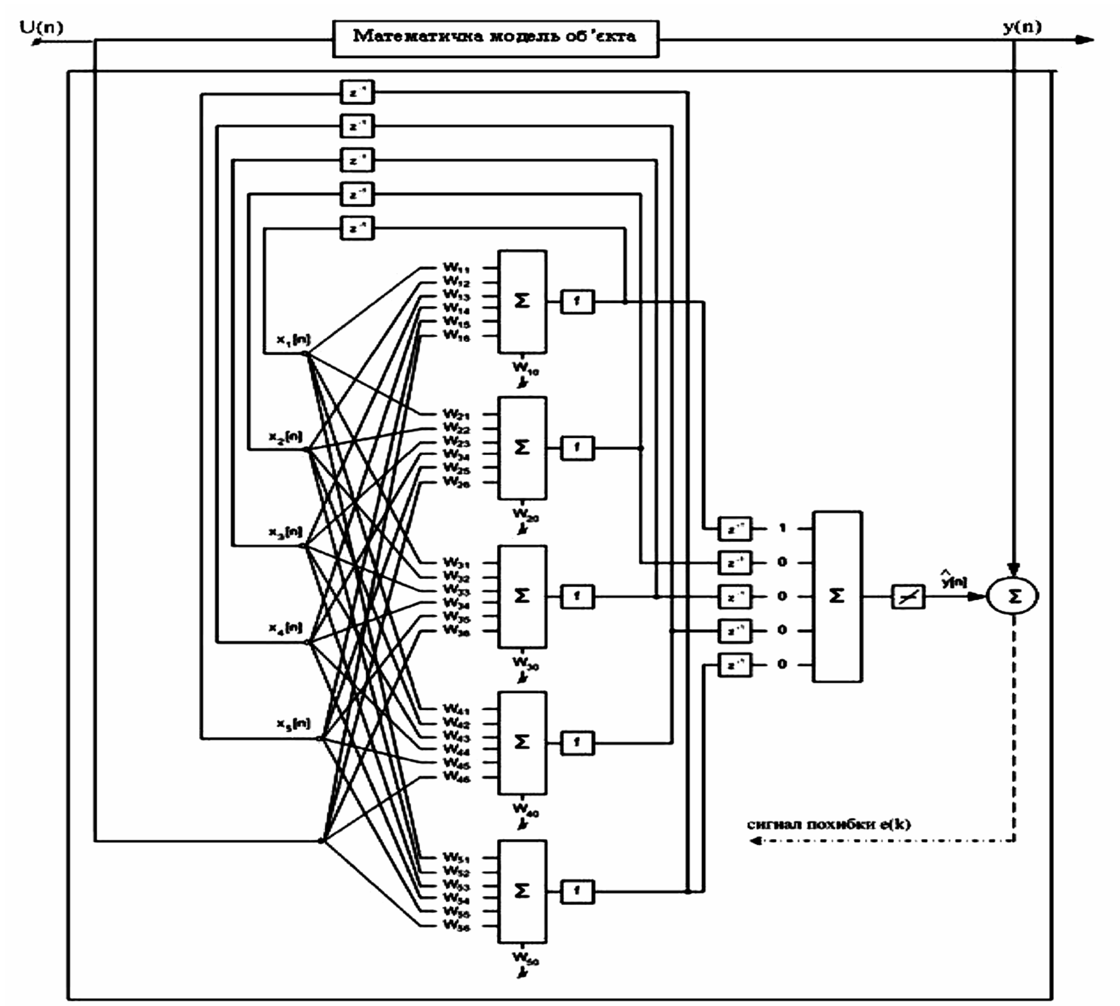

Рис. 3. Структурна схема навчання рекурентної нейронної мережі на основі моделі у просторі станів (L = 5)

Структурна схема навчання рекурентної нейронної мережі, яка реалізована на основі співвідношення (15) і відповідає моделі нелінійної авторегресії із зовнішніми входами, наведена на рис. 4.

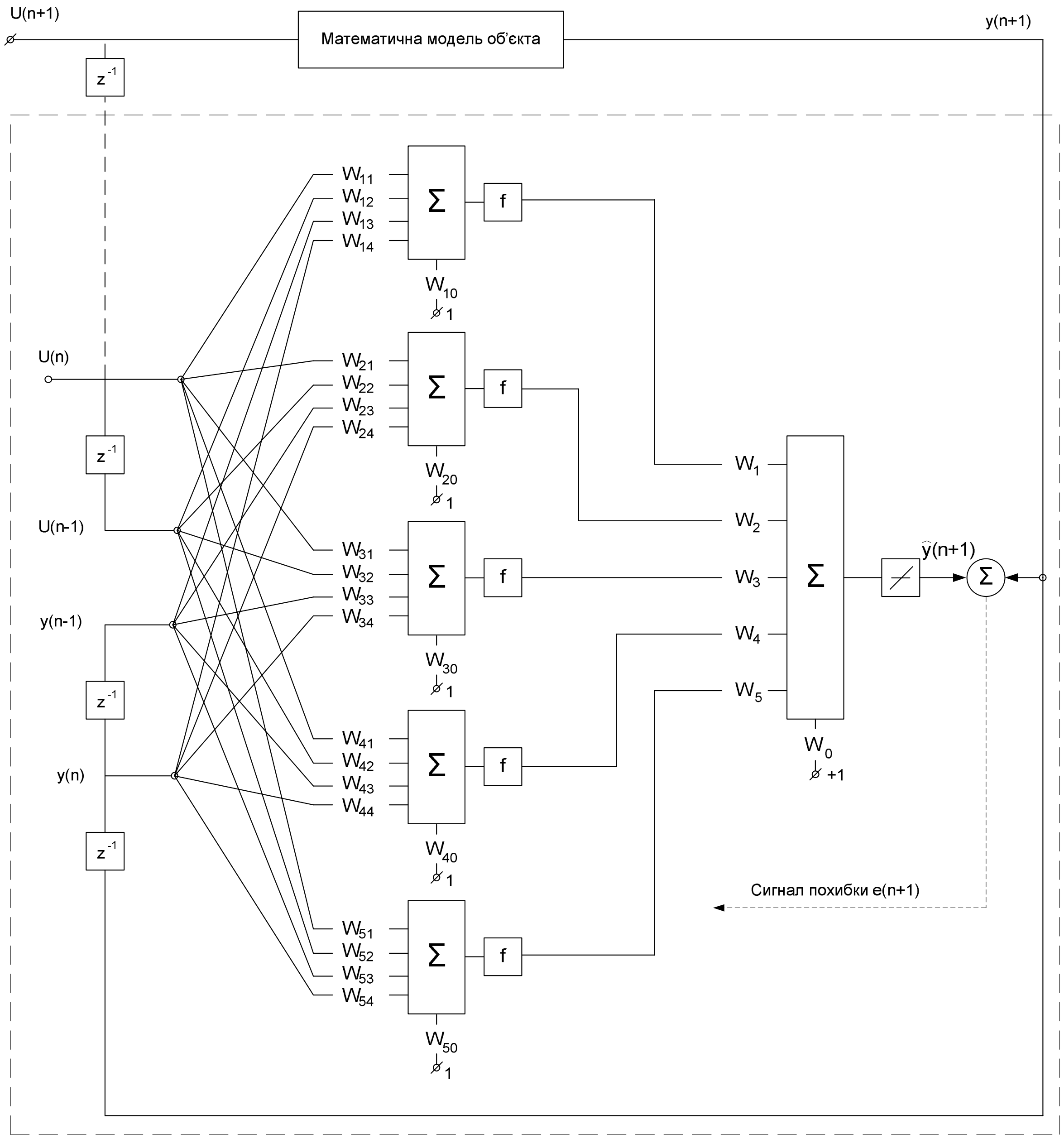

Рис. 4. Структурна схема навчання рекурентної нейронної мережі, виконаної на основі нелінійної авторегресії із зовнішніми входами

Вхідні і вихідні вектори – це виміряні в дискретні моменти часу значення сигналів на входах і виходах об'єкта або його математичної моделі. Для повного відтворення динаміки процесу в об'єкті вважаємо інтервали між вимірюваннями Δt на декілька порядків меншими від тривалості перехідного процесу в об'єкті.

Навчання першої і другої нейронних мереж здійснювалося з використанням вказаних числових послідовностей.

Для оцінки ступеня наближення виходів обох нейронних мереж до значень вихідних сигналів об'єкта використовується квадратичний критерій оптимальності

$$J = \frac{1}{2}\sum_{q=1}^{Q}\sum_{n=1}^{N}[\hat{y}_q(n) - y_q(n)]^2 \to \min, \tag{22}$$

де N – кількість вибірок в межах однієї епохи; Q – кількість епох; $y_q(n)$ – n-на вибірка цільового вектора на Q-й епосі; $\hat{y}_q(n)$ – n-на вибірка вихідного вектора мережі на Q-й епосі.

Очевидно, що ефективність навчання нейронних мереж залежить від ширини частотних спектрів вхідного і вихідного сигналів та кількості відліків у числових послідовностях, що підводяться до входів мережі. Проте вирішальним фактором досягнення ефективності навчання кожної мережі є наявність принципової можливості реалізації такого процесу навчання, яке би забезпечувало відтворення динаміки процесів в об'єкті або його математичній моделі із заданою точністю.

Можна вказати на два способи навчання динамічної нейронної мережі: перший – навчати нейронну мережу із замкненим оберненим зв'язком, коли в ході навчання послідовність з виходу мережі, або одного із проміжних шарів через коло оберненого зв'язку подається на її вхід, і другий – з розімкненим оберненим зв'язком (у нерекурентному вигляді), коли до одного із входів мережі підводиться числова послідовність вхідного сигналу, а до другого – цільова послідовність, або послідовність з виходів нейронів проміжного шару.

Навчання рекурентної (із замкненим оберненим зв'язком) нейронної мережі є складним, оскільки при реалізації замкненого оберненого зв'язку вхідні сигнали мережі на певному відліку залежать не тільки від поточного і попереднього стану входів, але й від попередніх значень сигналу на виході мережі, або на виходах її проміжного шару.

Вказана особливість істотно ускладнює реалізацію алгоритму обчислення градієнта цільової функції, оскільки поява додаткових локальних мінімумів на її поверхні викликає завмирання навчання мережі.

Процес навчання нерекурентної нейронної мережі (обернений зв'язок розімкнено) значно ефективніший в зв'язку з тим, що обчислення градієнта цільової функції здійснюється на основі алгоритму оберненого поширення помилки, а затримані значення виходів мережі можна подати у вигляді окремої числової послідовності, яка подається на один із входів мережі.

Порівняння ефективності навчання нейронної мережі, яка відповідає повній рекурентній моделі в просторі станів (рис. 3) і нейронної мережі, виконаної на основі моделі нелінійної авторегресії з зовнішніми входами (рис. 4), здійснено в середовищі MATLAB. В обидвох випадках навчання здійснювалося на послідовностях випадкових сигналів з використанням алгоритму trainlm.

У зв'язку з складністю реалізації алгоритму навчання на числових послідовностях з виходів нейронів проміжного шару, навчання нейронної мережі, виконаної на основі повної рекурентної моделі в просторі станів, здійснювалось при замкнених локальних обернених зв'язках і було припинено після досягнення середньоквадратичною похибкою значення $\mu=6{,}28\times10^{-4}$. Навчання мережі тривало близько 3 хв. Протягом вказаного часу відбулося 19 епох (тривалість епохи приблизно 9 с).

Нейронна мережа, виконана на основі моделі нелінійної авторегресії із зовнішніми входами, навчалась в розімкненому стані. Процес навчання тривав 30 с; середньоквадратична похибка після завершення 1000 епох досягла значення $\mu=1{,}27385\times10^{-12}$.

Динаміка процесів навчання нейронних мереж, виконаних на основі повної рекурентної моделі в просторі станів і моделі нелінійної авторегресії із зовнішніми входами, проілюстрована на рис. 5 і 6, відповідно.

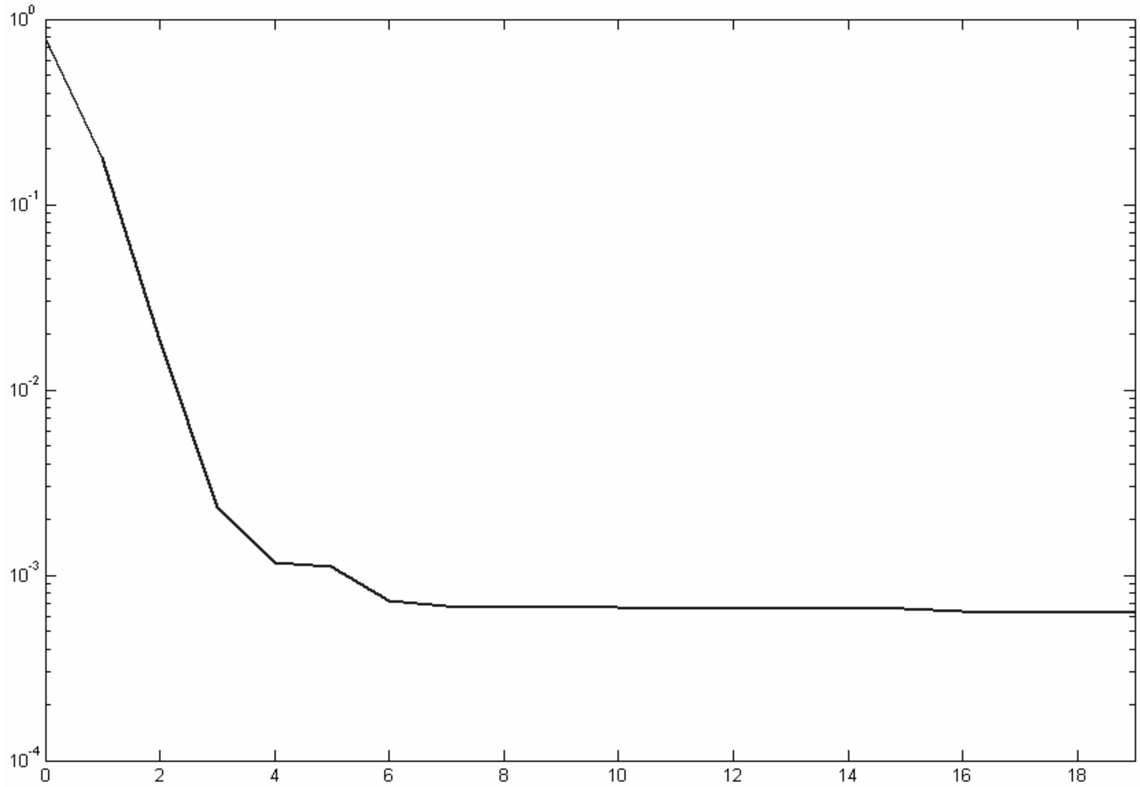

Рис. 5. Навчання нейронної мережі на основі повної рекурентної моделі в просторі станів

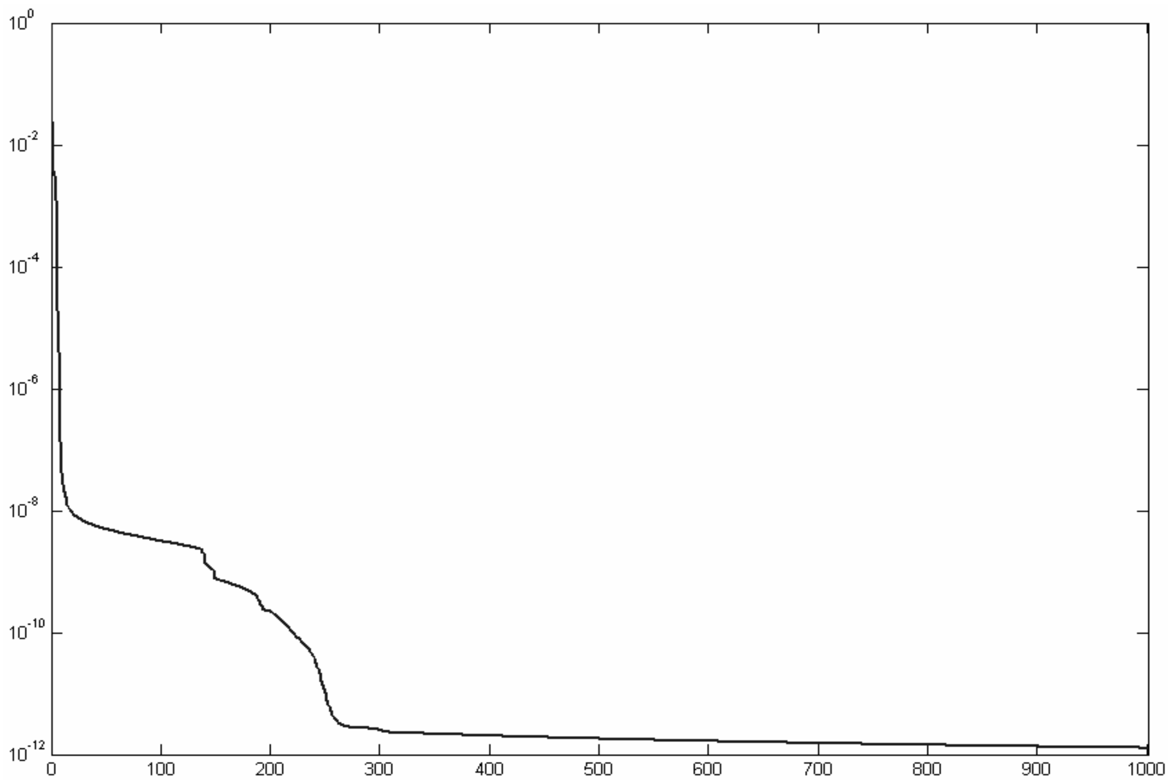

Рис. 6. Навчання нейронної мережі на основі нелінійної авторегресії з зовнішніми входами

Після закінчення навчання для обидвох нейронних мереж були синтезовані їх SIMULINK-еквіваленти і для порівняння ефективності функціонування поміщені в SIMULINK-модель поряд з математичною моделлю об'єкта.

Різницю ефективності навчання можна продемострувати, порівнюючи значення з виходів мереж та з виходу моделі об’єкта (рис. 7).

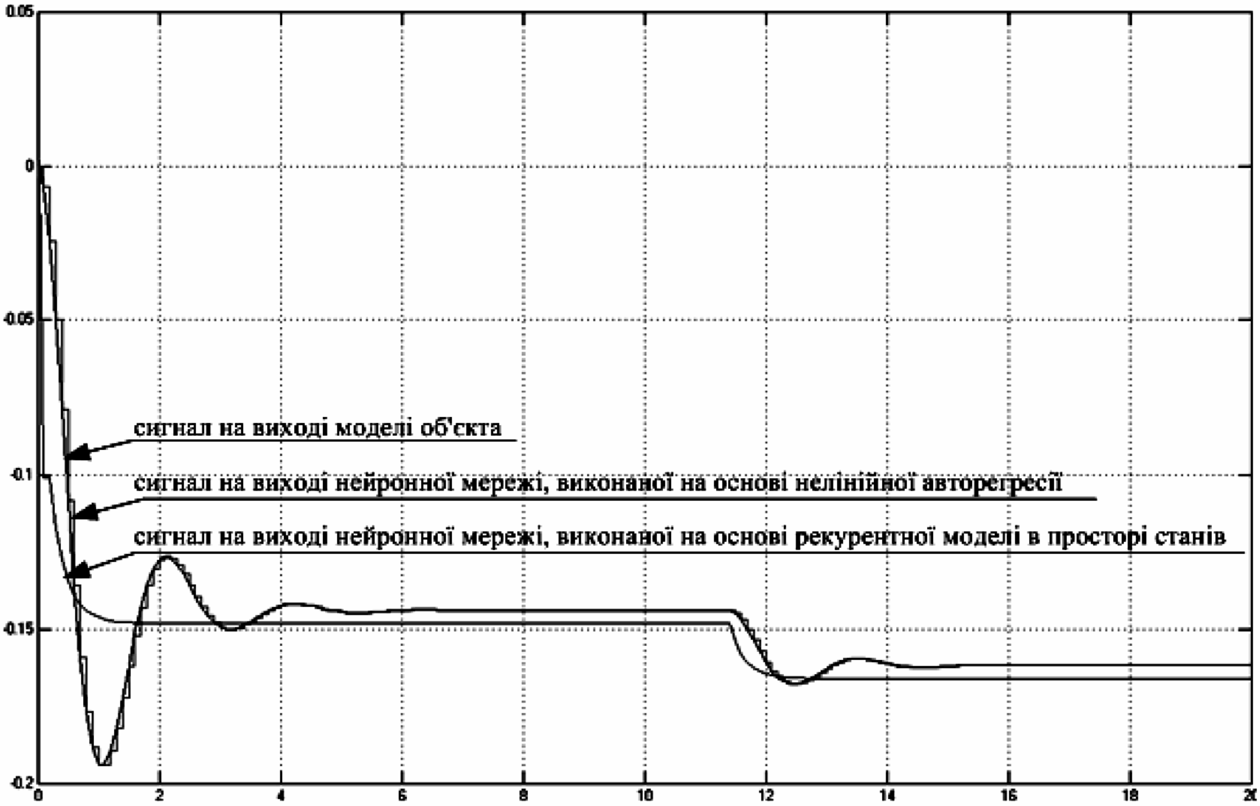

Рис. 7. Порівняння сигналів на виходах моделі об’єкта та синтезованих нейронних мереж

5. Висновок. З наведених графіків випливає, що, незважаючи на задовільні показники процесу навчання в обидвох випадках (незначна тривалість часу навчання нейронних мереж, мала кількість ітерацій, невелике значення середньоквадратичної похибки), функціонування нейронної мережі, яка відповідає моделі нелінійної авторегресії із зовнішніми входами, є набагато ефективнішим порівняно з функціонуванням нейронної мережі, виконаної на основі повної рекурентної моделі в просторі станів. Очевидно, нейронна мережа на основі повної рекурентної моделі в просторі станів не змогла на етапі навчання достатньо повно виявити специфіку процесу в об’єкті, і як наслідок, відповідно відреагувати на неї при коригуванні вагових коефіцієнтів, що і стало однією з причин низької ефективності її функціонування у ході моделювання. Навчання нейронної мережі на основі нелінійної авторегресії із зовнішніми входами велося у нерекурентному вигляді, що забезпечило високу якість результатів її моделювання.

Значення середньоквадратичної похибки, яка отримана в ході моделювання нейронної мережі, виконаної на основі повної рекурентної моделі в просторі станів, становило $2.6857 \cdot 10^{-4}$, тоді як середньоквадратична похибка, отримана під час моделювання нейронної мережі на основі авторегресії із зовнішнім входами, має значення $1.622 \cdot 10^{-6}$, а різницю між вихідними сигналами об’єкта і нейронної мережі можна тільки побачити при зміні масштабу осцилографа або вимірювального приладу.

1. Саймон Хайкин. Нейронные сети. – М., СПб., К, 2006. 2. Narendra K.S. and K. Parthasarathy. Identification and control of dynamical systems using neural networks // IEEE Transactions on Neural Networks, 1990, vol. 1. – P. 4–27. 3. Ljung L. System Identification: Theory for the User. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall,1987. 4. Ljung L. and T. Glad. Modelling of Dynamic Systems, Englewood Gliffs // NJ: Prentice-Hall, 1994. 5. Narendra K.S. Neural Networks for Identification and Control // NIPS 95, Tutorial Program, 1995. – P. 1–46, Denver. 6. Sjoberg J., Zhang Q., Ljung L., Benveniste A., Delyon B., A P.-Y. Glorennec, Hjalmarsson H. and Juditsky A. Nonlinear black-box modelling in system identification: A unified overview // Automatica, 1995, vol. 31. – P. 1691–1724.