Кластерна політика як метод активізації інноваційних процесів в регіонах. В зб.: Науково-інноваційна політика в регіонах Бєларусі: Матеріали республіканської науково-практичної конференції (Гродно, 19-20 жовтня 2005 р.). – Мн.: ДУ «БелІСА», 2005. – 100 с. 19. Мигранян А.А. Теоретические аспекты формирования конкурентоспособных кластеров в странах с переходной экономикой // Вестник КРСУ. – 2002. - №3. – Интернет-ресурс: –http:// www.krsu.edu.kg/ vestnikN3/ a15.html. 20. Пономаренко В.С., Кривцов А.С. Методика выбора стратегии социально-экономического развития регионов страны // Бизнес Информ. – 2004. – №3–4. – С.47–57. 21. Харківська область у 2007 році (Статистичний щорічник) / За ред. М.Л. Чмихала. – Х.: Головне управління статистики у Харківській області, 2008. – 588 с. 22. Закон України «Про іноземні інвестиції» // Відомості Верховної Ради України. – 1992. – №26. – С.819–832. 23. Закон України «Про режим іноземного інвестування» // Відомості Верховної Ради України. – 1996. – №19. – С.229–236. 24. Финансовые инструменты социально-экономического развития государства и регионов. Под ред. к.э.н., проф. А.Д. Данилова: Монография. – К.: Компьютерпресс, 2009. – 288 с.

УДК 330.43+336.764.2

Н.Л. Іващук
Національний університет “Львівська політехніка”
кафедра менеджменту і міжнародного підприємництва

АЛГОРИТМ ОБЧИСЛЕННЯ ЦІНИ НЕСТАНДАРТНОГО ОПЦІОНУ ЗІ СТОХАСТИЧНИМ ДОХОДОМ БАЗОВОГО АКТИВУ

Побудовано алгоритм обчислення цін опціонів для випадку стохастичної стрибкоподібної ставки доходу базового активу. На основі побудованого алгоритму розроблено економіко-математичні моделі оцінювання бар’єрних опціонів типу купівлі з верхнім і нижнім бар’єрами входу та обчислено ціни таких опціонів. У роботі також досліджено вплив деяких параметрів на формування цін бар’єрних опціонів.

Ключові слова: функція виплати, опціон, опціонна премія, бар’єр входу вверху і внизу.

In article the algorithm of the option price calculation for a case of the stochastic jump rate of the base asset income is constructed. On the basis of the constructed algorithm economic-mathematical models of the barrier call option pricing with the up and down barrier are developed and calculations of such option prices are carried out. In work influence of some parameters on formation of the barrier option prices also is investigated.

Key words: payoff, option, option premium, barrier-in-up and barrier-in-down.

Постановка проблеми

У класичній моделі Блека-Шоулса, яка є фундаментом більшості моделей ціноутворення опціонів, зокрема нестандартних, зроблено деякі припущення, зокрема, припускається, що дохідність базового активу є фіксованою величиною. Насправді в реальних економічних умовах дохідність базового активу змінюється у часі, більше того, такі зміни є випадковими і раптовими. Тому з метою наближення моделей ціноутворення нестандартних опціонів до реальних ринкових умов припускаємо, що дохідність є випадковою розривною функцією надходжень, яка описується стохастичним процесом Пуассона.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Проблематикою бар'єрних опціонів цікавилися багато учених. Зокрема Е.Рейнер і М.Рубінштейн [1] досліджували бар'єрні опціони з розривним нижнім бар'єром; П.Бойл і С.Лау [2] аналізували бар'єрні опціони, зокрема випуклі догори бар'єри, у межах біноміальної моделі; Р.Гейнен і Г.Кат у [3] досліджували особливості опціонів зі схрещеними бар'єрами, а в [4] – часткові бар'єрні опціони; Д.Річ [5] описав ряд математичних методів оцінювання стандартних бар'єрних опціонів; Е.Дерман, Л.Кані, Д.Ергенер та І.Бардан [6] запропонували числові методи для обчислення цін опціонів з бар'єрами, а П.Річкен [7] досліджував особливості оцінювання цих деривативів; Т.Чеук і Т.Ворст [8] досліджували особливості оцінювання комплексних бар'єрних опціонів; Р.Гейнен і Г.Кат [9] проаналізували дискретні часткові бар'єрні опціони з рухомим бар'єром; С.Гуї [10] запропонував метод оцінювання залежних від часу бар'єрних опціонів; Ґ.Робертс, С.Шортланд [11] запропо-нували алгоритм оцінювання бар'єрних опціонів у моделях із залежними від часу коефіцієнтами. Однак більшість моделей, які базувалися на моделі оцінювання Блека-Шоулса, передбачали фіксований характер дохідності базового активу.

Постановка цілей

Головним завданням цієї роботи є розробка алгоритму обчислення цін опціонів, на основі якого можна створювати моделі оцінювання нестандартних опціонів. Окрім того, показати на прикладі бар'єрних опціонів спосіб використання розробленого алгоритму для визначення цін опціонів, а також дослідити вплив різних параметрів на їх формування.

Виклад основного матеріалу

Нехай далі задовольняються всі припущення моделі Блека–Шоулса за винятком того, що дохід базового активу є фіксованою величиною, а ціна базового активу S_t в часі описується стохастичним рухом Броуна. Замінимо ці припущення значно слабшими. А саме,

припускаємо, що ставка доходу базового активу має вигляд $r-\lambda\zeta$, *де* $\zeta = EU$, *а* $\left(U_j\right)_{j\in\mathbb{N}} \subset (-1,+\infty)$ *є послідовністю стрибків незалежно і випадково розподілених за законом Пуассона* $\left(N_t\right)_{t\in[0,T]}$ *з інтенсивністю* $\lambda > 0$ *та* $\ln\left(1+U\right) \sim \mathbb{N}\left(m,\delta^2\right)$.

Крім того

припускаємо, що ціна базового активу $\left(S_t\right)_{t\in[0,T]}$ *задовольняє модифікованому стохастичному диференціальному рівнянню типу Блека-Шоулса із заданою початковою умовою:*

$$dS_\tau = S_\tau\left(r-\lambda\zeta\right)d\tau + \sigma S_\tau dW_\tau + S_\tau d\left(\sum_{j=1}^{N_\tau} U_j\right), \qquad S_\tau|_{\tau=0} = S_T, \tag{1}$$

де r – фіксована відсоткова ставка без ризику; λ – середня кількість надходжень доходу на одиницю часу; σ – стандартне відхилення ціни базового активу; $\left(W_t\right)_{t\in[0,T]}$ – стандартний процес Гаусса–Вінера.

Також припускаємо, що процес Пуассона $\left(N_t\right)_{t\in[0,T]}$ і процес Гаусса–Вінера $W = \left(W_t\right)_{t\in[0,T]}$ є незалежними. Отже, при згаданих припущеннях ми задовольняємо всі передумови моделі Блека–Шоулса за винятком того, що дохід базового активу є фіксованою величиною.

Як наслідок, спотова ціна S_τ є складеним процесом Пуассона щодо випадкової змінної U, оскільки єдиний розв'язок цієї задачі має вигляд

$$S_\tau = S_T \exp\left[\left(r-\lambda\zeta-\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \sigma W_\tau\right]\left(\prod_{j=1}^{N_\tau}\left(1+U_j\right)\right) =$$

$$S_T \exp\left[\left(r-\lambda\zeta-\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \sigma W_\tau + \sum_{j=1}^{N_\tau}\ln\left(1+U_j\right)\right].$$

Останній факт випливає з теореми Itô [12] про існування і єдиність розв'язку початкової задачі для стохастичного диференціального рівняння.

З метою розробки алгоритму оцінювання європейських нестандартних опціонів із стрибкоподібною випадковою функцією доходу базового активу поряд із рівнянням (1) розглядатимемо також розв'язок допоміжної початкової задачі

$$S_\tau^W(\sigma,r)=S_T\exp\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau+\sigma W_\tau\right)$$

для класичного рівняння Блека-Шоулса (1) за умови відсутності стрибкоподібної складової

$$dS_\tau^W(\sigma,r)=rS_\tau^W(\sigma,r)d\tau+\sigma S_\tau^W(\sigma,r)dW_\tau,\quad S_\tau^W(\sigma,r)|_{\tau=0}=S_T. \qquad (2)$$

Отже, досліджуємо процес ціноутворення європейського опціону, інвестиційний портфель якого складається з двох активів:

а) ризикового, *у якому стохастичний процес ціноутворення базового активу S_τ описується модифікованим стохастичним рівнянням (1) із заданими незалежними процесами Гаусса–Вінера W_τ, Пуассона N_τ, U_j та початковою умовою;*

б) безризикового, *у якому процес ціноутворення безризикового активу (ціна виконання опціону) K_τ залежить від фіксованої відсоткової ставки без ризику r так: $K_\tau=K_T\exp(-r\tau)$, а отже, є процесом детерміністичним.*

З припущення, що на ринку відсутній арбітраж, очевидне існування ймовірнісної міри $\mathbb{P}$, стосовно якої процес спотових цін S_τ буде F_t-мартингалом, де F_t – мінімальна фільтрація, породжена заданими процесами W_t та N_t. Цей факт можна перевірити безпосередніми обчисленнями. З цією метою здійснимо заміни: $dW_\tau^*=dW+\gamma\sigma dt$ – міри стохастичної похідної Itô по процесу Гаусса–Вінера та параметра інтенсивності в процесі Пуассона, а саме, нехай N_τ^* є новим процесом Пуассона з інтенсивністю $\lambda^*=\lambda(1-\gamma\zeta)$, де γ – деякий невідомий параметр. Далі припустимо, що S_τ є розв'язком початкової задачі для стохастичного рівняння із доходом базового активу $\mu^*=r-\gamma\sigma^2$ вигляду

$$dS_\tau^*=\mu^*S_\tau^*d\tau+\sigma S_\tau^*dW_\tau^*+S_\tau^*d\left(\sum_{j=1}^{N_\tau^*}U_j\right),\qquad S_\tau|_{\tau=0}=S_T.$$

Тоді із вже згадуваної теореми Itô очевидно, що єдиний розв'язок має вигляд

$$S_\tau^*=S_T\exp\left[\left(\mu^*-\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau+\sigma W_\tau^*\right]\left(\prod_{j=1}^{N_\tau}(1+U_j)\right).$$

Справедливе таке співвідношення:

$$E\left(S_\tau^*\,|\,\mathsf{F}_s\right)=S_\tau^*E\left(\exp\left[\left(\mu^*-\frac{\sigma^2}{2}\right)(\tau-s)+\sigma\left(W_\tau^*-W_s^*\right)\right]\prod_{j=N_s^*+1}^{N_\tau^*}(1+U_j)\,|\,\mathsf{F}_s\right)$$

$$=S_s^*E\left(\exp\left[\left(\mu^*-\frac{\sigma^2}{2}\right)(\tau-s)+\sigma\left(W_\tau^*-W_s^*\right)\right]\prod_{j=N_s^*+1}^{N_\tau^*-N_s^*}\left(1+U_{N_s+j}\right)\right)$$

$$=S_s^*\exp\left[\mu^*(\tau-s)\right]E\left(\prod_{j=N_s^*+1}^{N_\tau^*}(1+U_j)\right)=S_s^*\exp\left[\mu^*(\tau-s)\right]\exp\left[\lambda^*(\tau-s)EU\right]$$

$$=S_s^*\exp\left[\left(\mu^*+\lambda^*\zeta\right)(\tau-s)\right].$$

Звідси доходимо висновку, що S_τ^* є $\mathcal{F}_t$ -мартингалом тоді і тільки тоді, коли $\mu^* + \lambda^*\zeta = 0$ або $\gamma = \dfrac{r+\lambda}{\lambda\zeta + \sigma^2}$. Отже, шляхом вибору параметра γ (такий параметр характеризує ризик інвестиційного портфеля) завжди можемо прийти до модифікованого рівняння Блека-Шоулса вигляду (1), для якого розв'язок початкової задачі є $\mathcal{F}_t$ -мартингалом. Більше того, з умови $\ln(1+U) \sim \mathbb{N}(m, \delta^2)$ очевидно, що $\gamma = \ln E(1+U) = \dfrac{\delta^2}{2} + m$. Тоді ціна євро-пейського опціону матиме вигляд умовного математичного сподівання

$$V_\tau(S_T, K_T) = E\left[H(S_T, K_T) \mid \mathcal{F}_t\right], \qquad \tau = T - t, \tag{3}$$

де $H(S_T, K_T)$ є функцією виплати опціону, яка характеризує тип опціону, причому ціна у кожний момент часу τ залежить також від параметрів $m, \delta, \sigma, \lambda, r$ з рівняння (1). Нарешті, оскільки $S_T = S_\tau \exp\left[-\left(r - \lambda\zeta - \dfrac{\sigma^2}{2}\right)\tau - \sigma W_\tau - \sum_{j=1}^{N_\tau} \ln(1+U_j)\right]$ є процесом Пуассона, то з формули (3) негайно зрозуміло, що V_τ є складеним процесом Пуассона щодо випадкової змінної U. Це своєю чергою означає, що для обчислення математичного сподівання процесу V_τ, як функції випадкової змінної U (далі його позначаємо через $\pi_{\lambda,Y}(V_\tau)$), можна застосовувати відому формулу для складених процесів Пуассона, у яку потрібно підставити вираз $V_\tau = E\left[H(S_T, K_T) \mid \mathcal{F}_t\right]$. Згідно з цією формулою, користуючись незалежністю процесів S_τ та N_τ і тим, що оператори математичного сподівання за незалежними процесами за відомою теоремою Фубіні можна переставляти місцями, а також тим, що за умови відсутності на ринку арбітражу процес цін S_τ є мартингалом, отримуємо

$$\pi_{\lambda,Y}(V_\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^n}{n!} E\{V_\tau \mid N_\tau = n\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^n}{n!} E\left\{E\left\{H(S_T, K_T) \mid \mathcal{F}_t\right\} \mid N_\tau = n\right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^n}{n!} E\left\{E\left\{H\left(S_T \exp\left[\left(r - \lambda\zeta - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \sigma W_\tau\right] Y_n, K_T\right) \mid \mathcal{F}_t\right\} \mid N_\tau = n\right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^n}{n!} E_n\left\{E\left[H\left(S_T \exp\left[\left(r - \lambda\zeta - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \sigma W_\tau\right] Y_n, K_T\right) \middle| \mathcal{F}_t\right]\right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^n}{n!} E_n\left\{E\left[H\left(S_T \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \sigma W_\tau\right] Y_n \exp(-\lambda\zeta), K_T\right) \middle| \mathcal{F}_t\right]\right\},$$

де $Y_n = \prod_{j=1}^{n}(1+U_j) = \exp\left(\sum_{j=1}^{n} \ln(1+U_j)\right)$ – випадкова змінна, яка має розподіл добутку n незалежних та ідентично розподілених випадкових змінних $Y = U + 1$, $Y_0 = 1$, для кожної з яких $\zeta = E(Y-1)$, а E_n – оператор математичного сподівання від Y_n.

Вираз, який означає ціну європейського опціону за ціни базового активу вигляду $S_\tau^W \cdot Y_n \exp(-\lambda\zeta)$ та функції виплати $H(S_T, K_T)$, позначимо через

$$V_\tau\left(S_\tau^W \cdot Y_n \exp(-\lambda\zeta), K_T\right) = E\left[H\left(S_\tau^W \cdot Y_n \exp(-\lambda\zeta), K_T\right) \middle| \mathcal{F}_t\right].$$

У результаті отримуємо формулу для обчислення ціни європейського опціону з ціною базового активу вигляду, який описується задачею (1), з функцією виплати $H\left(S_T, K_T\right)$, у такому вигляді:

$$\pi_{\lambda,Y}\left(V_\tau\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda\tau}\left(\lambda\tau\right)^n}{n!}E_n\left[V_\tau\left(S_\tau^W\cdot Y_n\exp\left(-\lambda\zeta\right),K_T\right)\middle|\mathsf{F}_t\right]. \qquad (4)$$

З метою обчислення оператора математичного сподівання E_n від випадкової змінної $Y_n=\prod_{j=1}^{n}\left(1+U_j\right)$ скористаємось заданою імовірнісною характеристикою $\ln\left(1+U\right)\sim\mathbb{N}\left(m,\delta^2\right)$ функції стрибків. Далі вираз, який не залежить від процесу Гаусса-Вінера W_τ і характеризує ризик інвестиції в опціон викликаний випадковими стрибкоподібними змінами доходу базового активу , позначимо:

$$S_n\left(\tau,\lambda,m,\delta\right)=\exp\left(n\left(m+\frac{\delta^2}{2}\right)-\lambda\tau\left(\exp\left(m+\frac{\delta^2}{2}\right)+1\right)\right)=\exp\left(n\gamma-\lambda\tau\left(\exp\gamma+1\right)\right) \qquad (5)$$

і розглянемо розв'язок допоміжної початкової задачі (2) для класичного рівняння Блека-Шоулса за відсутності стрибкоподібної складової

$$S_\tau^W\left(\sigma_n,r\right)=S_T\exp\left(\left(r-\frac{\sigma_n^2}{2}\right)\tau+\sigma_n W_\tau\right), \qquad \sigma_n^2=\sigma^2+\frac{n\delta^2}{\tau}$$

із заміною у ньому стандартного відхилення доходу базового активу σ без стрибків на величину σ_n . Тоді формула (4) набуває вигляду

$$\pi_{\lambda,Y}\left(V_\tau\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda\tau}\left(\lambda\tau\right)^n}{n!}E_n\left\{E\left[H\left(S_T\exp\left[\left(r-\lambda\zeta-\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau+\sigma W_\tau+\overbrace{\sum_{j=1}^{n}\ln\left(1+U_j\right)}^{\mathbb{N}\left(mn,n\delta^2\right)}\right],K_T\right)\middle|\mathsf{F}_t\right]\right\}=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda\tau}\left(\lambda\tau\right)^n}{n!}E\left[H\left(S_T\exp\left(n\left(m+\frac{\delta^2}{2}\right)-\lambda\tau\left(\exp\left(m+\frac{\delta^2}{2}\right)+1\right)\right)\exp\left(\left(r-\frac{\sigma_n^2}{2}\right)\tau+\sigma_n W_\tau\right),K_T\right)\middle|\mathsf{F}_t\right].$$

З того, що

$$S_T\exp\left(n\left(m+\frac{\delta^2}{2}\right)-\lambda\tau\left(\exp\left(m+\frac{\delta^2}{2}\right)+1\right)\right)\exp\left(\left(r-\frac{\sigma_n^2}{2}\right)\tau+\sigma_n W_\tau\right)=S_n\left(\tau,\lambda,m,\delta\right)\cdot S_\tau^W\left(\sigma_n,r\right),$$

отримуємо

$$\pi_{\lambda,Y}\left(V_\tau\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda\tau}\left(\lambda\tau\right)^n}{n!}E\left[H\left(S_n\left(\tau,\lambda,m,\delta\right)\cdot S_\tau^W\left(\sigma_n,r\right),K_T\right)\middle|\mathsf{F}_t\right],$$

де $V_\tau\left(S_n\left(\tau,\lambda,m,\delta\right)\cdot S_\tau^W\left(\sigma_n,r\right),K_T\right)=E\left[H\left(S_n\left(\tau,\lambda,m,\delta\right)\cdot S_\tau^W\left(\sigma_n,r\right),K_T\right)\middle|\mathsf{F}_t\right]$ є ціною європейського опціону з ціною базового активу вигляду $S_n\left(\tau,\lambda,m,\delta\right)\cdot S_\tau^W\left(\sigma_n,r\right)$ і функцією виплати $H\left(S_T,K_T\right)$. З умови відсутності на ринку арбітражу зрозуміло, що процес вартості такого портфеля є мартингалом за процесом W_τ , а отже,

$$V_\tau\left(S_n(\tau,\lambda,m,\delta)\cdot S_\tau^W(\sigma_n,r),K_T\right)=E\left[H\left(S_n(\tau,\lambda,m,\delta)\cdot S_\tau^W(\sigma_n,r),K_T\right)\middle|\mathcal{F}_t\right]$$
$$=E_W\left[H(S_T,K_T)\,|\,\{S_t=S_T\}\right]=E_W\left[H\left(S_n(\tau,\lambda,m,\delta)\cdot S_\tau^W(\sigma_n,r),K_T\right)\right],$$

де оператор математичного сподівання E_W береться тільки по процесу W_τ. Підставляючи цей вираз у формулу для $\chi_{\lambda,Y}(V_\tau)$, отримуємо нове зображення формули для оцінювання європейських опціонів із стрибкоподібною ставкою доходу $\lambda\zeta$ у такому вигляді:

$$\chi_{\lambda,Y}(V_\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^n}{n!}E_W\left[H\left(\overbrace{S_n(\tau,\lambda,m,\delta)\cdot S_\tau^W(\sigma_n,r)},K_T\right)\right], \tag{6}$$

у якій коефіцієнти $E_W\left[H\left(S_n(\tau,\lambda,m,\delta)\cdot S_\tau^W(\sigma_n,r),K_T\right)\right]$ явно виражають ціни опціонів, що описуються допоміжною задачею (2) з функцією виплати $H(S_n,K_T)$.

Остання формула надалі використовуватиметься для обчислення цін нестандартних європейських опціонів. Формула (6) є еквівалентна до (4), однак вона зручніша для обчислень, оскільки не містить оператора математичного сподівання E_n по випадковій змінній Y_n, а у явній формі виражається через відомі параметри, за умови, що обчислено вигляд ціни стандартного європейського опціону (2) для доходу базового активу без стрибків. Ця формула дає також **алгоритм обчислення** $\chi_{\lambda,Y}(V_\tau)$: *необхідно для кожного натурального числа n знайти ціну опціонів $E_W\left[H\left(S_n(\tau,\lambda,m,\delta)\cdot S_\tau^W(\sigma_n,r),K_T\right)\right]$, які описуються допоміжною задачею (2) з функцією виплати $H(S_n,K_T)$ і підставити їх у ряд (6).*

Зауважимо, що для часткового випадку стандартних європейських опціонів Р.Мертон [13] знайшов формулу типу (6), користуючись відомими формулами Блека-Шоулса [14]. Його формули сьогодні широко відомі у літературі і називаються формулами Мертона для стрибкоподібних стандартних опціонів. Далі обчислимо коефіцієнти $E_W\left[H\left(S_n(\tau,\lambda,m,\delta)\cdot S_\tau^W(\sigma_n,r),K_T\right)\right]$ і на їх підставі виведемо формули для цін деяких нестандартних опціонів, скорочено позначаємо $S_T=S$ та $K_T=K$.

Застосуємо розроблений алгоритм для визначення цін деяких бар'єрних опціонів. Розглянемо спочатку ***опціон купівлі з бар'єром входу внизу***. З обчислень, наведених у [7, с. 20] на основі формули (3), очевидно, що ціну такого опціону з фіксованою ставкою доходу базового активу $g=const$ можна обчислити за формулою

$$c_{di}(S,K,\tau,r,\sigma,g)=$$
$$\left(\frac{H}{S}\right)^{2v(g,\sigma)/\sigma^2}\left(C_{bs}\left[\frac{H^2}{S},\max[H,K],g,\sigma\right]+\left[\max(H,K)-K\right]e^{-r\tau}\right)N\left\{d_{bs}\left[\frac{H^2}{S},\max(H,K),g,\sigma\right]\right\}$$
$$+\left\{P_{bs}(S,K,g,\sigma)-P_{bs}(S,H,g,\sigma)+(H-K)e^{-r\tau}N\left[-d_{bs}(S,H,g,\sigma)\right]\right\}B_{H>K}, \tag{7}$$
$$C_{bs}(S,K,g,\sigma)=Se^{-g\tau}N\left[d_{1bs}(S,K,g,\sigma)\right]-Ke^{-r\tau}N\left[d_{bs}(S,K,g,\sigma)\right],\quad v(g,\sigma)=r-g-\sigma^2/2,$$
$$P_{bs}(S,K,g,\sigma)=-Se^{-g\tau}N\left[-d_{1bs}(S,K,g,\sigma)\right]+Ke^{-r\tau}N\left[-d_{bs}(S,K,g,\sigma)\right],$$
$$d_{bs}(S,K,g,\sigma)=\frac{\ln(S/K)+v(g)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}},\quad d_{1bs}(S,K,g,\sigma)=d_{bs}(S,K,g,\sigma)+\sigma\sqrt{\tau},$$

де $S = S_T$ – ціна спот (значення) базового активу у початковий момент часу; $N(.)$ – функція стандартизованого нормального розподілу випадкової змінної; B – характеристична функція (Хевісайда), яка дорівнює $B_{H>K} = 1$ і $B_{H<K} = 0$.

Дослідимо тепер вплив стрибкоподібної функції доходу базового активу на формування ціни опціону купівлі з бар'єром входу внизу. Застосовуючи формулу (4) для складеного процесу Пуассона, при стрибкоподібній дохідності базового активу вигляду $r - \lambda\zeta$, підставимо вираз (7) у формулу (4) для $c_{di}(S,K,\tau,r,\sigma,g)$ при $g = 0$ із заміною S на $SY_n e^{-\lambda\zeta\tau}$, де $Y_n = \prod_{j=1}^{n}(1+U_j)$. Тоді отримаємо перше зображення $\pi_{\lambda,Y}(c_{di})$ у вигляді степеневого ряду з коефіцієнтами $E_n\left[c_{di}\left(SY_n e^{-\lambda\zeta\tau},K,\tau,r,\sigma,0\right)\right]$.

Далі, користуючись **алгоритмом,** знаходимо друге зображення $\pi_{\lambda,Y}(c_{di})$ у вигляді степеневого ряду (6), в якому у виразі $c_{di}(S,K,\tau,r,\sigma,0)$ потрібно замінити S на $S_n = \exp\left(n\left(m+\delta^2/2\right)-\lambda\tau\left(\exp\left(m+\delta^2/2\right)+1\right)\right)$, а замість σ прийняти $\sigma_n = \sqrt{\sigma^2 + n\delta^2/\tau}$. У результаті отримуємо такі *формули оцінювання опціону купівлі з бар'єром входу внизу для випадку стрибкоподібного доходу базового активу*:

$$
\begin{aligned}
&\pi_{\lambda,Y}(c_{di}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^n}{n!}E_n\left[c_{di}\left(SY_n e^{-\lambda\zeta\tau},K,\tau,r,\sigma,0\right)\right] = \\
&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^n}{n!}\left[\left(\frac{H}{S_n}\right)^{2v(0,\sigma_n)/\sigma_n^2}\left(C_{bs}\left[\frac{H^2}{S_n},\max[H,K],0,\sigma_n\right]+\left[\max(H,K)-K\right]e^{-r\tau}\right)\times\right. \\
&\times N\left\{d_{bs}\left[\frac{H^2}{S_n},\max(H,K),0,\sigma_n\right]\right\}+ \\
&\left.+\left\{P_{bs}(S_n,K,0,\sigma_n)-P_{bs}(S_n,H,0,\sigma_n)+(H-K)e^{-r\tau}N\left[-d_{bs}(S_n,H,0,\sigma_n)\right]\right\}B_{H>K}\right].
\end{aligned} \tag{8}
$$

Дослідимо також ***опціони купівлі з бар'єром входу вверху***. За фіксованого доходу базового активу $g = const$ формула ціни (3) у [7, с. 21] перетворена до такого вигляду:

$$
\begin{aligned}
&c_{ui}(S,K,\tau,r,\sigma,g) = \\
&\left(\frac{H}{S}\right)^{2v(g,\sigma)/\sigma^2}\left\{P_{bs}\left[\frac{H^2}{S},K,g,\sigma\right]-P_{bs}\left[\frac{H^2}{S},H,g,\sigma\right]+(H-K)e^{-r\tau}N\left[-d_{bs}(H,S,g,\sigma)\right]\right\}B_{H>K} \\
&+C_{bs}\left(S,\max[H,K],g,\sigma\right)+\left[\max(H,K)-K\right]e^{-r\tau}N\left\{d_{bs}\left[S,\max(H,K),g,\sigma\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Тепер для цього виду опціону дослідимо вплив стрибкоподібної функції доходу базового активу. Застосуємо формулу (4) для складеного процесу Пуассона за стрибкоподібної дохідності вигляду $r - \lambda\zeta$. З цією метою підставимо (9) у (4) для $c_{ui}(S,K,\tau,r,\sigma,g)$ при $g = 0$, замінюючи одночасно S на $SY_n e^{-\lambda\zeta\tau}$, де $Y_n = \prod_{j=1}^{n}(1+U_j)$. Тоді отримаємо перше зображення $\pi_{\lambda,Y}(c_{ui})$ у вигляді степеневого ряду з коефіцієнтами $E_n\left[c_{ui}\left(SY_n e^{-\lambda\zeta\tau},K,\tau,r,\sigma,0\right)\right]$. Далі, користуючись **алгоритмом,** знаходимо друге зображення $\pi_{\lambda,Y}(c_{ui})$ у вигляді ряду (6), в якому у виразі

$c_{ui}\left(S,K,\tau,r,\sigma,0\right)$ потрібно замінити S на $S_n=\exp\left(n\left(m+\delta^2/2\right)-\lambda\tau\left(\exp\left(m+\delta^2/2\right)+1\right)\right)$, а σ – на $\sigma_n=\sqrt{\sigma^2+n\delta^2/\tau}$. В результаті отримуємо *формули оцінювання опціону купівлі з бар'єром входу зверху для стрибкоподібного доходу базового активу*:

$$\pi_{\lambda,Y}\left(c_{ui}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda\tau}\left(\lambda\tau\right)^n}{n!}E_n\left[c_{ui}\left(SY_ne^{-\lambda\zeta\tau},K,\tau,r,\sigma,0\right)\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda\tau}\left(\lambda\tau\right)^n}{n!}\left[\left(\frac{H}{S_n}\right)^{2\nu(0,\sigma_n)/\sigma_n^2}\times\right.$$

$$\times\left\{P_{bs}\left[\frac{H^2}{S_n},K,0,\sigma_n\right]-P_{bs}\left[\frac{H^2}{S_n},H,0,\sigma_n\right]+\left(H-K\right)e^{-r\tau}N\left[-d_{bs}\left(H,S_n,0,\sigma_n\right)\right]\right\}B_{H>K}+$$

$$\left.+C_{bs}\left(S_n,\max\left[H,K\right],0,\sigma_n\right)+\left[\max\left(H,K\right)-K\right]e^{-r\tau}N\left\{d_{bs}\left[S,\max\left(H,K\right),0,\sigma_n\right]\right\}\right]. \quad (10)$$

Тепер, використовуючи розроблені нами моделі, за допомогою програмного забезпечення Mathematica, обчислимо ціни деяких бар'єрних опціонів. Розглянемо спочатку опціони ***купівлі*** із **бар'єром входу**, розміщеним внизу. Ціна базового активу 100$, бар'єр встановлено на рівні 95$, змінність базового активу 20%, відсоткова ставка без ризику 8%, дохідність базового активу 3% зі стрибками, інтенсивність стрибків $\lambda=1$, середньоквадратичне відхилення змінної U дорівнює $\delta=0.7071$, а її математичне сподівання $\zeta=0.025$. Проаналізуємо як змінюватиметься ціна такого опціону залежно від зміни ціни виконання та від терміну дії опціону. Отримані на підставі формули (8) результати наведемо у вигляді табл. 1. Як бачимо, зростання ціни виконання призводить до здешевлення опціонів, тоді як збільшення терміну їхнього існування сприяє подорожчанню цих деривативів.

Таблиця 1

Залежність ціни опціону купівлі з нижнім бар'єром входу від ціни виконання та терміну дії

Ціна виконання/ термін дії	6 місяців	9 місяців	12 місяців	15 місяців	18 місяців
92$	4.86275	6.3560	7.66435	8.84774	9.93725
94$	4.05418	5.51734	6.81169	7.98898	9.07702
96$	3.34470	4.76044	6.02939	7.19234	8.27260
98$	**2.73387**	4.08489	5.31711	6.45753	7.52371

Дослідимо аналогічний опціон з бар'єром входу, розміщеним угорі на рівні 105$, при ціні виконання від 102$ до 108$. Ціну опціону залежно від змін ціни виконання та терміну дії опціону, отриману за допомогою формули (10), представляє табл. 2. Отримані результати показали, що у випадку опціонів з верхнім бар'єром входу їхня реакція на зміни ціни виконання та терміну дії опціону буде аналогічною до опціонів з нижнім бар'єром.

Таблиця 2

Залежність ціни опціону купівлі з верхнім бар'єром входу від ціни виконання та терміну дії

Ціна виконання/ термін дії	6 місяців	9 місяців	12 місяців	15 місяців	18 місяців
102$	5.79268	7.57803	9.14302	10.5589	11.8626
104$	4.91560	6.66955	8.22000	9.62960	10.9320
106$	4.13622	5.84139	7.36596	8.76119	10.0560
108$	3.45415	5.09319	6.58062	7.95335	9.23437

Залежність ціни опціону купівлі від рівня бар'єра (від 95$ до 105$), тобто коли бар'єр попадає нижче від ціни базового активу, дорівнює його ціні та перевищує його ціну, показано на рис. 1.

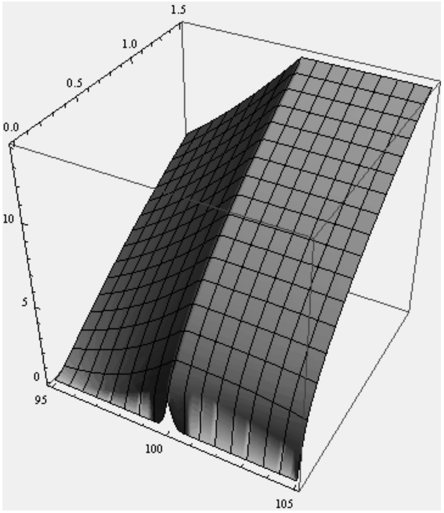

Рис. 1. Залежність ціни опціону купівлі з бар'єром входу від рівня бар'єра

Проаналізуємо як впливає ціна базового активу та термін дії опціону на його ціну при ціні виконання 98$, змінність ціни базового активу 20%, відсоткова ставка без ризику 8%, дохідність базового активу 3% зі стрибками, інтенсивність стрибків $\lambda = 1$, середньоквадратичне відхилення змінної U дорівнює $\delta = 0.7071$, а її математичне сподівання $\zeta = 0.025$. Бар'єр встановлено на рівні 95$. Отримані за допомогою формули (8) результати наведено у табл. 3. Як очевидно з результатів, зростання ціни базового активу сприяє здешевленню опціону, що пояснюється віддаленням ціни опціону від бар'єра та зниженням ймовірності виконання такого деривативу.

Таблиця 3

Залежність ціни опціону купівлі з нижнім бар'єром входу від ціни активу та терміну дії

Термін дії/ ціна базового активу	80$	90$	100$	110$	120$
0.2 року	19.8414	4.60560	0.34997	0.00703	0.000043
0.4 року	21.4648	7.00416	1.60495	0.25447	0.028989
0.6 року	23.1603	8.82597	2.79065	0.73261	0.162973
0.8 року	24.7723	10.3820	3.87759	1.29435	0.391184
1.0 року	26.2866	11.7717	4.88525	1.88379	0.680921

Тепер встановимо бар'єр на рівні 105$, а тому досліджуємо опціони з верхнім бар'єром, використовуючи формулу (10). Поведінку цін таких опціонів ілюструє табл. 4. Для наведених даних ціна опціону зростатиме внаслідок зростання ціни базового активу, оскільки вона наближається до рівня бар'єра, а тому зростає ймовірність виконання такого деривативу.

Таблиця 4

Залежність ціни опціону купівлі з верхнім бар'єром входу від ціни активу та терміну дії

Термін дії/ ціна базового активу	80$	90$	100$	110$	120$
0.2 року	0.00242	0.34663	4.06117	12.5881	22.4649
0.4 року	0.18441	1.66182	6.27930	14.0505	23.4023
0.6 року	0.63098	2.92318	7.95902	15.4765	24.4482
0.8 року	1.20757	4.08495	9.39273	16.7914	25.5078
1.0 року	1.84217	5.16452	10.6729	18.0076	26.5424

Для обох опціонів (з верхнім і нижнім бар'єром) на рис. 2 показано залежність їх ціни (по вертикалі) від ціни базового активу (від 80$ до 120$) та терміну дії опціону (від 1 дня до 1.5 року).

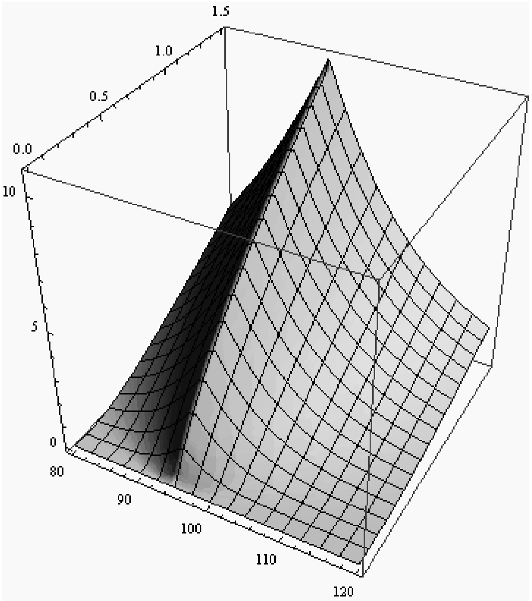

Рис. 2. Залежність ціни опціонів купівлі з верхнім та нижнім бар'єрами входу від ціни базового активу та терміну дії опціону

Порівняння цін опціонів зі стохастичною стрибкоподібною та фіксованою дохідністю базового активу показало, що ціни опціонів зі стохастичним параметром дохідності є значно нижчими від цін опціонів з фіксованим параметром дохідності, що дає змогу інвесторам знизити витрати при операціях на строковому ринку. Окрім того, ціни бар'єрних опціонів загалом є нижчими від цін стандартних опціонів. Отже, виконані дослідження свідчать про те, що опціони, які базуються на стрибкоподібній дохідності є цікавішими інструментами для їхніх покупців, оскільки: по-перше, у разі спадання дохідності вони будуть дешевшими від своїх аналогів з фіксованим параметром дохідності; по-друге, вони реальніше відображають ситуацію на ринку базового активу, що підвищує ліквідність цих деривативів і сприяє довірі інвесторів до них.

Висновки

Під час управління ризиком опціони виконують забезпечувальну функцію страхування, яка дає можливість отримати принаймні часткове відшкодування збитків внаслідок несприятливих для інвестора подій. Завдяки появі таких похідних інструментів ризик став предметом ринкового обігу. Його можна купувати і продавати. Внаслідок розвитку ринку похідних інструментів з'явилися нові види фінансових інституцій, такі, як хеджингові фонди, що на замовлення клієнтів професійно управляють ризиком їхніх портфелів. Натомість спекулятивні операції, єдиною метою котрих є отримання прибутку, виконують на ринку цілком іншу функцію. Завдяки таким операціям підвищується ліквідність як ринку похідних інструментів, так і ринку базових інструментів.

Перспективи подальших досліджень

Майбутні дослідження у сфері економіко-математичного моделювання процесів ціноутворення на ринку опціонів повинні сприяти наближенню моделі оцінювання цих деривативів до реальних ринкових умов. А це означає, що потрібно діяти в напрямку послаблення низки припущень, які характерні для існуючих нині моделей ціноутворення.

1. Reiner E., Rubinstein M. Breaking Down the Barrier // Risk. – 1991. – Vol. 4, № 8. – P. 28-35. 2. Boyle P., Lau S.H. Bumping Up Against the Barrier with the Binomial Method // Journal of Derivatives. –

1994. – Vol.3, № 2. – P. 6-14. 3. Heynen R.C., Kat H.M. Crossing Barriers // Risk. – 1994. –Vol. 4, № 6. – P. 46-51. 4. Heynen R.C., Kat H.M. Partial Barrier Options // Journal of Financial Engineering. – 1994. – Vol. 3, № 4. – P. 253-274. 5. Rich D.R. The Mathematical Foundation of Barrier Options // Advances in Futures and Options Research. – 1994. – Vol. 7. – P. 267-311. 6. Derman E., Kani L., Ergener D., Bardhan I. Enhanced Numerical Methods for Options with Barriers // Financial Analysis Journal. – 1995. – Vol. 51, № 6. – P. 65-74. 7. Ritchken P. On Pricing Barrier Options // Journal of Derivatives. – 1995. – Vol. 3. – P. 19-28. 8. Cheuk T.H.F., Vorst T.C.F. Complex Barrier options // Journal of Derivatives. – 1996. – Vol. 4, № 1. – P. 8-22. 9. Heynen R.C., Kat H.M. Discrete Partial Barrier Options with a Moving Barrier // Journal of Financial Engineering. – 1996. – Vol. 5, № 3. – P. 199-209. 10. Hui C.H. Time-Dependent Barrier Option Values // Journal of Futures Markets. – 1997. – Vol. 17. – P. 667-688. 11. Roberts G.O., Shortland C.F. Pricing Barrier Options with Time-Dependent Coefficient // Mathematical Finance. – 1997. – Vol. 7. – P. 83-93. 12. Cont R., Tankov P. Financial Modeling with Jump Processes. Chapman & Hall / CRC, 2004. – 527 p. 13. Merton R. Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous // Journal of Financial Economics. – 1976. – Vol. 4. – P. 125-144. 14. Black F., Scholes M.J. The Pricing of Options and Corporate Liabilities // Journal of Political Economy. – 1973. – Vol. 3, № 81. – P.637-654.

УДК 330.322.5

А.В. Катаєв, О.В. Юринець
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра менеджменту організацій

ПРОБЛЕМНІ МОМЕНТИ РОЗРОБКИ ТА ВПРОВАДЖЕННЯ ІСТОТНИХ ПРОДУКТОВИХ ІННОВАЦІЙ: ФІНАНСОВИЙ АСПЕКТ

Рзглянуто методику оцінки доцільності розробки продуктових інновацій, яка враховує як інвестиційні видатки на впровадження інновацій, так і "передінвестиційні" витрати на розробку і дослідження інноваційного товару.

Ключові слова: продуктові інновацій, інвестиційна привабливість, управління витратами.

The article deals with the methods evaluating the necessity of the creation of production innovation that take into account both investments of innovation implementation and pre-investment costs for the R&D of the innovated goods.

Keywords: food innovations, investment attractiveness, management charges.

Постановка проблеми

Інноваційна діяльність дедалі більше стає не просто важливим чинником, але й визначальним фактором розвитку виробничо-господарських систем різних рівнів. Ключову роль у підвищенні конкурентоспроможності підприємства, збільшенні частки підприємства на ринку, нарощуванні обсягів продажів і прибутків, та зростання вартості підприємства, є інновації, пов’язані зі створенням нових товарів з істотним перевищенням їхніх характеристик над товарами-аналогами. Однак цей шлях є також найризиковішим та спряженим з численними проблемами.

Чітке усвідомлення таких проблемних моментів, аналіз, оцінка та врахування широкого спектра чинників, які впливають на результативність розробки та впровадження істотних продуктових інновацій, формування методик, які дають змогу під час прийняття рішень