

УДК 62-83 (075.8)

В.С. ЛОВЕЙКІН, Ю.В. ЧОВНЮК, М.Г. ДІКТЕРУК, Д.В. ЛЕВАНЮК

Київський національний університет будівництва і архітектури

ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК КРОКОВИХ ДВИГУНІВ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ СУЧАСНИХ ВАНТАЖОПІДЙОМНИХ КРАНІВ

© Ловейкин В.С., Човнюк Ю.В., Діктерук М.Г., Леванюк Д.В., 2009

Виконано фундаментальний аналіз динамічних характеристик крокових двигунів систем керування сучасних вантажопідійомних кранів.

The fundamental analysis of the dynamical characteristics of the stepping motors of the control systems of the modern load-lifting cranes is proposed.

Динамічні характеристики крокових двигунів (КД), які широко застосовуються сьогодні в системах керування сучасних вантажопідійомних кранів та іншої будівельної техніки, надзвичайно важливі та їх необхідно враховувати під час вибору КД, а також їх мікропроцесорних систем керування [1, 3].

Відомо декілька теорій, що описують динаміку КД, які наведені в роботах [1–10]. Проте, на думку авторів цієї роботи, основні динамічні характеристики КД, особливо в перехідних процесах (встановлення необхідного кута), вивчені недостатньо і ще вимагають подальшого всебічного і фундаментального аналізу.

Метою роботи є встановлення основних динамічних характеристик КД систем керування сучасних вантажопідійомних кранів/будівельної техніки та їх особливостей за перехідні процеси для оптимізації керування (і гасіння можливих коливальних процесів у самих КД в максимально стислі терміни). Для досягнення зазначеної вище мети використані підходи і моделі, розвинені в [1–10], а також стандартний математичний апарат (операційне числення для лінеаризованих фундаментальних рівнянь КД), наведений в [11–12].

Фундаментальні рівняння КД та їхня лінеаризація. Для аналізу коливальних явищ та їх загасання в КД використовуватимемо моделі [1–3]. Не має значення, який КД вибраний: 1) з постійними магнітами; 2) гібридний – оскільки їх фізико-механічні моделі збігаються.

1. Двигуни з постійними магнітами і гібридні двигуни. Тут, і надалі, p позначає число пар полюсів (магнітних) в КД, які розташовані на роторі, а статор КД складається із ідентичних полюсів і обмоток, розташованих через рівні інтервали λ (крок зубців), рад.

Рівняння руху ротора КД для кута його повороту θ , рад. має вигляд

$$J \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} + D \cdot \frac{d\theta}{dt} + p \cdot n \cdot \Phi_M \cdot i_A \cdot \sin(p \cdot \theta) + p \cdot n \cdot \Phi_M \cdot i_B \cdot \sin\{p \cdot (\theta - \lambda)\} = 0. \quad (1)$$

де J – момент інерції ротора, $\text{кг} \cdot \text{м}^2$; D – коефіцієнт в'язкого тертя, який враховує наявність повітря і тертя, а також може бути використаний для опису електромагнітних ефектів другого порядку, що виникають через гістерезис і вихрові струми. Рівняння для напруги в обмотках статора:

$$\begin{cases} V - r \cdot i_A - L \cdot \frac{di_A}{dt} - M \cdot \frac{di_B}{dt} + \frac{d}{dt} \{n \cdot \Phi_M \cdot \cos(p \cdot \theta)\} = 0; \\ V - r \cdot i_B - L \cdot \frac{di_B}{dt} - M \cdot \frac{di_A}{dt} + \frac{d}{dt} \{n \cdot \Phi_M \cdot \cos(p \cdot (\theta - \lambda))\} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

(3)

де V – напруга джерела живлення; L – власна індуктивність кожної фази; M – взаємна індуктивність ($[L], [M] = \text{Гн}$); i_A, i_B – струми фаз А і В КД ($[i_A, i_B] = \text{А}$); $[V] = \text{В}$; n – кількість витків у обмотці магнітів; Φ_M – амплітуда магнітного потоку, $\text{Тл} \cdot \text{м}^2 = \text{Вб}$; p – кількість пар полюсів (ротора КД); λ – крок зубців статора, що складається з ідентичних полюсів і обмоток, розташованих через рівні інтервали $[\lambda] = p \cdot \alpha$; r – опір обмотки статора, Ом; t – час, (с). Решта позначень в (1) – (3) загальноприйняті.

Під час виведення рівнянь (1) – (3) прийнято допущення. Зокрема, L і M не залежать від θ . Оскільки наведені вище рівняння застосовні у разі збудження обох фаз А і В, то ними можна адекватно описати двофазне збудження. Метод, розвинений в [1–10], дає змогу описати однофазне збудження, якщо припустити $\lambda = 0$ у кінцевих виразах або на попередніх стадіях аналізу. Під час однофазного збудження обидва полюси магніту збуджуються одночасно.

Рівняння (1) – (3) є нелінійними диференціальними рівняннями, які в подальшому викладенні лінеаризуються. Якщо по обмотках обох фаз протікає постійний струм I_0 , то положення рівноваги досягається при $\theta = \frac{\lambda}{2}$. Відхилення від положення рівноваги позначимо через $\delta\theta$. Воно є функцією часу t і в подальшому аналізі незначне. Коли ротор повертається або коливається, струм в обох обмотках відхиляється від сталого значення відповідно на i_A і i_B . Рівняння (1) – (3) лінеаризуються так.

Припустимо, що:

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\lambda}{2} + \delta\theta; \quad \delta\theta \ll \theta; \quad i_A = I_0 + \delta i_A; \\ \delta i_A &\ll i_A; \quad i_B = I_0 + \delta i_B; \quad \delta i_B \ll i_B. \end{aligned} \quad (4)$$

Вважаючи $p \cdot \delta\theta$ малим кутом і вважаючи, що:

$$\cos(p \cdot \delta\theta) \approx 1; \quad \sin(p \cdot \delta\theta) \approx p \cdot \delta\theta, \quad (5)$$

можемо легко одержати такі співвідношення:

$$\begin{cases} \sin(p \cdot \theta) = \sin\left(\frac{p\lambda}{2}\right) + \cos\left(\frac{p\lambda}{2}\right) \cdot \delta\theta; \\ \sin(p \cdot [\theta - \lambda]) = -\sin\left(\frac{p\lambda}{2}\right) + p \cdot \cos\left(\frac{p\lambda}{2}\right) \cdot \delta\theta \end{cases} \quad (6)$$

Підставляючи (4) – (6) в (1) – (3) і нехтуючи добутком відхилень типу $\delta i_A \cdot \delta\theta$, одержуємо систему лінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} J \cdot \frac{d^2(\delta\theta)}{dt^2} + D \cdot \frac{d(\delta\theta)}{dt} + 2p^2 \cdot \Phi_M \cdot n \cdot I_0 \cdot \cos\left(\frac{p\lambda}{2}\right) \cdot (\delta\theta) + \\ + p \cdot \Phi_M \cdot n \cdot \sin\left(\frac{p\lambda}{2}\right) \cdot (\delta i_A - \delta i_B) = 0; \\ r \cdot (\delta i_A) + L \cdot \frac{d(\delta i_A)}{dt} + M \cdot \frac{d(\delta i_B)}{dt} - p \cdot \Phi_M \cdot n \cdot \sin\left(\frac{p\lambda}{2}\right) \cdot \frac{d(\delta\theta)}{dt} = 0; \\ r \cdot (\delta i_B) + L \cdot \frac{d(\delta i_B)}{dt} + M \cdot \frac{d(\delta i_A)}{dt} + p \cdot \Phi_M \cdot n \cdot \sin\left(\frac{p\lambda}{2}\right) \cdot \frac{d(\delta\theta)}{dt} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Визначимо, яка функція виражає положення ротора $\delta\theta(t)$ після початку руху від положення рівноваги при куті θ_i . Цікаво також визначити як змінюються з часом значення i_A і i_B .

Застосуємо для вирішення системи (7) перетворення Лапласа, позначаючи $\frac{d}{dt} \equiv S$, $\frac{d^2}{dt^2} \equiv S^2$, за

початкових умов $\delta\theta|_{t=0} = \theta_i$; $\left. \frac{d(\delta\theta)}{dt} \right|_{t=0} = 0$.

Перетворення Лапласа від шуканих функцій позначимо великими літерами:

$$\delta\theta(t) \Rightarrow \theta(s), \quad \delta i_A(t) \Rightarrow I_A(s), \quad \delta i_B(t) \Rightarrow I_B(s).$$

Розв'язання системи (7) мають вигляд

$$I_A(s) = -I_B(s) = \frac{p \cdot \Phi_M \cdot n \cdot \sin\left(\frac{p\lambda}{2}\right) \cdot (s \cdot \theta(s) - \theta_i)}{(r + L_p \cdot s)}; \quad (8)$$

$$\theta(s) = \frac{\left\{ s^2 + \left(\frac{r}{L_p} + \frac{D}{J} \right) \cdot s \left(\frac{r}{L_p} \cdot \frac{D}{J} + k_p \cdot \omega_{np}^2 \right) \right\} \cdot \theta_i}{s^3 + \left(\frac{r}{L_p} + \frac{D}{J} \right) \cdot s^2 + \left[\frac{r}{L_p} \cdot \frac{D}{J} + \omega_{np}^2 (1 + k_p) \right] \cdot s + \left(\frac{r}{L_p} \right) \cdot \omega_{np}^2}, \quad (9)$$

де

$$L_p = L - M; \quad k_p = \frac{n \cdot \Phi_M \cdot \sin^2\left(\frac{p\lambda}{2}\right)}{L_p \cdot I_0 \cdot \cos\left(\frac{p\lambda}{2}\right)}; \quad (10)$$

$$\omega_{pn}^2 = \frac{2p^2 \cdot \Phi_M \cdot n \cdot I_0 \cdot \cos\left(\frac{p\lambda}{2}\right)}{J}.$$

Розв'язання (7) у вигляді (8) – (10) справедливі для варіанта двофазного збудження обмоток статора КД ($\lambda \neq 0$). У тому разі, коли збудження відзначених обмоток однофазне ($\lambda = 0$) вирази (8)–(10) сильно спрощуються

$$I_A(s) = -I_B(s) = \frac{p \cdot \Phi_M \cdot n \cdot (s \cdot \theta(s) - \theta_i)}{(r + L_p \cdot s)}; \quad (11)$$

$$k_p = 0; \quad \tilde{\omega}_{np}^2 = \frac{2p^2 \cdot \Phi_M \cdot n \cdot I_0}{J}. \quad (12)$$

Для $\theta(s)$ замість (9) маємо

$$\theta(s) = \frac{\left\{ s^2 + \left(\frac{r}{L_p} + \frac{D}{J} \right) \cdot s + \frac{r}{L_p} \cdot \frac{D}{J} \right\} \cdot \theta_i}{s^3 + \left(\frac{r}{L_p} + \frac{D}{J} \right) \cdot s^2 + \left[\frac{r}{L_p} \cdot \frac{D}{J} + \tilde{\omega}_{np}^2 \right] \cdot s + \left(\frac{r}{L_p} \right) \cdot \tilde{\omega}_{np}^2}, \quad (13)$$

Рівняння (9) і (13) є найважливішими, оскільки описують зміну кута повороту ротора КД в часі $\theta(t)$. Основною особливістю цього рівняння ((9) або (13)) є те, що його знаменник має третій порядок по змінній s . Рівняння (8) і (11) показують, що струми, що протікають у фазах А і В, рівні по значенню і протилежні за напрямом. Через ці особливості схема двофазного збудження забезпечує покращене демпфування.

2. Реактивні КД. Подальші міркування виконані стосовно однопакетного реактивного КД, але результати можна застосовувати і для багатопакетних типів, якщо припустити, що взаємні індуктивності дорівнюють нулю. Індуктивності (L_A, L_B) і взаємні індуктивності (M_{AB}) обмоток двох фаз моделі (A, B) мають вигляд

$$\begin{cases} L_A = L_0 + L \cdot \cos(p \cdot \theta); \\ L_B = L_0 + L \cdot \cos[2p \cdot (\theta - \lambda)]; \\ M_{AB} = -M_0 + M \cdot \cos\left[2p \cdot \left(\theta - \frac{\lambda}{2}\right)\right] \end{cases} \quad (14)$$

Знак мінус перед M_0 у (14) показує, що позитивний струм в одній з обмоток створює негативне потокозчеплення в іншій.

Рівняння руху ротора КД в цьому випадку має вигляд

$$\begin{aligned} J \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} + D \cdot \frac{d\theta}{dt} + i_A^2 \cdot p \cdot L \cdot \sin(2p \cdot \theta) + \\ + i_B^2 \cdot p \cdot L \cdot \sin(2p \cdot [\theta - \lambda]) + 2i_A \cdot i_B \cdot p \cdot M \cdot \sin\left[2p \cdot \left(\theta - \frac{\lambda}{2}\right)\right] = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

а рівняння для напруги в двох обмотках:

$$\begin{cases} V - r \cdot i_A - \frac{d}{dt}(L_A \cdot i_A) - \frac{d}{dt}(M_{AB} \cdot i_B) = 0; \\ V - r \cdot i_B - \frac{d}{dt}(L_B \cdot i_B) - \frac{d}{dt}(M_{AB} \cdot i_A) = 0. \end{cases} \quad (16)$$

У лінеаризованій формі (15), (16) набудуть вигляду:

$$\begin{cases} J \cdot \frac{d^2(\delta\theta)}{dt^2} + D \cdot \frac{d(\delta\theta)}{dt} + 4p^2 \cdot I_0^2 \cdot (M + L \cdot \cos(p\lambda)) \cdot \delta\theta + \\ + 2p \cdot I_0 \cdot L \cdot \sin(p\lambda) \cdot (\delta i_A - \delta i_B) = 0; \\ r \cdot (\delta i_A) + (L_0 + L \cdot \cos(p\lambda)) \cdot \frac{d}{dt}(\delta i_A) + (M - M_0) \cdot \\ \cdot \frac{d}{dt}(\delta i_B) - 2p \cdot I_0 \cdot L \cdot \sin(p\lambda) \cdot \frac{d}{dt}(\delta\theta) = 0; \\ r \cdot (\delta i_B) + (L_0 + L \cdot \cos(p\lambda)) \cdot \frac{d}{dt}(\delta i_B) + (M - M_0) \cdot \\ \cdot \frac{d}{dt}(\delta i_A) + 2p \cdot I_0 \cdot L \cdot \sin(p\lambda) \cdot \frac{d}{dt}(\delta\theta) = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Рівняння системи (17) ідентичні за формою для змінних $\delta\theta, \delta i_A, \delta i_B$ системи (7), що описують динаміку КД з постійними магнітами, і їх розв'язання за тих самих початкових умов буде таким:

$$I_A = -I_B = \frac{2p \cdot I_0 \cdot \sin(p\lambda) \cdot (s\theta - \theta_i)}{(r + L_0 \cdot s)}; \quad (18)$$

$$\theta(s) = \frac{\left[s^2 + \left(\frac{r}{L_v} + \frac{D}{J} \right) \cdot s + \frac{r}{L_v} \cdot \frac{D}{J} + k_v \cdot \omega_{nv}^2 \right] \cdot \theta_i}{\left\{ s^3 + \left(\frac{r}{L_v} + \frac{D}{J} \right) \cdot s^2 + \left[\frac{r}{L_v} \cdot \frac{D}{J} + \omega_{nv}^2 (1 + k_v) \right] \cdot s + \left(\frac{r}{L_v} \right) \cdot \omega_{nv}^2 \right\}}, \quad (19)$$

де

$$\begin{aligned} L_v &= L_0 + L \cdot \cos(p\lambda) - M + M_0; \\ k_v &= \frac{2L^2 \cdot \sin^2(p\lambda)}{L_v \cdot [M + L \cdot \cos(p\lambda)]}; \\ \omega_{nv}^2 &= \frac{4p^2 \cdot I_0^2 \cdot [M + L \cdot \cos(p\lambda)]}{J}. \end{aligned} \quad (20)$$

Для багатопакетних КД розв'язання (18), (19) не змінюються, проте в (20) потрібно здійснити заміну:

$$\begin{aligned} L_v &= L_0 + L \cdot \cos(p\lambda); \quad k_v = \frac{2L^2 \cdot \sin^2(p\lambda)}{L_v \cdot L \cdot \cos(p\lambda)} = \frac{2L \cdot \sin^2(p\lambda)}{L_v \cdot \cos(p\lambda)}; \\ \omega_{nv}^2 &= 4p^2 \cdot I_0^2 \cdot L \cdot (\cos(p\lambda)) \cdot J^{-1}. \end{aligned} \quad (21)$$

Однокрокова реакція. Розглянемо далі реакцію КД. Розв'язання (9), (13), і (19) відповідають передавальним функціям третього порядку, якщо аналізувати знаменники формул для $\theta(s)$.

Фізичний механізм електромагнітного демпфування при двофазному збудженні полягає ось у чому.

У разі двофазного збудження (управління) рівняння руху і балансу напруг залежать одне від одного. Розв'язання (8) або (18) показує, що ЕРС індукції, що виникає під час руху, створює рівні і протилежні струми в збуджених фазах, які викликають ефект циркулюючого струму доволі великого значення, близького до I_0 . Загальний струм, що протікає через джерело, починає дорівнювати, щонайменше, $2I_0$, і це не впливає на потужність, що віддається джерелом. Якщо рух ротора коливальний, то циркулюючий струм також має коливальний характер і зумовлює втрати в обмотках. Це явище свідчить, що кінетична енергія ротора розсіюється, переходячи в теплові втрати, тому коливання його швидко загасатимуть.

Знаменник передавальної функції (9), (13), (19), зрівняний до нуля, визначає характеристичне рівняння для конкретної системи. Якщо постійна загасання D , що виникає через опір повітря, дорівнює нулю ($D = 0$), тоді характеристичне рівняння для двофазного керування ($\lambda \neq 0$) набуває вигляду

$$s^3 + \left(\frac{r}{L_p}\right) \cdot s^2 + (1 + k_p) \cdot \omega_{np}^2 \cdot s + \left(\frac{r}{L_p}\right) \cdot \omega_{np}^2 = 0, \quad (22)$$

де $\left(\frac{r}{L_p}\right)$ – величина, зворотна постійній часу електричного ланцюга КД; k_p – константа, яка задає міру внутрішнього демпфуючого потенціалу самого КД; ω_{np} – недемпфована власна частота малих коливань ротора біля положення рівноваги.

Кубічне рівняння (22), за твердженням авторів [1–3], для $0 < k_p < 8$ має один дійсний і два комплексно-зв'язані кореня. Майже для всіх КД $0 < k_p < 1$, то (22) можна записати у вигляді

$$(s + \alpha) \cdot [(s + \beta)^2 + \omega^2] = 0. \quad (23)$$

α, β, ω рівняння (23) можна, своєю чергою, знайти із системи рівнянь

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = r \cdot L_p; \\ \alpha \cdot (\beta^2 + \omega^2) = (r \cdot L_p) \cdot \omega_{np}^2; \\ \beta^2 + \omega^2 + 2\alpha\beta = (1 + k_p) \cdot \omega_{np}^2, \end{cases} \quad (24)$$

причому $(\alpha, \beta, \omega) > 0$.

Введемо такі позначення:

$$\begin{aligned}
 a &= -r \cdot L_p; b = (1 + k_p) \cdot \omega_{np}^2; c = -(r \cdot L_p) \cdot \omega_{np}^2; \\
 \bar{p} &= -\frac{a^2}{3} + b = -\frac{1}{3} \cdot (r \cdot L_p)^2 + (1 + k_p) \cdot \omega_{np}^2; \\
 q &= 2 \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^3 - \frac{ab}{3} + c = \left(-\frac{2}{27}\right) \cdot r^3 \cdot L_p^3 + \frac{1}{3} \cdot r \cdot L_p \cdot (1 + k_p) \cdot \omega_{np}^2 - (r \cdot L_p) \cdot \omega_{np}^2; \\
 Q &= \left(\frac{\bar{p}}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2.
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

Обов'язково (!) $Q > 0$. Тоді розв'язання системи (24) можна подати у вигляді

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} + \frac{r \cdot L_p}{3}; \alpha > 0; \\
 \beta &= \frac{r \cdot L_p - \alpha}{2}; \beta > 0; \\
 \omega &= \sqrt{\frac{r \cdot L_p \cdot \omega_{np}^2}{\alpha} - \beta^2}; \omega > 0.
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

Тоді $\delta(\theta(t))$ у зображеннях Лапласа має вигляд

$$\begin{aligned}
 \{\delta(\theta(t))\}_{\text{Лапласа}} &\equiv \theta(s) = \\
 &= \frac{\theta_i \cdot s^2 + \theta_i \cdot \left(\frac{r}{L_p}\right) \cdot s + \theta_i \cdot k_p \cdot \omega_{np}^2}{(s + \alpha) \cdot [(s + \beta)^2 + \omega^2]}.
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

Розв'язання для $\delta(\theta(t))$ у часовій області можна подати як:

$$\begin{aligned}
 \delta(\theta(t)) &= \frac{1}{(\beta - \alpha)^2 + \omega^2} \cdot e^{-\alpha t} \cdot \left[\theta_i \cdot k_p \cdot \omega_{np}^2 - \alpha \cdot \theta_i \cdot \left(\frac{r}{L_p}\right) + \alpha^2 \cdot \theta_i \right] + \\
 &+ \cos(\omega t) \cdot e^{-\beta t} \cdot \left[-\theta_i \cdot k_p \cdot \omega_{np}^2 + \alpha \cdot \theta_i \cdot \left(\frac{r}{L_p}\right) + \{(\alpha - \beta)^2 + \omega^2 - \alpha^2\} \cdot \theta_i \right] + \\
 &+ \sin(\omega t) \cdot e^{-\beta t} \cdot \left[\frac{(\alpha - \beta) \cdot \theta_i \cdot k_p \cdot \omega_{np}^2 - (\alpha\beta - \beta^2 - \omega^2) \cdot \theta_i \cdot \left(\frac{r}{L_p}\right)}{\omega} - \right. \\
 &\left. - \theta_i \cdot \left\{ \alpha\omega + \beta \cdot \left[\omega - \frac{(\alpha - \beta) \cdot \beta}{\omega} \right] \right\} \right]
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

У зображеннях Лапласа для $I_A(s)$ і $I_B(s)$ маємо

$$\begin{aligned}
 I_A(s) &= -I_B(s) = \\
 &= \frac{p \cdot \Phi_M \cdot n \cdot \sin\left(\frac{p\lambda}{2}\right)}{L_p} \cdot \left\{ \theta(s) - \frac{\theta_i}{\left(s + \frac{r}{L_p}\right)} \right\} + \frac{p \cdot \Phi_M \cdot n \cdot \sin\left(\frac{p\lambda}{2}\right)}{L_p} \cdot \left\{ -\frac{\left(\frac{r}{L_p}\right) \cdot \theta(s)}{\left(s + \frac{r}{L_p}\right)} \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{29}$$

Залежність $i_A(t)$ і $i_B(t)$ набуває вигляду

$$i_A(t) = -i_B(t) = \frac{p \cdot \Phi_M \cdot n \cdot \sin\left(\frac{p\lambda}{2}\right)}{L_p} \cdot \left\{ \delta\theta(t) - \theta_i \cdot e^{-\frac{r}{L_p}t} \right\} - \frac{p \cdot \Phi_M \cdot n \cdot \sin\left(\frac{p\lambda}{2}\right) \cdot r}{L_p^2} \cdot \int_0^t e^{-\frac{r}{L_p}(t-\tau)} \cdot \delta\theta(\tau) d\tau. \quad (30)$$

Можна відзначити, що значення $\frac{\beta}{\omega_{np}}$ у системі (24) досягає максимуму при $\left(\frac{r}{L_p}\right) \cdot \omega_{np}$ для кожного k_p . Співвідношення для максимальних значень такі:

$$\frac{\beta}{\omega_{np}} = \frac{k_p}{4}; \left(\frac{r}{L_p}\right) \cdot \omega_{np} = 1 + \frac{k_p}{2}; \frac{\alpha}{\omega_{np}} = 1. \quad (31)$$

Враховуючи (31), можемо визначити α, β, ω так:

$$\beta = \frac{\omega_{np} \cdot k_p}{4}; \alpha = \omega_{np}; \omega^2 = \omega_{np}^2 \cdot \left[1 + \frac{1}{2}k_p - \frac{k_p^2}{16} \right]. \quad (32)$$

Для більшості сучасних КД $0 < k_p < 1$ і, отже, $\beta < \frac{\alpha}{4}$; перший член в (28), що пропорційний $e^{-\alpha t}$, зменшується, щонайменше, в чотири рази швидше ніж другий і третій члени (28), пропорційні $e^{-\beta t}$.

Отже, час встановлення ротора КД біля положення рівноваги визначається, загалом, параметром β і становить

$$t_{\text{установлення}}^* \approx \frac{\ln 10}{\beta} = \frac{4 \ln 10}{\omega_{np} \cdot k_p}. \quad (33)$$

При однофазному збудженні обмоток статора КД ($\lambda = 0$) результати інтегування лінеаризованих рівнянь для $\delta\theta, i_A, i_B$ такі:

$$k_p = 0; \omega_{np} = \tilde{\omega}_{np}; \beta = 0; \alpha = \tilde{\omega}_{np}; \omega = \tilde{\omega}_{np}. \quad (34)$$

Тому час установки ротора КД біля положення рівноваги визначається параметром α і становить

$$t_{\text{установлення}}^{**} \approx \frac{\ln 10}{\alpha} = \frac{\ln 10}{\tilde{\omega}_{np}}. \quad (35)$$

Потрібно визнати, що однофазне збудження обмоток статора КД є неефективним, оскільки створює осцилюючу і незгасаючу у часі t добавку в законі $\delta\theta(t)$.

Для однопакетних реактивних КД в співвідношеннях (31) – (33) потрібно зробити такі заміни (а характер фізичних міркувань залишиться попереднім):

$$L_p \Leftrightarrow L_v; \omega_{np} \Leftrightarrow \omega_{nv}; k_p \Leftrightarrow k_v. \quad (36)$$

Результати, одержані для однопакетних реактивних КД, отже, розповсюджуються і на багатопакетні реактивні КД (слідuje лише взаємні індуктивності прийняти $M_{AB} \equiv 0$).

На рис. 1, 2 наведені типові закони руху відхилення ротора КД від положення рівноваги для різних k_p .

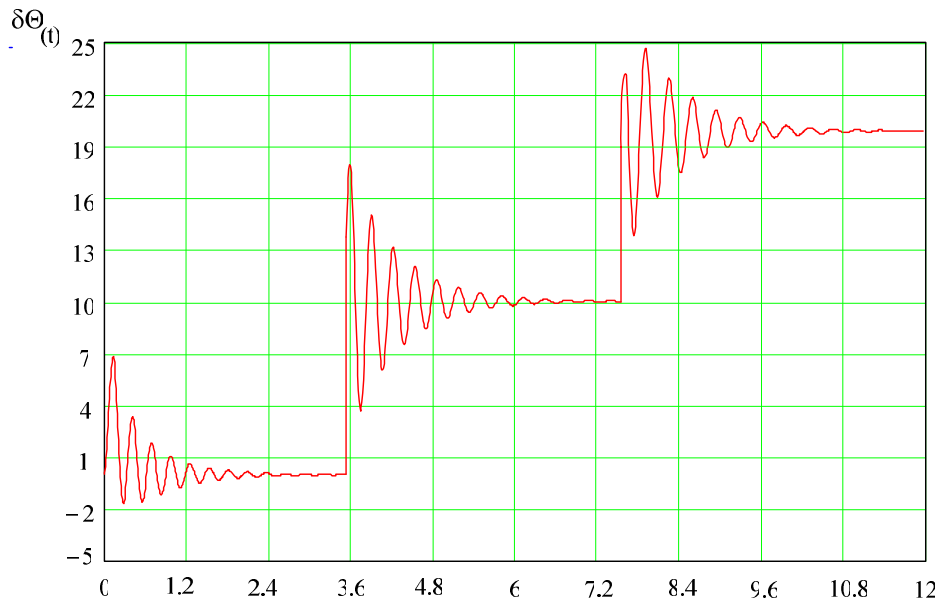


Рис. 1. Закон руху відхилення ротора КД від положення рівноваги при $k_p = 1.0$



Рис. 2. Закон руху відхилення ротора КД від положення рівноваги при $k_p = 0.5$

Висновки. 1. Отримані основні розрахункові аналітичні залежності для однокрокової реакції КД й двофазного його збурення.

2. Встановлені характеристики загасаючих коливань ротора КД відносно положення рівноваги.

3. Отримані залежності можна використати для подальшого вдосконалення інженерних методів розрахунку подібних електромеханічних систем.

1. Кенио Т. Шаговые двигатели и их микропроцессорные системы управления. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 200 с.
2. Hughes A., Lawrenson P.J. Electromagnetic damping in stepping motors // *Proceedings of JEE*. – 1975. – Vol. 122. – No 8. – P. 819–824.
3. Kenjo T., Niimura Y. *Fundamentals and applications of stepping motors*. – Tokyo: Sogo Electronics Publishing CO., LTD., 1979. – P. 111.
4. Hughes A., Lawrenson P.J., Davies T.S. Factors determining high-speed torque in hybrid motors // *Proceedings of International Conference on stepping motors and devices*. – 1976. – University of Leeds. – P. 150–157.
5. Lawrenson P.J., Hughes A., Acarnley P.P. Starting stopping rates of stepping motors: Improvement and prediction // *Proceedings of International Conference on stepping motors and systems*. – 1976. – University of Leeds. – P. 54–60.
6. Lawrenson P.J., Kingham I.E. Resonance effects in stepping motors // *Proceedings of JEE*. – 1977. – Vol. 124, No 5. – P. 445–448.
7. Ward P.A., Lawrenson P.J. Backlash, resonance and instability in stepping motors // *Proceeding of the Sixth annual symposium on Incremental motion control systems and devices*. – Department of Electrical Engineering, University of Illinois, 1977. – P. 73–83.
8. Singh G., Leenhouts A.C., Mosel E.F. Electromagnetic resonance in permanent-magnet step motor drive system // *Proceedings of the International conference on stepping motors and systems*. – University of Leeds, 1976. – P. 115–124.
9. Hughes A., Lawrenson P.J. Simple theoretical stability criteria for 1.80 hybrid motors // *Proceedings of the International conference on stepping motors and systems*. – University of Leeds, 1979. – P. 127–135.
10. Lawrenson P.J., Kingham I.E. Viscously coupled inertial damping of stepping motors // *Proceedings of JEE*. – 1975. – Vol. 122, No 10. – P. 1137–1140.
11. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. *Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов*. – М.: Наука, 1986. – 544 с.
12. Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике для научных работников и инженеров*. – М.: Наука, 1970. – 720 с.