

# ЗМІСТ

Передмова автора .....	6
Передмова .....	7
ТОМ I .....	9
Вступ .....	11
<b>Розділ I. Теорія послідовностей</b> .....	13
<b>§1. Поняття послідовності</b> .....	13
1. Означення послідовності .....	13
2. Монотонні послідовності .....	14
3. Обмежені послідовності .....	15
4. Дії над послідовностями .....	16
Завдання .....	17
<b>§2. Інтуїтивне поняття границі послідовності</b> .....	17
5. Границя монотонної послідовності .....	17
6. Загальне визначення границі послідовності .....	18
7. Окрема ознака збіжності .....	18
8. Дії над збіжними послідовностями .....	19
9. Послідовності, розбіжні до $\pm\infty$ .....	20
10. Теореми про послідовності, розбіжні до $\pm\infty$ .....	20
Завдання .....	21
<b>§3. Строге визначення границі послідовності</b> .....	22
11. Відрізки послідовності .....	22
12. Послідовності, які відрізняються тільки порядком членів послідовності .....	22
13. Поняття наближення .....	23
14. Означення границі .....	24
Завдання .....	27
<b>§4. Теореми про границі послідовностей</b> .....	28
15. Збіжність послідовностей з рівними членами послідовності .....	28
16. Незалежність границі від порядку членів послідовності .....	28
17. Збіжність підпослідовностей .....	29
18. Границя послідовності з невід'ємними членами .....	30
19. Границя суми і різниці послідовностей .....	30
20. Границя добутку послідовностей .....	32
21. Границя добутку послідовності на число .....	33
22. Границя частки двох послідовностей .....	33
Завдання .....	35
<b>§5. Критерії (ознаки) збіжності</b> .....	35
23. Збіжність монотонних обмежених послідовностей .....	35
24. Умова Коші .....	36
25. Обмеженість збіжних послідовностей .....	37
26. Збіжність послідовності, яка розміщена між двома іншими .....	37
Завдання .....	39

<b>§6. Обчислення деяких границь. Число <math>e</math></b> .....	40
27. Обчислення деяких границь .....	40
28. Число $e = 2,71828\dots$ .....	42
<b>Розділ II. Функції однієї змінної</b> .....	48
1. Приклади функцій. Поняття функції .....	48
2. Означення .....	48
3. Точне визначення поняття функції .....	49
4. Різні способи задання функцій .....	49
5. Інші способи задання функцій. Таблиці .....	50
6. Графіки .....	50
7. Обмежені функції. Монотонні функції .....	52
<b>Розділ III. Границя функції. Означення і властивості границь</b> .....	53
1. Означення границі функції .....	53
2. Дії над границями .....	54
3. Умова існування границі .....	55
4. Одностороння границя .....	59
5. Невластиві границі .....	61
6. Обчислення деяких границь .....	63
Завдання .....	67
<b>Розділ IV. Неперервність функції</b> .....	68
<b>§1. Неперервність функції</b> .....	68
1. Означення .....	68
2. Необхідна і достатня умова неперервності функції .....	69
3. Геометрична інтерпретація .....	69
4. Дії над неперервними функціями .....	70
<b>§2. Рівномірна неперервність</b> .....	71
5. Означення .....	71
6. Геометрична інтерпретація .....	71
7. Неперервність рівномірно неперервної функції .....	72
Завдання .....	74
8. Основні теореми про неперервні функції в замкненому інтервалі .....	74
<b>§3. Складні функції</b> .....	76
9. Означення .....	76
10. Неперервність складної функції .....	76
<b>§4. Обернені функції</b> .....	77
11. Означення .....	77
12. Геометрична інтерпретація .....	77
13. Неперервність оберненої функції .....	78
<b>§5. Неперервність і графіки елементарних функцій</b> .....	78
14. Функція $y = x^n$ .....	78
15. Функція $y = a^x$ , $a > 0$ .....	81
16. Функція $y = \log_a x$ , $a > 0$ , $a \neq 1$ .....	81
17. Тригонометричні функції .....	82
18. Циклометричні функції .....	83

<b>Розділ V. Похідна функції. Означення і зміст похідної.....</b>	<b>86</b>
<b>§1. Означення і зміст похідної.....</b>	<b>86</b>
1. Означення похідної.....	86
2. Односторонні похідні.....	88
3. Існування похідної та неперервність.....	88
4. Похідна як функція.....	89
5. Інтерпретації похідної в геометрії та фізиці.....	89
6. Неперервні функції, які не мають похідної у певній точці (прикладі).....	91
<b>§2. Теорема про похідну.....</b>	<b>92</b>
7. Похідна сталої функції.....	92
8. Похідна степеневі функції.....	92
9. Похідна добутку сталої на функцію.....	92
10. Похідна суми, добутку, частки.....	93
Завдання.....	95
11. Похідна складної функції.....	96
12. Похідна оберненої функції.....	96
<b>§3. Диференціал функції.....</b>	<b>98</b>
13. Означення диференціала.....	98
14. Диференціал складної функції.....	98
15. Диференціал суми, добутку, частки.....	99
16. Геометрична інтерпретація диференціала.....	100
<b>§4. Похідні елементарних функцій.....</b>	<b>101</b>
17. Похідна степеневі функції.....	101
Завдання.....	103
18. Похідна логарифмічної функції.....	103
Завдання.....	105
19. Похідна показникової функції.....	105
Завдання.....	106
20. Похідні тригонометричних функцій.....	106
Завдання.....	108
21. Похідні циклометричних функцій.....	109
Завдання.....	111
22. Логарифмічна похідна.....	111
Завдання.....	112
23. Похідні вищих порядків.....	112
Завдання.....	114
24. Формула Лейбніца.....	115
Завдання.....	116
25. Параметричне задання функцій.....	117
Завдання.....	119
26. Диференціали вищих порядків.....	119
Завдання.....	123
<b>Розділ VI. Теорема Ролля. Теорема про середнє значення.</b>	
<b>Формула Тейлора.....</b>	<b>126</b>
1. Теорема про середнє значення.....	126
2. Теорема Ролля.....	127

3. Доведення теореми Ролля.....	128
4. Доведення теореми про середнє значення.....	129
5. Наслідки з теореми про середнє значення.....	130
6. Похідна складної функції.....	131
7. Формула Тейлора.....	131
8. Доведення формули Тейлора.....	132
Завдання.....	136
9. Опуклість.....	137
<b>Розділ VII. Максимуми і мінімуми. Точки перегину.....</b>	<b>139</b>
1. Визначення екстремуму.....	139
2. Необхідна умова існування екстремуму.....	140
3. Достатня умова для існування екстремуму.....	142
4. Загальніша достатня умова.....	143
5. Точка перегину.....	145
6. Екстремуми функцій, заданих параметрично.....	147
Завдання.....	149
7. Види невизначеностей.....	150
Завдання.....	154
<b>Розділ VIII. Ряди.....</b>	<b>156</b>
<b>§1. Ряди з постійними членами.....</b>	<b>156</b>
1. Означення ряду. Збіжні ряди.....	156
2. Необхідна умова збіжності.....	158
3. Обмежені ряди.....	159
4. Абсолютно збіжні ряди.....	160
5. Теорема про збіжність та абсолютну збіжність рядів.....	161
6. Теорема про суму абсолютно збіжного ряду.....	161
7. Умовно збіжні ряди.....	163
8. Необхідна і достатня умова збіжності ряду.....	163
<b>§2. Критерії збіжності.....</b>	<b>165</b>
9. Порівняння рядів.....	165
10. Критерій (ознака) Коші.....	166
11. Критерій (ознака) д'Аламбера.....	168
Завдання.....	170
<b>§3. Границі та функціональні ряди.....</b>	<b>170</b>
12. Означення збіжності.....	170
13. Рівномірна збіжність.....	172
14. Дії над рівномірно збіжними послідовностями функцій. Необхідна і достатня умова рівномірної збіжності.....	173
15. Теорема про неперервність суми функціональних послідовностей.....	174
16. Рівномірна збіжність рядів.....	175
17. Абсолютна і рівномірна збіжність функціональних рядів.....	177
18. Диференціювання послідовностей і рядів.....	177
19. Степеневі ряди.....	179
20. Радіус збіжності степеневого ряду.....	180

21. Неперервність суми степеневого ряду .....	181
22. Визначення радіуса збіжності .....	181
23. Диференціювання степеневого ряду.....	181
24. Ряд Тейлора .....	183
Завдання .....	187
<b>Розділ IX. Функції двох змінних .....</b>	<b>190</b>
<b>§1. Основні поняття .....</b>	<b>190</b>
1. Плоскі множини. Області .....	190
2. Граничні точки. Замкнені області .....	190
3. Області, які задаються нерівностями.....	191
Завдання.....	191
4. Функції двох змінних .....	192
5. Геометричне трактування функцій двох змінних .....	193
6. Лінії рівня .....	194
Завдання.....	195
<b>§2. Границя і неперервність функцій .....</b>	<b>196</b>
7. Означення границі .....	196
8. Теорема про границі.....	197
9. Неперервність. Рівномірна неперервність .....	197
<b>§3. Частинні похідні .....</b>	<b>199</b>
10. Означення частинних похідних.....	199
11. Частинні похідні другого порядку .....	200
12. Теорема про рівність мішаних похідних другого порядку .....	200
Завдання.....	202
13. Частинні похідні вищих порядків .....	202
14. Складні функції.....	203
15. Частинні похідні складних функцій .....	204
Завдання.....	205
<b>§4. неявні функції .....</b>	<b>206</b>
16. Означення неявної функції.....	206
17. Теорема існування неявної функції .....	207
18. Похідна неявної функції .....	207
19. Максимуми і мінімуми неявних функцій.....	210
Завдання.....	211
<b>Розділ X. Формула і ряд Тейлора. Максимуми і мінімуми.     Диференціали функції двох змінних .....</b>	<b>213</b>
<b>§1. Формула і ряд Тейлора.....</b>	<b>213</b>
1. Формула Тейлора.....	213
2. Ряди Тейлора і Маклорена.....	215
<b>§2. Максимуми і мінімуми функцій двох змінних .....</b>	<b>216</b>
3. Означення екстремуму .....	216
4. Необхідні умови для існування екстремуму.....	217
5. Достатня умова існування екстремуму .....	217
Завдання .....	221

<b>§3. Диференціал функції двох змінних</b> .....	221
6. Означення диференціала.....	221
7. Диференціал складної функції.....	222
8. Застосування до функцій однієї змінної.....	223
9. Випадок, коли одна із змінних є функцією іншої.....	223
10. Частинні диференціали.....	224
11. Диференціал і приріст функції.....	224
Завдання.....	225
12. Диференціали вищих порядків.....	226
Завдання.....	227
<b>Розділ XI. Функції багатьох змінних</b> .....	228
1. Області.....	228
2. Функції багатьох змінних.....	229
3. Границя. Неперервність.....	229
4. Частинні похідні.....	229
5. Формула і ряд Тейлора.....	230
<b>ТОМ II</b> .....	231
<b>Розділ I. Невизначений інтеграл. Методи інтегрування</b> .....	233
§1. Первісна функція.....	233
§2. Основні формули.....	234
§3. Деякі властивості невизначеного інтеграла.....	235
§4. Інтегрування підстановкою.....	236
§5. Інтегрування частинами.....	238
§6. Інтеграл від елементарних функцій.....	239
§7. Формули зведення.....	242
Завдання.....	244
<b>Розділ II. Інтегрування раціональних функцій</b> .....	247
§1. Розклад багаточлена на множники.....	247
§2. Розклад раціональної функції на елементарні дроби.....	248
§3. Інтеграл від раціональних функцій.....	253
Завдання.....	254
<b>Розділ III. Інтегрування алгебраїчних функцій</b> .....	257
§1. Інтегрування деяких типів ірраціональних функцій.....	257
§2. Біноміальні інтегралі.....	258
§3. Інтегрування раціональних функцій $R(x, y)$ , де $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ .....	259
§4. Деякі частинні випадки інтегралів від раціональної функції $R(x, y)$ , $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ .....	262
§5. Зауваження, які стосуються перетворення інтеграла $\int R(x, y)dx$ .....	268
Завдання.....	272
<b>Розділ IV. Інтегралі показникових, логарифмічних, тригонометричних і циклометричних функцій</b> .....	274
§1. Загальні зауваження.....	274

§2. Інтегралы показникових та логарифмічних функцій.....	275
§3. Інтегралы тригонометричних функцій.....	278
§4. Інтегралы циклометричних (обернених тригонометричних) функцій.....	282
§5. Приклади функцій, що не інтегруються елементарно.....	284
Завдання .....	285
<b>Розділ V. Визначений інтеграл.....</b>	<b>288</b>
§1. Означення визначеного інтеграла .....	288
§2. Деякі властивості визначених інтегралів.....	293
§3. Інтегровність неперервної функції.....	295
§4. Деякі умови інтегровності.....	297
§5. Розбиття інтервалу інтегрування.....	298
§6. Деякі нерівності для означених інтегралів .....	299
§7. Межі інтеграла.....	301
§8. Функції верхньої (нижньої) границі інтеграла.....	302
§9. Визначений інтеграл і первісна функція.....	304
§10. Теорема про середнє значення (інтегральне) .....	307
Завдання .....	309
<b>Розділ VI. Перетворення визначених інтегралів.</b>	
<b>Інтегрування послідовностей і рядів.....</b>	<b>311</b>
§1. Заміна змінної у визначених інтегралах .....	311
Завдання .....	313
§2. Інтегрування частинами у визначеному інтегралі.....	314
§3. Інтегрування послідовностей і рядів.....	315
§4. Інтегрування степеневих рядів .....	318
§5. Інтегрування і диференціювання за параметром .....	321
Завдання .....	325
<b>Розділ VII. Невластиві інтегралы.....</b>	<b>327</b>
§1. Інтеграл від необмеженої у декількох точках функції .....	327
§2. Інтеграл від необмеженої функції .....	328
§3. Інтегралы в нескінченному інтервалі .....	329
§4. Критерій існування невластивого інтеграла.....	331
§5. Застосування до рядів.....	333
§6. Рівномірно збіжні невластиві інтегралы .....	336
Завдання .....	342
<b>Розділ VIII. Застосування інтегрального числення .....</b>	<b>345</b>
§1. Обчислення площі.....	345
Завдання .....	347
§2. Обчислення довжини дуги .....	348
Завдання .....	351
§3. Об'єм тіла обертання .....	352
Завдання .....	354
§4. Площа поверхні обертання.....	354
Завдання .....	357
<b>Розділ IX. Подвійний визначений інтеграл. Умови інтегровності .....</b>	<b>358</b>
§1. Означення подвійного визначеного інтеграла .....	358

---

§2. Умови інтегровності .....	361
§3. Подвійний інтеграл як повторний інтеграл.....	363
§4. Подвійний інтеграл по області .....	368
§5. Умови інтегровності. Теорема про середнє значення.....	371
§6. Подвійний інтеграл по області як повторний інтеграл .....	372
Завдання .....	379
<b>Розділ X. Криволінійний інтеграл.....</b>	<b>381</b>
§1. Проста дуга .....	381
§2. Криволінійний інтеграл по простій дузі .....	382
§3. Криволінійний інтеграл по кривій .....	386
§4. Робота як криволінійний інтеграл.....	388
§5. Замкнена крива.....	390
§6. Криволінійний інтеграл по замкненій кривій .....	392
§7. Теорема Гріна .....	394
§8. Застосування теореми Гріна .....	396
<b>Розділ XI. Неперервні відображення.</b>	
<b>Заміна змінних у подвійних інтегралах.....</b>	<b>403</b>
§1. Відображення .....	403
§2. Неперервні множини. Взаємно однозначні відображення .....	404
§3. Функціональний визначник (якобіан).....	405
Завдання .....	410
§4. Заміна змінних у подвійних інтегралах .....	410
Завдання .....	416