

ВПЛИВ ПЕРІОДИЧНОГО ЗБУРЕННЯ НА БАГАТОЧАСТОТНІ КОЛИВАННЯ ОДНОВИМІРНИХ НЕЛІНІЙНО ПРУЖНИХ СЕРЕДОВИЩ, ЯКІ ХАРАКТЕРИЗУЮТЬСЯ ПОЗДОВЖНІМ РУХОМ

© Харченко Є.В., Сокіл М.Б., 2007

Досліджено вплив періодичних сил на багаточастотні коливання одновимірних (обмеженої довжини) нелінійно пружних середовищ, які характеризуються поздовжнім рухом. В його основу покладено узагальнення методу Д’Аламбера лінійної математичної моделі середовища з подальшим використанням основної ідеї асимптотичного методу Крилова-Боголюбова-Митропольського (КБМ) для збуреної (нелінійної) моделі середовища. Отримано математичні залежності, що визначають вплив нелінійних сил та параметрів, які характеризують рух середовища, на основні характеристики динаміки процесу як у резонансному, так і в нерезонансному випадках.

The method of construction of the asymptotic approaching of regional is developed tasks which describe the multifrequency vibrations of homogeneous (limited length) mobile nonlinear resilient environments. In its basis generalization of method of D’Alamber is fixed on the unrevolted regional task which describes motion of linear model of environment, with the subsequent use of basic idea of asymptotic method of KBM for the nonlinear model of environment. Mathematical dependences, which determine influencing of nonlinear forces and parameters which characterize motion of environment, are got, on basic descriptions of dynamics of process.

Актуальність і постановка задачі. Одно- і багаточастотні коливні процеси, які відбуваються в одновимірних пружних середовищах, у нелінійній постановці розглядалися, наприклад, в [1, 2]. Аналітичне їх дослідження пов’язане із побудовою і аналізом розв’язків крайових чи мішаних крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними, які описують їх рух. У разі малих нелінійностей (так званих квазілінійних середовищ) для дослідження ефективно використовуються наближені методи, в основі яких покладено основну ідею методів збурень [3, 4], зокрема КБМ. Задача істотно ускладнюється у випадку, коли середовище характеризується поздовжнім рухом і сили опору середовища апроксимуються нелінійними функціями. Динамічні процеси середовищ, які характеризуються поздовжнім рухом, описуються рівняннями з частинними похідними, що містять мішану похідну лінійної і часової змінних. Останнє унеможливає застосування, навіть для лінійних моделей руху середовищ, таких методів інтегрування рівнянь з частинними похідними як Д’Аламбера чи Фур’є. Деякі найпростіші задачі про коливання одновимірних середовищ, які характеризуються поздовжнім рухом, за умов існування у них близьких до одночастотних режимів коливаль, розглядали у [5–7]. Умови одночастотності коливаль середовища значною мірою обмежують класи розглядуваних задач. Отже, предметом розгляду цієї роботи є складніша задача – розробка наближеного аналітичного методу розв’язання крайових задач, які описують багаточастотні коливання нелінійно пружних середовищ, що характеризуються поздовжнім рухом, з врахуванням дії на нього зовнішнього періодичного збурення.

Математичною моделлю поздовжніх коливаль одновимірного нелінійно пружного середовища, яке рухається вздовж своєї геометричної осі зі сталою швидкістю, є диференціальне рівняння

$$u_{tt} + 2Vu_{xt} - \alpha^2 u_{xx} = \mathcal{E}(u, u_x, u_t, \theta), \quad \theta = \mu t. \quad (1)$$

В (1) $u(x, t)$ – переміщення в довільний момент часу t перерізу середовища із координатою x ; сталі параметри α, V характеризують фізико-механічні і кінематичні властивості середовища (V – швидкість руху середовища); $f(u, u_x, u_t, \theta)$ – нелінійна аналітична 2π -періодична по θ функція, яка враховує: дію на середовище періодичного збурення; вказує на відхилення пружних його властивостей від лінійного закону; описує сили опору, в'язко-пружні періодичні і іншої природи нелінійні сили середовища. Малий параметр ε у правій частині рівняння (1) дає можливість стверджувати, що найбільше значення вказаних вище сил є малою величиною порівняно із максимальним значенням лінійної складової відновлюючих сил. Для диференціального рівняння (1) розглядатимемо збудені крайові умови

$$u(x, t)|_{x=j} = u(x, t)|_{x=j} = \varepsilon F_j(u, u_x, u_t)|_{x=0;l}, \quad j = 0;l, \quad (2)$$

де $F_j(u, u_x, u_t)$ – відомі аналітичні функції.

Зауважимо, рівняння (1) описує, зокрема, поперечні коливання рухомої струни (канату); поздовжні коливання стрижня, що рухається вздовж своєї осі, динамічні процеси у сипких середовищах під час їх вібротранспортування тощо. Крайові ж умови (2) допускають існування у фіксованих їх точках малих переміщень. Аналітичне дослідження динамічних процесів вказаного типу одновимірних систем зв'язане із значними математичними труднощами – труднощами побудови аналітичних розв'язків диференціального рівняння (1). Незважаючи на те, що для його лінійного аналога (незбуреного, $\varepsilon = 0$, рівняння (1)), не вдається застосувати методи Фур'є і Д'Аламбера, у [6, 7], за найпростіших крайових умов, вдалось побудувати асимптотичне наближення одночастотного розв'язку для нелінійного (збуреного) випадку. Вказані форми коливань і відповідні їм розв'язки у автономних нелінійних системах існують тільки за певних умов: початковий стан середовища за формою повинен бути близьким або збігатися з однією із форм “динамічної рівноваги” системи (нормальної форми коливань). У випадках, коли початковий стан середовища такий, що його з необхідним ступенем точності можна апроксимувати лише у вигляді лінійної комбінації декількох власних форм коливань, то використати одночастотні наближення в тій чи іншій формі “динамічної рівноваги” уявляється неможливим. У вказаному випадку виникає необхідність розгляду і дослідження вже складнішої задачі – задачі про побудову і дослідження розв'язку відповідної нелінійної математичної моделі руху середовища з врахуванням багаточастотних його коливань. Розв'язання такої задачі становить значний інтерес ще і тому, що окремим випадком із отриманого нижче є результати, які стосуються одночастотних коливань як в рухомих [5], так і нерухомих нелінійно пружних середовищах [1], а також багаточастотних коливань їх нерухомих аналогів [2].

Методика дослідження. Спираючись на [6], одночастотні розв'язки незбуреного рівняння, яке відповідає (1), тобто рівняння

$$\mathcal{U}_t + 2V\mathcal{U}_{xt} - \alpha^2 \mathcal{U}_{xx} = 0 \quad (3)$$

за однорідних крайових умов, що впливають із (2) та початкових, які забезпечують існування одночастотного процесу у k -й формі його “динамічної рівноваги”, можна записати у вигляді

$$\hat{u}_k(x, t) = a_k (\cos \bar{\psi}_k - \cos \tilde{\psi}_k) \quad (4)$$

де $a_k, \bar{\psi}_k = \kappa_k x + \omega_k t + \varphi_k$, $\tilde{\psi}_k = \chi_k x - \omega_k t - \varphi_k$ – відповідно амплітудний параметр і фази

k -ї прямої і відбитої хвиль, κ_k і χ_k – їхні хвильові числа ($\kappa_k = \frac{k\pi}{l} \left(1 + \frac{V}{\sqrt{\alpha^2 + V^2}} \right)$,

$\chi_k = \frac{k\pi}{l} \left(1 - \frac{V}{\sqrt{\alpha^2 + V^2}} \right)$, ω_k – власні частоти коливань незбуреної системи ($\omega_k = \frac{k\pi}{l} \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 + V^2}}$).

Загальний же розв'язок незбуреної крайової задачі (1), (2), з врахуванням (4) та її лінійності, можна записати у вигляді

$$\mathcal{U}(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i (\cos \bar{\psi}_i - \cos \tilde{\psi}_i). \quad (5)$$

У випадку, коли функції, які визначають початковий стан середовища, можна апроксимувати на відрізку $[0, l]$ у вигляді

$$\begin{aligned} u(x, t)|_{t=0} &= \sum_{i=1}^k a_i^0 (\cos(\kappa_i x + \varphi_i^0) - \cos(\chi_i x - \varphi_i^0)), \\ u_t(x, t)|_{t=0} &= -\sum_{i=1}^k a_i^0 \omega_i (\sin(\kappa_i x + \varphi_i^0) + \sin(\chi_i x - \varphi_i^0)), \end{aligned} \quad (6)$$

де a_i^0 і φ_i^0 ($i=1, 2, \dots, k$) – дійсні числа, то при розгляді динамічного процесу у середовищі, математичною моделлю якого є крайова задача (1), (2), достатньо обмежитись його k -частотним наближенням.

Отже, залежності (6) є умовами існування у незбуреній крайовій задачі k -частотного динамічного процесу, який являє собою накладання незагасаючих прямих і відбитих хвиль. При переході до збуреної крайової задачі (1), (2) шукатимемо такий її режим коливань, який близький до режиму коливань незбуреної системи, а загальна ідея методів збурень [1–4] дає підстави розв'язок збуреної задачі шукати у вигляді асимптотичного ряду

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{i=1}^k a_i (\cos \bar{\psi}_i - \cos \tilde{\psi}_i) + \varepsilon U_1(a_1, a_2, \dots, a_k, x, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k, \theta) + \\ &+ \varepsilon^2 U_2(a_1, a_2, \dots, a_k, x, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k, \theta) + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

де $U_1(a_1, a_2, \dots, a_k, x, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k, \theta)$ $U_2(a_1, a_2, \dots, a_k, x, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k, \theta)$ – періодичні по $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k$ ($\psi_i = \omega_i t + \varphi_i$) функції з періодом 2π , що задовольняють умови, які випливають із (2), зокрема для першого наближення

$$U_1(a_1, a_2, \dots, a_k, x, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k, \theta) = F_j(u, u_x, u_t, \theta) \quad (8)$$

$$\begin{cases} u = \sum_{i=1}^k a_i (\cos(\kappa_i j + \psi_i) - \cos(\chi_i j - \psi_i)), \\ u_x = \sum_{i=1}^k a_i (\kappa_i \sin(\kappa_i j + \psi_i) - \chi_i \sin(\chi_i j - \psi_i)), \\ u_t = \sum_{i=1}^k a_i \omega_i (\sin(\kappa_i j + \psi_i) + \sin(\chi_i j - \psi_i)) \end{cases}$$

На відміну від лінійної незбуреної крайової задачі, наявні у середовищі навіть малі нелінійні сили (права частина рівняння (1)) та й, взагалі кажучи, і крайові умови є причиною того, що параметри $a_1, a_2, \dots, a_k, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ в зображенні (8) будуть вже змінними. Існують різні гіпотези і фізичні припущення щодо законів зміни цих параметрів. Зокрема, для “коротких” систем вважається, що параметри $a_1, a_2, \dots, a_k, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ змінюються лише в часі. Що стосується так званих “довгих” систем, то ці параметри змінюються вже як вздовж хвилі, так і в часі, тобто є функціями незалежних параметрів x і t (див., наприклад, [8, 9]). Нижче розглянемо простіший, перший, випадок. Крім цього, якщо між частотою зовнішнього збурення μ і однією із власних частот частотного спектра незбуреної крайової задачі існує зв'язок $m\mu \approx n\omega_s$, то на цій частоті існуватиме резонанс і резонансна амплітуда залежатиме від різниці фаз власних і вимушених коливань.

Розглянемо спочатку простіший, *нерезонансний випадок*. Відповідно до загальної ідеї асимптотичних методів КБМ [1], невідомі закони зміни в часі параметрів $a_1, a_2, \dots, a_k, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ збуреної крайової задачі визначаються із системи диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{da_i}{dt} &= \varepsilon A_{i1}(a_1, a_2, \dots, a_k) + \varepsilon^2 A_{i2}(a_1, a_2, \dots, a_k) + \dots, \\ \frac{d\varphi_i}{dt} &= \varepsilon B_{i1}(a_1, a_2, \dots, a_k) + \varepsilon^2 B_{i2}(a_1, a_2, \dots, a_k) + \dots, \quad i = 1, 2, \dots, k. \end{aligned} \quad (9)$$

Праві частини вказаних рівнянь, тобто функції $A_{i1}(a_1, a_2, \dots, a_k)$, $A_{i2}(a_1, a_2, \dots, a_k)$, $B_{i1}(a_1, a_2, \dots, a_k)$, $B_{i2}(a_1, a_2, \dots, a_k)$, ... є невідомими і визначаються так, щоб асимптотичне зобра-

ження (7) з необхідним ступенем точності задовольняло вихідне рівняння (1) і крайовим умовам (2), якщо в нього на місце a_i і φ_i підставити функції часу визначені цими рівняннями. Таке зображення k -частотного розв'язку крайової задачі (1), (2) узгоджується із загальними принципами асимптотичних методів КБМ. Із нього, як окремий випадок (при $\beta=0, \rightarrow \kappa=\chi$), маємо зображення, яке стосується коливних процесів середовищ, що не характеризуються поздовжнім рухом. Крім того, із другого рівняння співвідношень (9) випливає, що

$$\frac{d\psi_i}{dt} = \omega_i + \varepsilon B_{i1}(a_1, a_2, \dots, a_k) + \varepsilon^2 B_{i2}(a_1, a_2, \dots, a_k) + \dots$$

Знайдемо вплив нелінійних і періодичних сил на багаточастотний процес досліджуваного середовища, тобто визначимо функції $U_1(a_1, a_2, \dots, a_k, x, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k, \theta)$, $U_2(a_1, a_2, \dots, a_k, x, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k, \theta)$ та $A_{i1}(a_1, a_2, \dots, a_k)$, $B_{i1}(a_1, a_2, \dots, a_k)$, $A_{i2}(a_1, a_2, \dots, a_k)$, $B_{i2}(a_1, a_2, \dots, a_k)$, Для цього шляхом диференціювання (7) по незалежних змінних x і t , враховуючи при цьому (9), знаходимо

$$u_i(x, t) = -\sum_{i=1}^k a_i \omega_i (\sin \bar{\psi}_i + \sin \tilde{\psi}_i) + \varepsilon \sum_{i=1}^k \left[A_{i1} (\cos \bar{\psi}_i - \cos \tilde{\psi}_i) - a_i B_{i1} (\sin \bar{\psi}_i + \sin \tilde{\psi}_i) + \omega_i \frac{\partial U_1}{\partial \psi_i} + \mu \frac{\partial U_1}{\partial \theta} \right] + \varepsilon^2 \sum_{i=1}^k \left[A_{i2} (\cos \bar{\psi}_i - \cos \tilde{\psi}_i) - a_i B_{i2} (\sin \bar{\psi}_i + \sin \tilde{\psi}_i) + A_{i1} \frac{\partial U_1}{\partial a_i} + B_{i1} \frac{\partial U_1}{\partial \psi_i} + \omega_i \frac{\partial U_2}{\partial \psi_i} + \mu \frac{\partial U_2}{\partial \theta} \right] + \dots \quad (10)$$

$$+ u_{tt}(x, t) = -\sum_{i=1}^k a_i \omega_i^2 (\cos \bar{\psi}_i - \cos \tilde{\psi}_i) + \varepsilon \left\{ \sum_{i=1}^k \left[-2\omega_i A_{i1} (\sin \bar{\psi}_i + \sin \tilde{\psi}_i) - 2a_i \omega_i B_{i1} (\cos \bar{\psi}_i - \cos \tilde{\psi}_i) + \omega_i \sum_{j=1}^k \frac{\partial^2 U_1}{\partial \psi_i \partial \psi_j} \omega_j + 2\omega_i \mu \frac{\partial^2 U_1}{\partial \psi_i \partial \theta} + \mu^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial \theta^2} \right] + \omega_i \sum_{j=1}^k \frac{\partial^2 U_2}{\partial \psi_i \partial \psi_j} \omega_j + 2\omega_i \mu \frac{\partial^2 U_2}{\partial \psi_i \partial \theta} + \mu^2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial \theta^2} \right\} + \varepsilon^2 \left\{ \sum_{i=1}^k \left[\sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial A_{i1}}{\partial a_j} A_{j1} - a_i (B_{i1})^2 \right) (\cos \bar{\psi}_i - \cos \tilde{\psi}_i) - \sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial B_{i1}}{\partial a_j} (A_{j1} + 2A_{i1} B_{i1}) (\sin \bar{\psi}_i + \sin \tilde{\psi}_i) + 2\omega_j \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial a_i \partial \psi_j} A_{i1} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial \psi_i \partial \psi_j} B_{i1} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial a_i \partial \theta} A_{i1} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial \psi_j \partial \theta} B_{i1} \right) \right] \right\}, \quad (11)$$

$$u_{ix}(x, t) = -\sum_{i=1}^k a_i \omega_i (\kappa_i \cos \bar{\psi}_i + \chi_i \cos \tilde{\psi}_i) + \varepsilon \sum_{i=1}^k \left[-A_{i1} (\kappa_i \sin \bar{\psi}_i - \chi_i \sin \tilde{\psi}_i) - a_i B_{i1} (\kappa_i \cos \bar{\psi}_i + \chi_i \cos \tilde{\psi}_i) + \omega_i \frac{\partial^2 U_1}{\partial \psi_i \partial x} + \mu \frac{\partial^2 U_1}{\partial \theta \partial x} \right] + \varepsilon^2 \sum_{i=1}^k \left[-A_{i2} (\kappa_i \sin \bar{\psi}_i + \chi_i \sin \tilde{\psi}_i) - a_i B_{i2} (\kappa_i \cos \bar{\psi}_i + \chi_i \cos \tilde{\psi}_i) + A_{i1} \frac{\partial^2 U_1}{\partial a_i \partial x} + B_{i1} \frac{\partial^2 U_1}{\partial \psi_i \partial x} + \omega_i \frac{\partial^2 U_2}{\partial \psi_i \partial x} + \mu \frac{\partial^2 U_2}{\partial \theta \partial x} \right] \dots, \quad (12)$$

$$u_{xx}(x,t) = -\sum_{i=1}^k [a_i(\kappa_i^2 \cos \bar{\psi}_i - \chi_i^2 \cos \tilde{\psi}_i)] + \varepsilon \sum_{i=1}^k \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \varepsilon^2 \sum_{i=1}^k \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2}.$$

Асимптотичне зображення (7) задовольнятиме вихідному рівнянню (1) з необхідним ступенем точності, якщо після підстановки в нього на місце функції $u(x,t)$ і її похідних вирази (10)–(12) коефіцієнти при однакових степенях ε правої і лівої частин залежності, що при цьому утворюється, будуть однаковими. Останнє дає змогу отримати вже лінійні диференціальні рівняння, які зв'язують невідомі функції $U_1(a_1, a_2, \dots, a_k, x, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k, \theta)$, $U_2(a_1, a_2, \dots, a_k, x, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k, \theta)$, $A_{i1}(a_1, a_2, \dots, a_k)$, $B_{i1}(a_1, a_2, \dots, a_k)$, $A_{i2}(a_1, a_2, \dots, a_k)$, $B_{i2}(a_1, a_2, \dots, a_k)$, ..., зокрема для першого наближення розв'язку задачі маємо

$$L(U_1) = \sum_{i=1}^k \left(\omega_i \sum_{j=1}^k \frac{\partial^2 U_1}{\partial \psi_i \partial \psi_j} \omega_j + 2\omega_i \mu \frac{\partial^2 U_1}{\partial \psi_i \partial \theta} + \mu^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial \theta^2} + 2V \left(\omega_i \frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial \psi_i} + \mu \frac{\partial^2 U_1}{\partial \theta \partial x} \right) \right) - \alpha^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} =$$

$$= f_1(a_1, a_2, \dots, a_k, x, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k) +$$

$$+ 2 \sum_{i=1}^k [A_{i1}((\omega_i + \kappa_i V) \sin \bar{\psi}_i + (\omega_i - \chi_i V) \sin \tilde{\psi}_i) + a_i \omega_i B_{i1}((\omega_i + \kappa_i V) \cos \bar{\psi}_i - (\omega_i - \chi_i V) \cos \tilde{\psi}_i)], \quad (13)$$

де

$$f_1(a_1, a_2, \dots, a_k, x, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k, \theta) = f(u, u_x, u_t, \theta)$$

$$\left| \begin{array}{l} u = \sum_{i=1}^k a_i (\cos \bar{\psi}_i - \cos \tilde{\psi}_i), \\ u_x = -\sum_{i=1}^k a_i (\kappa_i \sin \bar{\psi}_i - \chi_i \sin \tilde{\psi}_i), \\ u_t = \sum_{i=1}^k -a_i \omega_i (\sin \bar{\psi}_i + \sin \tilde{\psi}_i) \end{array} \right.$$

Аналогічний вигляд мають рівняння для другого і наступних наближень, тільки функції, $f_2(a_1, a_2, \dots, a_k, x, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k, \theta)$, $f_3(a_1, a_2, \dots, a_k, x, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k, \theta)$ мають громіздкіший вигляд. Щоб виконувались крайові умови для функції $U_1(a_1, a_2, \dots, a_k, x, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k, \theta)$, розв'язок неоднорідної крайової задачі (13), (8) будемо шукати у вигляді:

$$U_1(a_1, a_2, \dots, a_k, x, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k, \theta) = V_1(a_1, a_2, \dots, a_k, x, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k, \theta) +$$

$$+ W_1(a_1, a_2, \dots, a_k, x, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k, \theta), \quad (14)$$

де $V_1(a_1, a_2, \dots, a_k, x, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k, \theta)$ – нова невідома функція, а функція $W_1(a_1, a_2, \dots, a_k, x, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k, \theta)$ – вибирається так, щоб крайові умови відносно $V_1(a_1, a_2, \dots, a_k, x, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k, \theta)$ були лінійними однорідними. Із крайових умов (8) випливає, якщо за функцію $W_1(a_1, a_2, \dots, a_k, x, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k, \theta)$ вибрати розв'язок рівняння

$$\frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} = 0, \quad (14)$$

який задовольняє крайові умови

$$W_1(a_1, a_2, \dots, a_k, x, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k, \theta) \Big|_{x=j} = F_j(u, u_x, u_t),$$

$$\left| \begin{array}{l} u = \sum_{i=1}^k a_i (\cos(\kappa_i j + \psi_i) - \cos(\chi_i j - \psi_i)), \\ u_x = \sum_{i=1}^k a_i (\kappa_i \sin(\kappa_i j + \psi_i) - \chi_i \sin(\chi_i j - \psi_i)), \\ u_t = \sum_{i=1}^k a_i \omega_i (\sin(\kappa_i j + \psi_i) + \sin(\chi_i j - \psi_i)) \end{array} \right., \quad (15)$$

то функція $V_1(a_1, a_2, \dots, a_k, x, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k, \theta)$ вже задовольнятиме однорідні крайові умови

$$V_1(a_1, a_2, \dots, a_k, x, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k, \theta) \Big|_{x=j} = 0. \quad (16)$$

Знайти розв'язок крайової задачі (14), (15) не становить значних труднощів:

$$W_1(a_1, a_2, \dots, a_k, x, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k, \theta) =$$

$$= (\bar{F}_1(a_1, a_2, \dots, a_k, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k) - \bar{F}_0(a_1, a_2, \dots, a_k, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k)) \frac{x}{l} + \bar{F}_0(a_1, a_2, \dots, a_k, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k), \quad (17)$$

$$\text{де } \bar{F}_0 = F_0(u, u_x, u_t) \quad , \quad \bar{F}_1 = F_1(u, u_x, u_t) \quad .$$

$$\begin{cases} u = \sum_{i=1}^k a_i (\cos(\kappa_i j + \psi_i) - \cos(\chi_i j - \psi_i)), \\ u_x = \sum_{i=1}^k a_i (\kappa_i \sin(\kappa_i j + \psi_i) - \chi_i \sin(\chi_i j - \psi_i)), \\ u_t = \sum_{i=1}^k a_i \omega_i (\sin(\kappa_i j + \psi_i) + \sin(\chi_i j - \psi_i)) \end{cases} \quad \begin{cases} u = \sum_{i=1}^k a_i (\cos(\kappa_i j + \psi_i) - \cos(\chi_i j - \psi_i)), \\ u_x = \sum_{i=1}^k a_i (\kappa_i \sin(\kappa_i j + \psi_i) - \chi_i \sin(\chi_i j - \psi_i)), \\ u_t = \sum_{i=1}^k a_i \omega_i (\sin(\kappa_i j + \psi_i) + \sin(\chi_i j - \psi_i)) \end{cases} .$$

Підставляючи в (13) на місце функції $U_1(a_1, a_2, \dots, a_k, x, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k, \theta)$ вираз (14), з врахуванням того, що функція $W_1(a_1, a_2, \dots, a_k, x, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k, \theta)$ має вигляд (17), отримаємо диференціальне рівняння, якому повинна задовольняти функція $V_1(a_1, a_2, \dots, a_k, x, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k, \theta)$

$$L(V_1) = \bar{f}_1(a_1, a_2, \dots, a_k, x, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k) +$$

$$+ 2 \sum_{i=1}^k [A_{i1}((\omega_i + \kappa_i V) \sin \bar{\psi}_i + (\omega_i - \chi_i V) \sin \tilde{\psi}_i) + a_i \omega_i B_{i1}((\omega_i + \kappa_i V) \cos \bar{\psi}_i - (\omega_i - \chi_i V) \cos \tilde{\psi}_i)], \quad (18)$$

де

$$\bar{f}_1(a_1, a_2, \dots, a_k, x, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k, \theta) = f_1(a_1, a_2, \dots, a_k, x, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k, \theta) -$$

$$- \sum_{i=1}^k \left(\omega_i \sum_{j=1}^k \frac{\partial^2 W_1}{\partial \psi_i \partial \psi_j} \omega_j + 2 \omega_i \mu \frac{\partial^2 W_1}{\partial \psi_i \partial \theta} + \mu^2 \frac{\partial^2 W_1}{\partial \theta^2} + 2V \left(\omega_i \frac{\partial^2 W_1}{\partial x \partial \psi_i} + \mu \frac{\partial^2 W_1}{\partial \theta \partial x} \right) \right).$$

Для однозначного визначення функцій $A_{i1}(a_1, a_2, \dots, a_k)$, $B_{i1}(a_1, a_2, \dots, a_k)$ накладемо на функцію $V_1(a_1, a_2, \dots, a_k, x, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k, \theta)$ додаткові умови – умови відсутності у її розкладах доданків, які пропорційні s -й хвилі та її похідній за часом, тобто

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} V_1(a_1, a_2, \dots, a_k, x, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k, \theta) (\cos(\kappa_s x + \psi_s) - \cos(\chi_s x - \psi_s)) dx d\psi_1 d\psi_2 \dots d\psi_k = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} V_1(a_1, a_2, \dots, a_k, x, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k, \theta) (\sin(\kappa_s x + \psi_s) + \sin(\chi_s x - \psi_s)) dx d\psi_1 d\psi_2 \dots d\psi_k = 0, \quad (19)$$

$s = 1, 2, \dots, k$.

Легко переконатись, якщо $V_1(a_1, a_2, \dots, a_k, x, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k, \theta)$ неперервна двічі диференційована по x і ψ_i функція, яка є розв'язком диференціального рівняння (18) і задовольняє однорідні крайові умови (16), то виконуються співвідношення

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \{L(V_1)\} (\cos(\kappa_s x + \psi_s) - \cos(\chi_s x - \psi_s)) dx d\psi_1 d\psi_2 \dots d\psi_k d\theta = 0, \quad (20)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \{L(V_1)\} (\sin(\kappa_s x + \psi_s) + \sin(\chi_s x - \psi_s)) dx d\psi_1 d\psi_2 \dots d\psi_k d\theta = 0. \quad (21)$$

З фізичних міркувань умови (19) відповідають вибору за параметр $2a_i$ амплітуди i -ї хвилі, а самі співвідношення (20), (21) дозволяють із диференціальних рівнянь (18) визначити невідомі функції $A_{i1}(a_1, a_2, \dots, a_k)$, $B_{i1}(a_1, a_2, \dots, a_k)$ у вигляді

$$A_s(a) = \frac{-\varepsilon}{(2\pi)^{k+1} a_s \Delta_s} \int_0^l \left(\cos \frac{\kappa_s - \chi_s}{2} x \rho_{2s}(x) + \sin \frac{\kappa_s - \chi_s}{2} x \rho_{1s}(x) \right) dx \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \bar{f}_1(a, x, \psi, \theta) (\cos(\kappa_s x + \psi_s) - \cos(\chi_s x - \psi_s)) dx d\psi_1 d\psi_2 \dots d\psi_k +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{(2\pi)^{k+1} a_s \Delta_s} \int_0^l \left(\sin \frac{\kappa_s - \chi_s}{2} x \rho_{2s}(x) - \cos \frac{\kappa_s - \chi_s}{2} x \rho_{1s}(x) \right) dx \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \int_0^l \bar{f}_1(a, x, \psi, \theta) (\sin(\kappa_s x + \psi_s) + \sin(\chi_s x - \psi_s)) dx d\psi_1 d\psi_2 \dots d\psi_k, \quad (22) \\
& B_s(a) = \frac{-\varepsilon}{(2\pi)^{k+1} \Delta_s} \int_0^l \left(\sin \frac{\kappa_s - \chi_s}{2} x \rho_{1s}(x) + \cos \frac{\kappa_s - \chi_s}{2} x \rho_{2s}(x) \right) dx \times \\
& \times \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \int_0^l \bar{f}_1(a, x, \psi) (\sin(\kappa_s x + \psi_s) + \sin(\chi_s x - \psi_s)) dx d\psi_1 d\psi_2 \dots d\psi_k - \\
& - \frac{\varepsilon}{(2\pi)^{k+1} \Delta_s} \int_0^l \left(\cos \frac{\kappa_s - \chi_s}{2} x \rho_{1s}(x) - \sin \frac{\kappa_s - \chi_s}{2} x \rho_{2s}(x) \right) dx \times \\
& \times \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \int_0^l \bar{f}_1(a, x, \psi) (\cos(\kappa_s x + \psi_s) - \cos(\chi_s x - \psi_s)) dx d\psi_1 d\psi_2 \dots d\psi_k,
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta_s}{a_s} &= \left[\int_0^l \left(\sin \frac{\kappa_s - \chi_s}{2} x \rho_{1s}(x) + \cos \frac{\kappa_s - \chi_s}{2} x \rho_{2s}(x) \right) dx \right]^2 - \left[\int_0^l \left(\sin \frac{\kappa_s - \chi_s}{2} x \rho_{2s}(x) - \cos \frac{\kappa_s - \chi_s}{2} x \rho_{1s}(x) \right) dx \right]^2 \\
\rho_{1s}(x) &= \sin \frac{\kappa_s + \chi_s}{2} x [(\omega_s + \kappa_s V) \sin \kappa_s x + (\omega_s + \chi_s V) \sin \chi_s x], \\
\rho_{2s}(x) &= \sin \frac{\kappa_s + \chi_s}{2} x [(\omega_s + \kappa_s V) \cos \kappa_s x - (\omega_s - \chi_s V) \cos \chi_s x], \quad \Delta = \int_0^l (\rho_{1s}^2(x) + \rho_{2s}^2(x)) dx.
\end{aligned}$$

Отже, перше наближення багаточастотного динамічного процесу, середовище, рух якого описується крайовою задачею (1), (2), описується у нерезонансному випадку залежністю

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^k a_i (\cos(\kappa_i x + \psi_i) - \cos(\chi_i x - \psi_i))$$

в якій параметри a_s і ψ_s як функції часу визначаються системою диференціальних рівнянь (22).

Резонансний випадок. Розглянемо лише випадок головного резонансу (за однорідних крайових умов) на першій основній частоті багаточастотного спектра, тобто вважатимемо для простоти, що існує таке: $\mu \approx \omega_1$. Тоді, відповідно до наведеного вище, амплітуда коливань частоти, яка перебуває в резонансі, визначається із диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}
\frac{da_1}{dt} &= \varepsilon A_{11}(a_1, a_2, \dots, a_k, \gamma) + \varepsilon^2 A_{12}(a_1, a_2, \dots, a_k, \gamma) + \dots, \\
\frac{d\gamma}{dt} &= \omega_1 - \mu + \varepsilon B_{11}(a_1, a_2, \dots, a_k, \gamma) + \varepsilon^2 B_{12}(a_1, a_2, \dots, a_k, \gamma) + \dots, \quad \gamma = \psi_1 - \theta,
\end{aligned}$$

а всі інші зв'язані співвідношеннями як і у нерезонансному випадку.

Виконуючи процедуру диференціювання функції $u(x, t)$ з врахуванням вищевказаного, отримуємо диференціальні рівняння, які зв'язують невідомі функції

$$\begin{aligned}
& L(U_1) = f_1(a_1, a_2, \dots, a_k, x, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k, \theta) + \\
& + 2[A_{11}(a_1 \dots a_k, \gamma) ((\omega_1 + \kappa_1 V) \sin \bar{\psi}_1 + (\omega_1 - \chi_1 V) \sin \tilde{\psi}_1) + a_1 \omega_1 B_{11}(a_1 \dots a_k, \gamma) ((\omega_1 + \kappa_1 V) \cos \bar{\psi}_1 - (\omega_1 - \chi_1 V) \cos \tilde{\psi}_1)] + \\
& + a_1 (\omega_1 - \mu) \frac{\partial B_{11}(a_1 \dots a_k, \gamma)}{\partial \gamma} (\sin \bar{\psi}_1 + \sin \tilde{\psi}_1) - (\omega_1 - \mu) \frac{\partial A_{11}(a_1 \dots a_k, \gamma)}{\partial \gamma} (\cos \bar{\psi}_1 - \cos \tilde{\psi}_1) + \\
& + 2 \sum_{i=2}^k [A_{i1} ((\omega_i + \kappa_i V) \sin \bar{\psi}_i + (\omega_i - \chi_i V) \sin \tilde{\psi}_i) + a_i \omega_i B_{i1} ((\omega_i + \kappa_i V) \cos \bar{\psi}_i - (\omega_i - \chi_i V) \cos \tilde{\psi}_i)].
\end{aligned}$$

Як і для нерезонансного випадку для однозначного визначення функцій $A_{i1}(a_1, a_2, \dots, a_k, \gamma)$, $B_{i1}(a_1, a_2, \dots, a_k, \gamma)$ та інших, накладемо на функцію $U_1(a_1, a_2, \dots, a_k, x, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k, \theta)$ додаткові

умови – умови відсутності у її розкладах доданків, які пропорційні s -й формі хвилі та її похідній за часом, отримаємо таку систему рівнянь для знаходження невідомих функцій: $A_{11}(a_1, a_2, \dots, a_k, \gamma)$, $B_{11}(a_1, a_2, \dots, a_k, \gamma)$, $A_{i1}(a_1, a_2, \dots, a_k)$, $B_{i1}(a_1, a_2, \dots, a_k)$

$$\begin{aligned}
& - A_1(a, \gamma) \int_0^l \left(\sin \frac{\chi_1 - \kappa_1}{2} x \rho_{11}(x) + \cos \frac{\chi_1 - \kappa_1}{2} x \rho_{21}(x) \right) dx - \\
& - a_1 B_1(a, \gamma) \int_0^l \left(\sin \frac{\chi_1 - \kappa_1}{2} x \rho_{21}(x) - \cos \frac{\chi_1 - \kappa_1}{2} x \rho_{11}(x) \right) dx + \\
& + \frac{1}{2} (\omega_1 - \mu) \frac{\partial A_1(a, \gamma)}{\partial \gamma} \int_0^l (\cos(\kappa_1 + \chi_1) x - 1) dx = \\
= & \frac{-4\varepsilon}{(2\pi)^k} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \int_0^l \bar{f}_1(a, x, \gamma + \theta, \psi_2, \dots, \psi_s) (\cos(\kappa_1 x + \gamma + \theta) - \cos(\chi_1 x - \gamma - \theta)) dx d\theta d\psi_2 \dots d\psi_s, \quad (23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_s(a, \gamma) \int_0^l \left(\cos \frac{\chi_1 - \kappa_1}{2} x \rho_{11}(x) - \sin \frac{\chi_1 - \kappa_1}{2} x \rho_{21}(x) \right) dx + \\
& + a_1 B_1(a, \gamma) \int_0^l \left(\cos \frac{\chi_1 - \kappa_1}{2} x \rho_{21}(x) + \sin \frac{\chi_1 - \kappa_1}{2} x \rho_{11}(x) \right) dx - \\
& - \frac{1}{2} (\omega_1 - \mu) \frac{\partial B_{11}(a, \gamma)}{\partial \gamma} \int_0^l (\cos(\kappa_1 + \chi_1) x - 1) dx = \\
= & \frac{-4\varepsilon}{(2\pi)^k} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \int_0^l \bar{f}_1(a, x, \gamma + \theta, \psi_2, \dots, \psi_s) (\sin(\kappa_1 x + \gamma + \theta) + \sin(\chi_1 x - \gamma - \theta)) dx d\theta d\psi_2 \dots d\psi_s, \\
& - A_s(a) \int_0^l \left(\sin \frac{\chi_s - \kappa_s}{2} x \rho_{1s}(x) - \cos \frac{\chi_s - \kappa_s}{2} x \rho_{2s}(x) \right) dx - \\
& - a_s B_s(a) \int_0^l \left(\sin \frac{\chi_s - \kappa_s}{2} x \rho_{2s}(x) + \cos \frac{\chi_s - \kappa_s}{2} x \rho_{1s}(x) \right) dx = \\
= & \frac{-4\varepsilon}{(2\pi)^{k+1}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \int_0^l \bar{f}_1(a, x, \psi, \theta) (\cos(\kappa_s x + \psi_s) - \cos(\chi_s x - \psi_s)) dx d\psi_1 d\psi_2 \dots d\psi_s d\theta, \quad (24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_s(a) \int_0^l \left(\cos \frac{\chi_s - \kappa_s}{2} x \rho_{1s}(x) + \sin \frac{\chi_s - \kappa_s}{2} x \rho_{2s}(x) \right) dx + \\
& + a_s B_s(a) \int_0^l \left(\cos \frac{\chi_s - \kappa_s}{2} x \rho_{2s}(x) - \sin \frac{\chi_s - \kappa_s}{2} x \rho_{1s}(x) \right) dx = \\
= & \frac{-4\varepsilon}{(2\pi)^{k+1}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \int_0^l \bar{f}_1(a, x, \psi, \theta) (\sin(\kappa_s x + \psi_s) + \sin(\chi_s x - \psi_s)) dx d\psi_1 d\psi_2 \dots d\psi_s d\theta.
\end{aligned}$$

Після нескладних перетворень із (24) знаходимо співвідношення, які визначають закони зміни в часі резонансної амплітуди і частот багаточастотного хвильового процесу

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A_1(a, \gamma)}{\partial \gamma} &= A_1(a, \gamma) P_1 + B_1(a, \gamma) R_1 + H_1(\gamma), \\
\frac{\partial B_1(a, \gamma)}{\partial \gamma} &= A_1(a, \gamma) P_2 + B_1(a, \gamma) R_2 - H_2(\gamma), \quad (25)
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \frac{\int_0^l \left(\sin \frac{\chi_1 - \kappa_1}{2} x \rho_{11}(x) + \cos \frac{\chi_1 - \kappa_1}{2} x \rho_{21}(x) \right) dx}{\frac{1}{2} (\omega_1 - \mu) \int_0^l (\cos(\kappa_1 + \chi_1)x - 1) dx}, \\
 P_2 &= -\frac{\int_0^l \left(\cos \frac{\chi_1 - \kappa_1}{2} x \rho_{11}(x) - \sin \frac{\chi_1 - \kappa_1}{2} x \rho_{21}(x) \right) dx}{\frac{1}{2} (\omega_1 - \mu) \int_0^l (\cos(\kappa_1 + \chi_1)x - 1) dx}, \\
 R_1 &= \frac{a_1 \int_0^l \left(\sin \frac{\chi_1 - \kappa_1}{2} x \rho_{21}(x) - \cos \frac{\chi_1 - \kappa_1}{2} x \rho_{11}(x) \right) dx}{\frac{1}{2} (\omega_1 - \mu) \int_0^l (\cos(\kappa_1 + \chi_1)x - 1) dx}, \\
 R_2 &= -\frac{a_1 \int_0^l \left(\cos \frac{\chi_1 - \kappa_1}{2} x \rho_{21}(x) + \sin \frac{\chi_1 - \kappa_1}{2} x \rho_{11}(x) \right) dx}{\frac{1}{2} (\omega_1 - \mu) \int_0^l (\cos(\kappa_1 + \chi_1)x - 1) dx}, \\
 H_1 &= \frac{-\frac{4\varepsilon}{(2\pi)^k} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \int_0^l \bar{f}_1(a, x, \psi) (\cos(\kappa_1 x + \gamma + \theta) - \cos(\chi_1 x - \gamma - \theta)) dx d\theta d\psi_2 \dots d\psi_s}{\frac{1}{2} (\omega_1 - \mu) \int_0^l (\cos(\kappa_1 + \chi_1)x - 1) dx}, \\
 H_2 &= \frac{\frac{4\varepsilon}{(2\pi)^k} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \int_0^l \bar{f}_1(a, x, \psi) (\sin(\kappa_1 x + \gamma + \theta) + \sin(\chi_1 x - \gamma - \theta)) dx d\theta d\psi_2 \dots d\psi_s}{\frac{1}{2} (\omega_1 - \mu) \int_0^l (\cos(\kappa_1 + \chi_1)x - 1) dx}.
 \end{aligned}$$

Висновки. Всі інші амплітуди та частоти зв'язані співвідношеннями, аналогічними до тих, які були отримані для нерезонансного випадку. Дослідження закону зміни резонансної амплітуди можна проводити за допомогою якісних методів дослідження диференціальних рівнянь.

Треба також відзначити: а) як окремі випадки із викладеного отримуються при $k=1$ – результати, які стосуються одночастотних коливань нелінійно пружних рухомих систем; б) при $V=0$ – багаточастотних коливань одновимірних систем, які не рухаються вздовж своєї осі; в) саму методику можна узагальнити на випадок збурених крайових умов неавтономного типу, а також на випадок багаточастотного періодичного збурення.

1. Митропольский Ю.А., Мосеенков Б.И. Асимптотические решения уравнений в частных производных. – К.: Вища шк., 1974. – 592 с. 2. Мосеенков Б.И. Методика построения и структура асимптотических приближений решений нелинейных смешанных краевых задач при исследовании многочастотных режимов колебаний // *Мат. физика.* – 1972. – 11. – С. 83–98. 3. Найфе А.Х. Методы возмущений. – М.: Мир, 1976. – 456 с. 4. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. – М.: Мир, 1972. – 272 с. 5. Доценко П.Д. Колебание и устойчивость движущейся полосы // *Машиноведение.* – 1969. – № 5. – С. 18–24. 6. Мартинців М.П., Сокіл М.Б. Одне узагальнення методу Д'алайбера для систем, які характеризуються позовжнім рухом // *Наук. вісн.: Зб. наук.-техн. пр.* – Львів: УкрДЛТУ, 2003. – Вип. 13.4. – С. 64–6. 7. Харченко Є.В., Сокіл М.Б. Вимушені коливання рухомих середовищ і асимптотичний метод у їх дослідженні // *Наук. вісн.: Зб.*

наук.-техн. пр. – Львів: УкрДЛТУ, 2006. – Вип. 16.1. – С. 134–139. 8. Рабинович М.И. Об асимптотическом методе в теории нелинейных колебаний распределенных систем // ДАН СССР. – 1971. – 191, № 6. – С. 1253–1256. 9. Митропольский Ю.А. О построении асимптотического решения возмущенного уравнения Клейна – Гордона // Укр. мат. журн. – 1995. – 47, № 9. – С. 209–216.

УДК 622.242:534-16

С.В. Харченко, Р.А. Ковальчук

Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра опору матеріалів

ПІДВИЩЕННЯ НАВАНТАЖУВАЛЬНОЇ ЗДАТНОСТІ ФЛАНЦЕВОГО З’ЄДНАННЯ ЗА РАХУНОК ЗАСТОСУВАННЯ ДВОХ ФАСОННИХ КІЛЕЦЬ

© Харченко С.В., Ковальчук Р.А., 2007

Досліджується можливість підвищення навантажувальної здатності фланцевого з’єднання за рахунок застосування двох фасонних кілець. Розрахунок здійснюють методом скінченних елементів з урахуванням сил затяжки болтів, сил ваги елементів конструкції, а також сил технологічного характеру фланцевого з’єднання.

Possibility of increase of loading ability of flange connection is explored due to application of two shaped rings. A calculation is conducted by the method of eventual elements taking into account forces of tightening of screw-bolts, forces of weight of elements of construction, and also strengths of technological fortitude of flange connection.

Аналіз відомих досліджень та постановка проблеми. Широке застосування фланцевих з’єднань в техніці, зокрема, у конструкціях, що працюють під високим тиском, спричиняє необхідність забезпечення надійності їх експлуатації. Здебільшого елементи фланцевих з’єднань виготовляють із великими коефіцієнтами запасу міцності. Це пояснюється тим, що розрахунки на міцність деталей такого типу виконуються наближеними інженерними методами і не забезпечують належної точності розрахунку [2]. Внаслідок на виготовлення фланцевого з’єднання затрачається надмірна кількість матеріалу, конструкція стає значно дорожчою, масивнішою і незручною в експлуатації. Досягнути необхідної точності розрахунку на міцність цих деталей дозволяють сучасні комп’ютерні системи проектування елементів машин і інженерних конструкцій, в основу яких покладено застосування методу скінченних елементів [1]. За рахунок підвищення точності розрахунку на міцність можна зменшувати коефіцієнти запасу, які не завжди задають обґрунтовано. Особливе значення має застосування уточнених методів розрахунку для оцінки міцності конструкцій, які значною мірою вичерпали свій ресурс [4, 5, 7]. Детальний аналіз напружено-деформованого стану конструкції дає можливість встановити реальний ступінь її зношення і визначити придатність до подальшої експлуатації.

У фланцевих з’єднаннях оболонкових елементів технологічного обладнання, що працює в умовах високого або надвисокого тиску, для герметизації робочого середовища використовуються фасонні кільця. Як показують проведені дослідження, наявність одного фасонного кільця у з’єднанні призводить до значного деформування фланця силами попередньої затяжки болтів, внаслідок чого істотно збільшуються еквівалентні напруження в місці переходу від фланця до оболонкової частини деталі. Розрахунок напружено-деформованого стану фланцевого з’єднання методом скінченних елементів на прикладі спеціальних муфт колонних головок газових свердловин