

УДК 62-83 (075.8)

Ю.В.ЧОВНЮК, М.Г. ДІКТЕРУК

Київський національний університет будівництва і архітектури

ВДОСКОНАЛЕННЯ ІНЖЕНЕРНИХ МЕТОДІВ РОЗРАХУНКУ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ АВТОМАТИЗОВАНОГО ЕЛЕКТРОПРИВОДА: ДЕМПФУВАННЯ ЕЛЕКТРОПРИВОДОМ ПРУЖНИХ МЕХАНІЧНИХ КОЛИВАНЬ

© Човнюк Ю.В., Діктерук М.Г., 2008

*Запропонований вдосконалений інженерний метод
розрахунку електромеханічних систем.*

*The improved engineer's method of calculation
of the electromechanical systems is proposed.*

Постановка проблеми. Аналіз останніх досліджень. Дослідження динаміки електроприводів [1–9] показують, що нерозгалужені розрахункові механічні системи здебільшого внаслідок виділення головних мас та жорсткостей зводяться до тримасової (рис. 1) або двомасової (рис. 2) розрахунковим схемам. (Інколи у розрахунках двомасових схем вважають $\beta_{12} \equiv 0$).

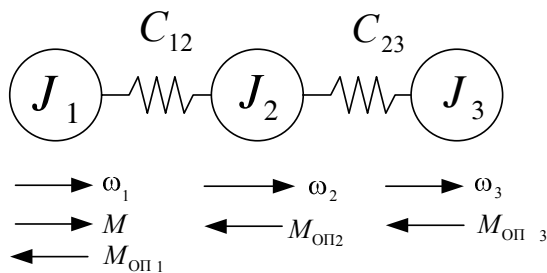


Рис.1. Тримасова схема механічної частини електропривода

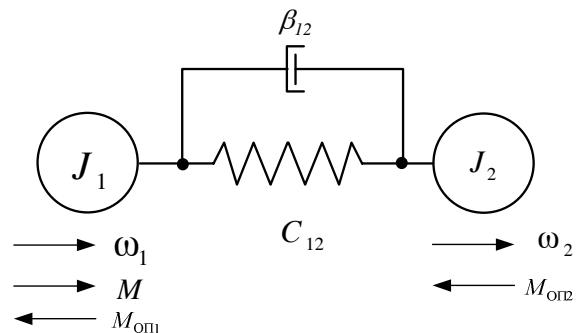


Рис.2. Двомасова схема механічної частини електропривода

Параметрами узагальненої тримасової механічної системи (рис. 1) є сумарні зведені моменти інерції мас J_1 , J_2 та J_3 , утворені приведеними масами, зв'язки між якими приймаються жорсткими, й еквівалентні приведені жорсткості механічних пружних зв'язків між J_1 та J_2 – C_{12} й між J_2 та J_3 – C_{23} . Перша маса являє собою ротор двигуна й жорстко з ним зв'язані елементи; до цієї маси прикладені електромагнітний момент двигуна M й момент статичного навантаження $M_{оп1}$, що зазвичай є сумарним моментом втрат на валу двигуна й у жорстко з ним зв'язаних елементах.

До проміжної маси механізму (J_2) прикладений момент опору $M_{оп2}$, а до третьої (J_3) – момент зовнішнього навантаження цієї маси $M_{оп3}$.

Тримасова пружна система під час дослідження електромеханічних систем автоматизованого електропривода використовується у тих випадках, коли виникає необхідність детальнішого аналізу умов руху мас механізму. Для розв'язання задачі зазвичай використовується математичне

моделювання на ПЕОМ. Для дослідження окремих фізичних особливостей тримасова розрахункова схема зводиться до двомасової.

В узагальненій двомасовій пружній системі (рис. 2) сумарний приведений момент інерції елементів, жорстко зв'язаних з двигуном, аналогічно до попереднього, позначений J_1 . Сумарний приведений момент інерції елементів, жорстко зв'язаних з робочим органом механізму, позначений J_2 . Безінерційний пружний зв'язок між цими масами характеризується приведеною еквівалентною жорсткістю C_{12} . Сумарні моменти навантаження на валу двигуна й механізму позначені відповідно $M_{ОП1}$ й $M_{ОП2}$.

Необідно зазначити, що електромеханічна система з двомасовою пружною механічною частиною являє собою найпростішу модель електропривода, найзручнішу для вивчення впливу пружних механічних зв'язків.

У тримасовій пружній системі узагальненими координатами є кутові переміщення мас $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, їм відповідають узагальнені швидкості ω_1, ω_2 й ω_3 .

У [10] за допомогою функції Лагранжа отримана система рівнянь руху (для тримасової моделі):

$$\begin{cases} M - C_{12} \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) - M_{ОП1} = J_1 \cdot \frac{d\omega_1}{dt}; \\ C_{12} \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) - C_{23} \cdot (\varphi_2 - \varphi_3) - M_{ОП2} = J_2 \cdot \frac{d\omega_2}{dt}; \\ C_{23} \cdot (\varphi_2 - \varphi_3) - M_{ОП3} = J_3 \cdot \frac{d\omega_3}{dt} . \end{cases} \quad (1)$$

У (1) пропорціональні деформаціям пружних зв'язків моменти є моментами пружної взаємодії між рухомими масами системи:

$$M_{12} = C_{12} \cdot (\varphi_1 - \varphi_2); \quad M_{23} = C_{23} \cdot (\varphi_2 - \varphi_3). \quad (2)$$

З урахуванням (2) систему рівнянь руху (1) можна подати у вигляді

$$\begin{cases} M - M_{12} - M_{ОП1} = J_1 \cdot \frac{d\omega_1}{dt}; \\ M_{12} - M_{23} - M_{ОП2} = J_2 \cdot \frac{d\omega_2}{dt}; \\ M_{23} - M_{ОП3} = J_3 \cdot \frac{d\omega_3}{dt} . \end{cases} \quad (3)$$

Розглядаючи (3), можемо встановити, що рівняння руху приведених мас електропривода типові. Вони відображають фізичний закон (другий закон Ньютона), відповідно до якого прискорення твердого тіла пропорційне сумі всіх прикладених до нього моментів (чи сил), а також моменти та сили, зумовлені пружною взаємодією з іншими твердими тілами системи.

Рух двомасової системи [10] описується системою (3) при $J_3 = 0$ й $M_{23} = 0$:

$$\begin{cases} M - M_{12} - M_{ОП1} = J_1 \cdot \frac{d\omega_1}{dt}; \\ M_{12} - M_{ОП2} = J_2 \cdot \frac{d\omega_2}{dt}, \end{cases} \quad (4)$$

де $M_{12} = C_{12} \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)$.

Отримані рівняння руху дозволяють проаналізувати динамічні особливості механічної частини електропривода як об'єкта управління, користуючись методами теорії автоматичного управління [11, 12]. Основою для аналізу є структурні схеми, вигляд яких визначається прийнятою розрахунковою схемою механічної частини.

У [10] отримані структурні схеми для розрахункових схем, показаних на рис. 1,2.

Для отримання структурної схеми тримасової пружної механічної системи необхідно продиференціювати (2):

$$\frac{dM_{12}}{dt} = C_{12} \cdot (\omega_1 - \omega_2); \quad \frac{dM_{23}}{dt} = C_{23} \cdot (\omega_2 - \omega_3). \quad (5)$$

Далі приймемо у (3) й (5) $\frac{d}{dt} \equiv p$:

$$\begin{cases} M - M_{12} - M_{\text{ОП1}} = J_1 \cdot p \cdot \omega_1; \\ M_{12} - M_{23} - M_{\text{ОП2}} = J_2 \cdot p \cdot \omega_2; \\ M_{23} - M_{\text{ОП3}} = J_3 \cdot p \cdot \omega_3; \\ p \cdot M_{12} = C_{12} \cdot (\omega_1 - \omega_2); \\ p \cdot M_{23} = C_{23} \cdot (\omega_2 - \omega_3). \end{cases} \quad (6)$$

Системі рівнянь (6) відповідає структурна схема, зображена на рис. 3.

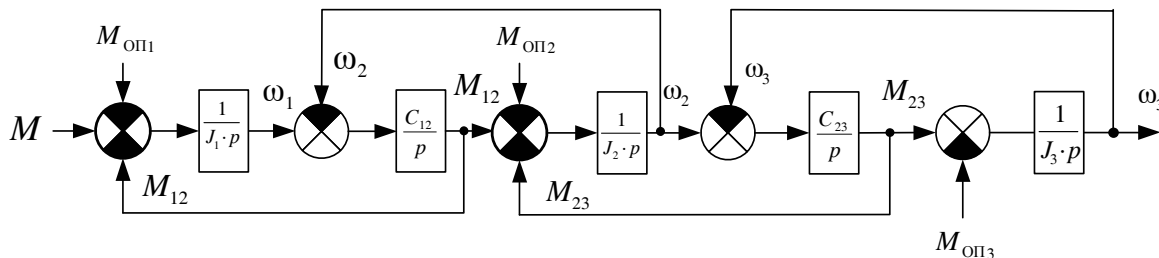


Рис.3. Структурна схема тримасової пружної системи

Вона дає уявлення про механічну частину електропривода у вигляді тримасової системи як про об'єкт управління. Керуючим впливом тут є електромагнітний момент двигуна M , а збуреннями – моменти навантаження $M_{\text{ОП1}}$, $M_{\text{ОП2}}$ й $M_{\text{ОП3}}$. Регульованими змінними можуть бути швидкості ω_1 , ω_2 й ω_3 , переміщення φ_1 , φ_2 й φ_3 , а також навантаження пружних зв'язків M_{12} й M_{23} .

Структурно механічна частина електропривода являє собою складний об'єкт, утворений ланцюгом інтегруючих ланок, замкнених перехресними внутрішніми зворотними зв'язками. Користуючись відомими методами перетворення структурних схем й визначення передавальних функцій для замкнених зворотних зв'язків контурів [11, 12], можна отримати [10] передавальну функцію механічної частини за керуючим впливом при вихідній змінній $\omega_1(p)$:

$$W_{\omega_1}(p) = \frac{\omega_1(p)}{M_1(p)} = \frac{J_2 \cdot J_3 \cdot p^4 + [C_{23} \cdot (J_2 + J_3) + C_{12} \cdot J_3] \cdot p^2 + C_{12} \cdot C_{23}}{p \cdot \{ J_1 \cdot J_2 \cdot J_3 \cdot p^4 + [J_1 C_{23} \cdot (J_2 + J_3) + J_3 \cdot C_{12} \cdot (J_1 + J_2)] \cdot p^2 + C_{12} \cdot C_{23} \cdot (J_1 + J_2 + J_3) \}} \quad (7)$$

Характеристичне рівняння запишемо у вигляді

$$p \cdot \left[p^4 + \frac{C_{12} \cdot J_3 \cdot (J_1 + J_2) + C_{23} \cdot J_1 \cdot (J_2 + J_3)}{J_1 \cdot J_2 \cdot J_3} \cdot p^2 + \frac{C_{12} \cdot C_{23} \cdot J_{\Sigma}}{J_1 \cdot J_2 \cdot J_3} \right] = 0. \quad (8)$$

де $J_{\Sigma} = (J_1 + J_2 + J_3)$ – сумарний, зведений до вала двигуна момент інерції системи.

Розв'язавши бікватратне рівняння (для прямих дужок у (8)), отримаємо корені характеристичного рівняння системи

$$\begin{cases} p_1 = 0; p_{2,3} = \pm j \cdot \left\{ \frac{a}{2} \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2b}{a^2}} \right) \right\}^{\frac{1}{2}}; j = \sqrt{-1}; \\ p_{4,5} = \pm j \cdot \left\{ \frac{a}{2} \cdot \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2b}{a^2}} \right) \right\}^{\frac{1}{2}}, \end{cases} \quad (9)$$

де

$$a = \frac{C_{12} \cdot J_3 \cdot (J_1 + J_2) + C_{23} \cdot J_1 \cdot (J_2 + J_3)}{J_1 \cdot J_2 \cdot J_3}, \quad b = \frac{C_{12} \cdot C_{23} \cdot J_{\Sigma}}{J_1 \cdot J_2 \cdot J_3}.$$

Аналіз коренів (9) показує [10], що за усіх реальних співвідношень параметрів підкореневі вирази (9) являють собою дійсні додатні числа. Тоді,

$$\begin{aligned} p_1 = 0; p_{2,3} = \pm j \cdot \Omega_1 = \pm j \cdot \left\{ \frac{a}{2} \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2b}{a^2}} \right) \right\}^{\frac{1}{2}}; \\ p_{4,5} = \pm j \cdot \Omega_2 = \pm j \cdot \left\{ \frac{a}{2} \cdot \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2b}{a^2}} \right) \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Корені (10) характеристичного рівняння (8) свідчать про те, що систему можна зобразити у вигляді послідовного з'єднання інтегруючої ланки й двох консервативних коливальних ланцюгів з резонансними частотами коливальних Ω_1 й Ω_2 . У разі зміни моменту $M(p)$ стрибком у системі можуть виникати незагасаючі коливання з частотами Ω_1 й Ω_2 , а у випадках, коли частота збурюючих впливів збігається з однією з цих частот, у системі розвивається недемпфований резонанс, за якого амплітуди коливальних теоретично можуть зрости до нескінченності. Реально у системі завжди присутні дисипативні сили, які демпфують коливання, обмежуючи резонансні амплітуди великими, але скінченними значеннями.

Аналіз властивостей пружних механічних систем можна виконати й на основі двомасової розрахункової схеми, структура якої показана на рис. 4. Вона складена на основі (6) при $M_{23} = 0$, $M_{0П3} = 0$ й $J_3 = 0$.

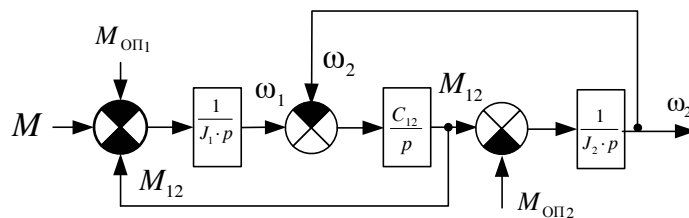


Рис.4. Структурна схема двомасової пружної механічної системи без врахування внутрішнього демпфування ($\beta_{12} \equiv 0$)

Для дослідження властивостей цієї системи як об'єкта управління приймають збурення $M_{\text{ОП1}} = M_{\text{ОП2}} = 0$. Виконуючи перетворення схеми (рис. 4) [10], можна отримати у останньому випадку таку схему (рис. 5):

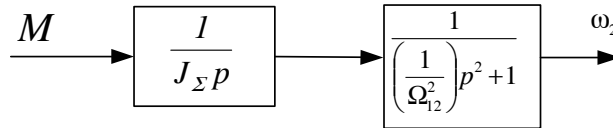


Рис.5. Структурна схема двомасової пружної механічної системи без врахування внутрішнього демпфування ($\beta_{12} \equiv 0, M_{\text{ОП1}} = M_{\text{ОП2}} = 0$)

Шукана передавальна функція визначається так [10]:

$$W_{\omega_1}(p) = \frac{\omega_1(p)}{M(p)} = \frac{\left(\frac{J_2}{C_{12}}\right) \cdot p^2 + 1}{J_{\Sigma} \cdot p \cdot \left(\frac{J_1 \cdot J_2}{C_{12} \cdot J_{\Sigma}} \cdot p^2 + 1\right)}. \quad (11)$$

Характеристичне рівняння системи:

$$J_{\Sigma} \cdot p \cdot \left(\frac{J_1 \cdot J_2}{C_{12} \cdot J_{\Sigma}} \cdot p^2 + 1\right) = 0. \quad (12)$$

Корені характеристичного рівняння (12) мають вигляд:

$$p_1 = 0; p_{2,3} = \pm j \cdot \left\{ \frac{C_{12} \cdot (J_1 + J_2)}{J_1 \cdot J_2} \right\}^{\frac{1}{2}} = \pm j \cdot \Omega_{12}, \quad (13)$$

де Ω_{12} – резонансна частота двомасової пружної системи.

Порівняння (13) з (9), (10) показує, що у разі переходу від тримасової до двомасової пружної системи виявляється лише одна частота Ω_{12} , на якій можливий прояв механічного резонансу. Однак, якщо при цьому значення Ω_{12} виявляється доволі близьким до однієї з парціальних частот вихідної системи Ω_1 чи Ω_2 , можна вважати, що двомасова система правильно відтворює головні особливості механічної частини електропривода.

Для зручності аналізу вводять [10] такі узагальнені параметри двомасової пружної системи:

$$\gamma = \frac{(J_1 + J_2)}{J_1} = \frac{J_{\Sigma}}{J_1} \text{ – співвідношення мас; } \Omega_{12} = \left\{ \frac{C_{12} \cdot (J_1 + J_2)}{J_1 \cdot J_2} \right\}^{\frac{1}{2}} \text{ – резонансна частота системи;}$$

$$\Omega_{02} = \sqrt{\frac{C_{12}}{J_2}} = \frac{\Omega_{12}}{\sqrt{\gamma}} \text{ – резонансна частота другої маси при жорсткому закріпленні першої } (J_1 \rightarrow \infty).$$

З урахуванням цих позначень (11) можна подати у вигляді

$$W_{\omega_1}(p) = \frac{1}{J_{\Sigma} \cdot p} = \frac{\left\{ \left(\frac{\gamma}{\Omega_{12}^2}\right) \cdot p^2 + 1 \right\}}{\left\{ \left(\frac{1}{\Omega_{12}^2}\right) \cdot p^2 + 1 \right\}}. \quad (14)$$

Отримане співвідношення (14) дозволяє зобразити механічну частину електропривода як об'єкт управління у вигляді трьох ланок, показаних на рис. 6.

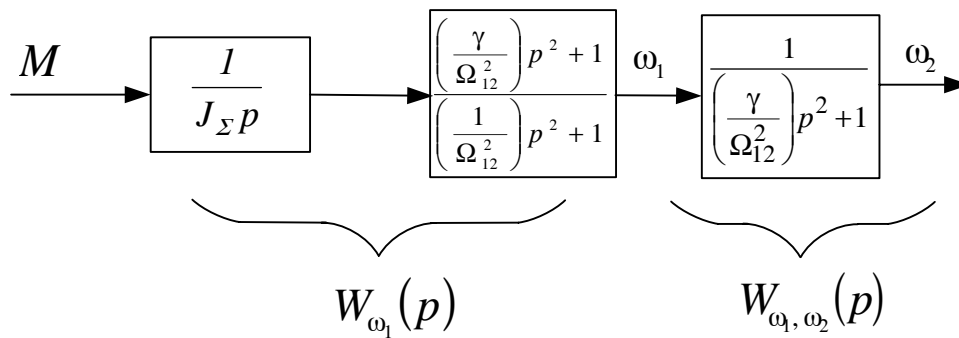


Рис.6. Триланкова структурна схема двомасової пружної механічної системи без врахування внутрішнього демпфування; ($\beta_{12} \equiv 0, M_{\text{ОП1}} = M_{\text{ОП2}} = 0$)

За допомогою цієї схеми неважко записати й передавальну функцію системи за керуючим впливом за вихідної змінної ω_2 :

$$\begin{aligned}
 W_{\omega_2}(p) &= \frac{\omega_2(p)}{M(p)} = W_{\omega_1}(p) \cdot W_{\omega_1, \omega_2}(p) = \\
 &= \frac{1}{J_{\Sigma} \cdot p} = \frac{\left\{ \left(\frac{\gamma}{\Omega_{12}^2} \right) \cdot p^2 + 1 \right\}}{\left\{ \left(\frac{1}{\Omega_{12}^2} \right) \cdot p^2 + 1 \right\}} = \frac{1}{\left\{ \left(\frac{\gamma}{\Omega_{12}^2} \right) \cdot p^2 + 1 \right\}} = \frac{1}{J_{\Sigma} \cdot p \cdot \left\{ \left(\frac{1}{\Omega_{12}^2} \right) \cdot p^2 + 1 \right\}}
 \end{aligned} \tag{15}$$

Передавальній функції (15) відповідає структурна схема об'єкту, показана на рис. 5.

Аналіз електромеханічних властивостей двигунів різноманітних видів [7, 10] дає змогу встановити, що за певних умов механічні характеристики принципово різних типів двигунів описуються однаковими рівняннями. Відповідно в цих межах аналогічні й основні електромеханічні властивості двигунів, що створює передумови для узагальненого вивчення динаміки електромеханічних систем.

Можливість такого узагальнення впливає безпосередньо з порівняння рівнянь динамічної жорсткості, отриманих для двигунів з незалежним збудженням, з послідовним та змішаним збудженням у разі лінеаризації у околі точки статичної рівноваги й для асинхронного двигуна у разі лінеаризації робочої ділянки характеристики за умови живлення від джерела напруги/струму. Всі ці рівняння аналітичні за формою й відрізняються тільки виразами статичної жорсткості β^* й електромагнітної постійної часу T_e . (Надалі β^* ототожнюємо з β , тобто $\beta^* \equiv \beta$). Відповідно, розповсюджуючи позначення T_e на двигуни постійного струму ($T_{\text{я}} = T_e$, де $T_{\text{я}}$ – постійна часу для якоря), можна отримати таку форму запису рівнянь динаміки лінеаризованих електромеханічних систем (у межах двомасової моделі) [10]:

$$\begin{cases} (1 + T_e \cdot p) \cdot M = \beta \cdot (\omega_0 - \omega_1); \\ M - C_{12} \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) - M_{\text{ОП1}} = J_1 \cdot p \cdot \omega_1; \\ C_{12} \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) - M_{\text{ОП2}} = J_2 \cdot p \cdot \omega_2 \end{cases} \tag{16}$$

де ω_0 – швидкість ідеальної холостої ходи двигуна.

Рівняння (16) є узагальненими рівняннями динаміки електромеханічної системи з двигуном, який має лінійну чи лінеаризовану механічну характеристику, динамічна жорсткість якої описується передавальною функцією аперіодичною ланки з коефіцієнтом β й постійною часу T_e :

$$\beta_{\text{дин}}(p) = -\frac{\beta}{1 + T_e \cdot p} \quad (17)$$

Рівнянням (16) відповідає структурна схема узагальненої електромеханічної системи, зображена на рис. 7. Рівняння (16) й структурна схема на рис. 7 справедливі для будь-якого електропривода, рівняння механічної характеристики якого у розглядуваному процесі може бути з прийнятою точністю подане першим рівнянням системи (16), а механічну частину задовільно зображає двомасова розрахункова схема механічної частини. Особливості застосовуваного двигуна при цьому відображаються у конкретному змісті змінних та виразах параметрів. Такий підхід (рис.7) дозволяє всебічно проаналізувати різноманітні режими функціонування подібних електромеханічних систем.

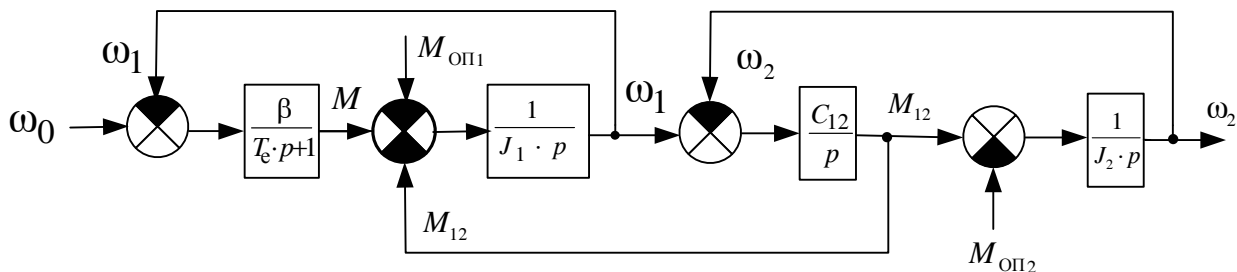


Рис.7. Структурна схема узагальненої системи електропривода з двигуном, який має лінійну механічну характеристику (двомасова модель)

Варто зазначити, що автор [10] розглядає системи (16) лише для кількох спрощених випадків.

Метою цієї роботи є встановлення адекватної моделі узагальненої системи електропривода з двигуном, який має лінійну механічну характеристику, для варіанта тримасової моделі й всебічний аналіз на її основі (як і на основі двомасової моделі) основних закономірностей, властивих реальним нелінійним електромеханічним системам у режимах пуску/гальмування двигуна, допустимих відхилень його від статичного стану. Завдяки простоті такий підхід, на думку авторів, забезпечить можливість узагальненого (математичного) аналізу цих закономірностей методами теорії автоматичного регулювання.

Виклад основного матеріалу. Узагальнена електромеханічна система з лінеаризованою механічною характеристикою та її аналіз (у межах тримасової моделі).

Аналогічно до моделі (16) та структурної схеми (рис. 7), яка їй відповідає, можна запропонувати систему рівнянь динаміки лінеаризованої електромеханічної системи (для тримасової пружної системи) такого вигляду:

$$\begin{cases} (1 + T_e \cdot p) \cdot M = \beta \cdot (\omega_0 - \omega_1); \\ M - C_{12} \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) - M_{\text{оп1}} = J_1 \cdot p \cdot \omega_1; \\ C_{12} \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) - C_{23} \cdot (\varphi_2 - \varphi_3) - M_{\text{оп2}} = J_2 \cdot p \cdot \omega_2; \\ C_{23} \cdot (\varphi_2 - \varphi_3) - M_{\text{оп3}} = J_3 \cdot p \cdot \omega_3 \end{cases} \quad (18)$$

Рівнянням (18) відповідає структурна схема узагальненої електромеханічної системи, зображена на рис. 8.

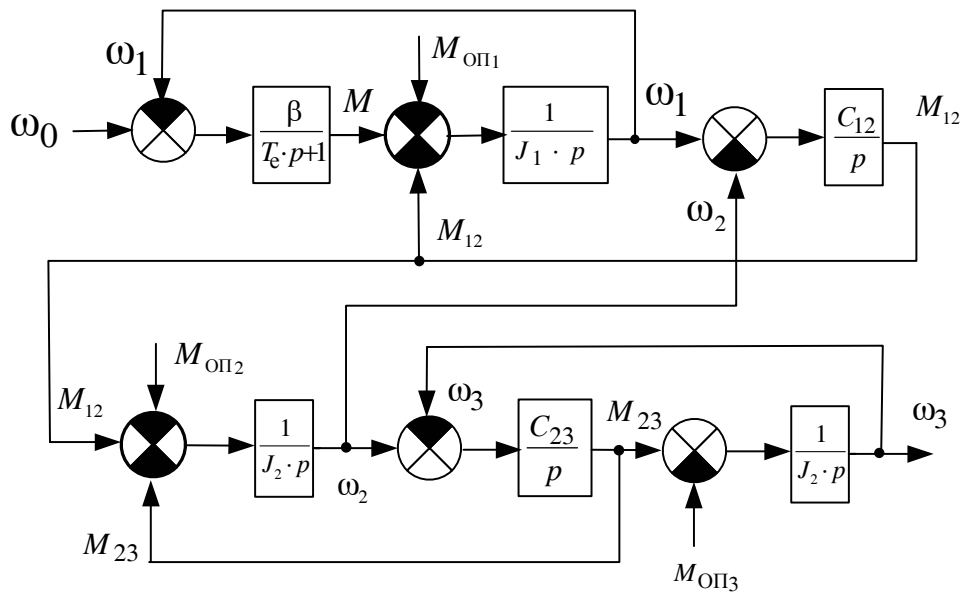


Рис. 8. Структурна схема узагальної системи електропривода з двигуном, який має лінійну механічну характеристику (тримасова модель)

Передавальна функція щодо керуючого впливу ω_0 має вигляд:

$$W_{\omega_1}(p) = \frac{\omega_1(p)}{\omega_0(p)} = \frac{\beta \cdot [J_2 \cdot J_3 \cdot p^4 + (C_{12} \cdot J_3 + C_{23} \cdot J_3 + C_{23} \cdot J_2) \cdot p^2 + C_{12} \cdot C_{23}]}{A \cdot p^6 + B \cdot p^5 + C \cdot p^4 + D \cdot p^3 + E \cdot p^2 + F \cdot p + G}, \quad (19)$$

де $A = J_1 \cdot J_2 \cdot J_3 \cdot T_e$; $C = \beta \cdot J_2 \cdot J_3 + (C_{12} \cdot J_3 + C_{23} \cdot J_3 + C_{23} \cdot J_2) \cdot J_1 \cdot T_e + J_2 \cdot J_3 \cdot C_{12} \cdot T_e$;

$D = (C_{12} \cdot J_3 + C_{23} \cdot J_3 + C_{23} \cdot J_2) \cdot J_1 + J_1 \cdot J_2 \cdot C_{12}$; $\beta = J_1 \cdot J_2 \cdot J_3$;

$E = \beta \cdot (C_{12} \cdot J_3 + C_{23} \cdot J_3 + C_{23} \cdot J_2) + J_1 \cdot T_e \cdot C_{12} \cdot C_{23} + (J_3 \cdot C_{23} + J_2 \cdot C_{23}) \cdot C_{12} \cdot T_e$;

$F = J_1 \cdot C_{12} \cdot C_{23} + (J_3 \cdot C_{23} + J_2 \cdot C_{23}) \cdot C_{12}$; $G = \beta \cdot C_{12} \cdot C_{23}$.

Характеристичне рівняння запишемо у вигляді:

$$A \cdot p^6 + B \cdot p^5 + C \cdot p^4 + D \cdot p^3 + E \cdot p^2 + F \cdot p + G = 0. \quad (20)$$

Його необхідно розв'язувати за допомогою ПЕОМ для конкретних числових значень коефіцієнтів A, B, C, D, E, F, G .

Для двомасової моделі потрібно у (18) прийняти $J_3 = 0, C_{23} = 0$. Тоді маємо для $W_{\omega_1}(p)$ такий вираз (після здійснення граничного переходу $J_3 \rightarrow 0, C_{23} \rightarrow 0$):

$$W_{\omega_1}(p) = \frac{\beta \cdot [C_{12} + J_2 \cdot p^2]}{\tilde{A} \cdot p^4 + \tilde{B} \cdot p^3 + \tilde{C} \cdot p^2 + \tilde{D} \cdot p + \tilde{E}}, \quad (21)$$

де $\tilde{A} = J_1 \cdot J_2 \cdot T_e$; $\tilde{B} = J_1 \cdot J_2$; $\tilde{C} = \beta \cdot J_2 + C_{12} \cdot J_2 \cdot T_e + C_{12} \cdot J_1 \cdot T_e$;

$\tilde{D} = C_{12} \cdot J_2 + C_{12} \cdot J_1 = C_{12} \cdot (J_1 + J_2)$; $\tilde{E} = \beta \cdot C_{12}$.

Корені характеристичного рівняння:

$$\tilde{A} \cdot p^4 + \tilde{B} \cdot p^3 + \tilde{C} \cdot p^2 + \tilde{D} \cdot p + \tilde{E} = 0 \quad (22)$$

можна знайти аналітично, користуючись розв'язком Декарта-Ейлера чи Феррарі [13]. Зокрема, користуючись першим з них, можна отримати таке. Оскільки $\tilde{A} \neq 0$, тоді (22) можна подати у вигляді

$$p^4 + \frac{\tilde{B}}{\tilde{A}} \cdot p^3 + \frac{\tilde{C}}{\tilde{A}} \cdot p^2 + \frac{\tilde{D}}{\tilde{A}} \cdot p + \frac{\tilde{E}}{\tilde{A}} = 0. \quad (23)$$

Підстановкою $p = y - \frac{\tilde{B}}{\tilde{A}}$ (23) зводиться до “неповного” вигляду:

$$y^4 + \alpha_1 \cdot y^2 + \alpha_2 \cdot y + \alpha_3 = 0. \quad (24)$$

Корені y_1, y_2, y_3, y_4 “неповного” рівняння четвертого ступеня (24) дорівнюють одному з виразів

$$\pm \sqrt{z_1} \pm \sqrt{z_2} \pm \sqrt{z_3}, \quad (25)$$

у яких сполучення знаків обирають так, щоб задовольнялась умова

$$\sqrt{z_1} \cdot \pm \sqrt{z_2} \cdot \sqrt{z_3} = -\frac{\alpha_2}{8}, \quad (26)$$

причому z_1, z_2, z_3 – корені кубічного рівняння:

$$z^3 + \frac{\alpha_1}{2} \cdot z^2 + \frac{\alpha_1 - 4\alpha_3}{16} \cdot z - \frac{\alpha_2^2}{64} = 0. \quad (27)$$

(Коефіцієнти $\alpha_{1,2,3}$ у (24) однозначно виражаються через коефіцієнти $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}, \tilde{E}$ (22), (23) й тут не наведені у зв’язку з громіздкістю).

Демпфування електроприводом пружних механічних коливань.

Зображаючи електропривод найпростішою структурною схемою [10] ($C_{12} = \infty, \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi, \omega_1 = \omega_2 = \omega$), необхідно пам’ятати, що неврахування пружних механічних зв’язків завжди у тому чи іншому ступені спотворює фактичний характер процесів. Поряд із задачами, для розв’язання яких у конкретних умовах ці спотворення не мають істотного значення, існує широке коло практичних питань, правильно розв’язати які без врахування пружності неможливо. Крім того, під час розв’язування будь-яких задач треба вміти оцінювати вплив пружних зв’язків на динаміку електромеханічної системи. Тому аналіз особливостей взаємодії електропривода, який має лінійну механічну характеристику, з механізмом, в якого є пружні зв’язки, у єдиній системі має важливе практичне значення.

Виконаємо аналіз впливу пружних зв’язків за допомогою узагальненої структури електромеханічної системи (в межах двомасової моделі), яка показана на рис. 7. Для зручності аналізу процесів щодо управління приймемо $M_{OП1} = M_{O21} = 0$ й використаємо структурну схему механічної частини, зображену на рис. 6. Отримана таким способом структурна схема електропривода з пружним зв’язком зображена на рис. 9. Тут передавальні функції механічної частини виражені через узагальнені параметри γ, Ω_{12} й $T_{M1} = \frac{J_1}{\beta}$, причому $\gamma \cdot T_{M1} \cdot \beta = J_{\Sigma}$.

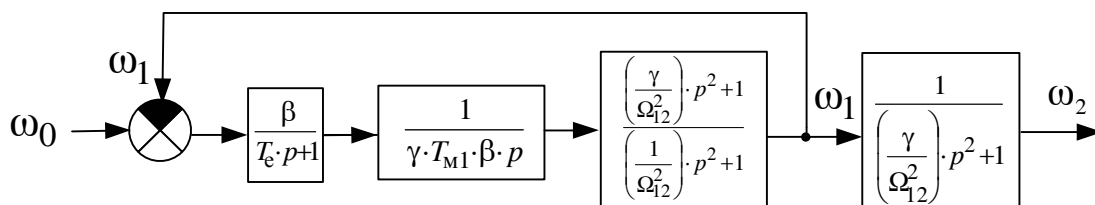


Рис.9. Перетворена структурна схема двомасової пружної системи

Звертаючись до аналізу властивостей механічної системи, можемо зробити висновок, що у структурі на рис. 9 механічна частина об'єкта являє собою коливну ланку, у якій при $M = \text{const}$ механічні коливання, що виникли, за прийнятих припущень не загасають. Однак, розглядаючи схему на рис. 9, можна встановити, що коливання швидкості двигуна ω_1 завдяки наявності внутрішнього зворотного зв'язку за швидкістю у системі електропривода повинні виникати коливання моменту, обумовлені динамічною жорсткістю механічної характеристики:

$$M(p) = -\frac{\beta \cdot \omega_1(p)}{1 + T_e \cdot p}. \quad (28)$$

За відсутності електромагнітної інерції ($T_e = 0$): $M = -\beta \cdot \omega_1$. Отже, за відсутності електромагнітної інерції двигун створює момент, що діє на першу масу, аналогічний моменту в'язкого тертя. Відповідно, електропривод завдяки наявності електромеханічного зв'язку впливає на коливання у механічній частині як демпфер, аналогічний дії в'язкого тертя. Ступінь загасання коливань у консервативній механічній системі є кількісним показником демпфуючої здатності електропривода.

Передавальна функція об'єкта щодо управління впливом ω_0 має вигляд:

$$W_{\omega_1}(p) = \frac{\omega_1(p)}{\omega_0(p)} = \frac{\left[\frac{p \cdot \beta}{1 + T_e \cdot p} \right]}{\left\{ \left[\frac{p \cdot \beta}{1 + T_e \cdot p} \right] + C_{12} - \frac{C_{12}^2}{C_{12} + J_2 \cdot p^2} + J_1 \cdot p^2 \right\}}. \quad (29)$$

Розглянемо ефект демпфування пружних коливань на найпростішому прикладі, за якого електромагнітна інерція настільки мала, що можна прийняти $T_e = 0$. Тоді передавальна функція $W_{\omega_1}(p)$ набуває вигляду:

$$W_{\omega_1}(p) = \frac{J_2 \cdot \beta \cdot p^2 + \beta \cdot C_{12}}{J_1 \cdot J_2 \cdot p^3 + J_2 \cdot \beta \cdot p^2 + (J_1 + J_2) \cdot C_{12} \cdot p + \beta \cdot C_{12}}. \quad (30)$$

Характеристичне рівняння системи

$$J_1 \cdot J_2 \cdot p^3 + J_2 \cdot \beta \cdot p^2 + (J_1 + J_2) \cdot C_{12} \cdot p + \beta \cdot C_{12} = 0. \quad (31)$$

Його можна подати у вигляді:

$$p^3 + \frac{\beta}{J_1} \cdot p^2 + \left(\frac{1}{J_2} + \frac{1}{J_1} \right) \cdot C_{12} \cdot p + \frac{\beta \cdot C_{12}}{J_1 \cdot J_2} = 0. \quad (32)$$

Або

$$p^3 + \frac{1}{T_{M1}} \cdot p^2 + \Omega_{12}^2 \cdot p + \frac{\Omega_{12}^2}{\gamma \cdot T_{M1}} = 0. \quad (33)$$

Для аналізу типів коренів (33) використаємо підхід [13]. Рівняння (33) підстановкою $p = y - \frac{1}{3T_{M1}}$ зводиться до "неповного" вигляду:

$$y^3 + \tilde{p} \cdot y + \tilde{q} = 0, \quad \tilde{p} = -\frac{1}{3T_{M1}^2} + \Omega_{12}^2, \quad \tilde{q} = 2 \cdot \left(\frac{1}{3T_{M1}} \right)^3 - \frac{\Omega_{12}^2}{T_{M1} \cdot 3} + \frac{\Omega_{12}^2}{\gamma \cdot T_{M1}}. \quad (34)$$

1. Якщо виконується умова

$$\left(\frac{\tilde{p}}{3} \right)^3 + \left(\frac{\tilde{q}}{2} \right)^2 > 0, \quad (35)$$

або

$$\left\{ -\frac{1}{9 \cdot T_{M1}^2} + \frac{\Omega_{12}^2}{3} \right\}^3 + \left\{ \frac{1}{27 \cdot T_{M1}^3} - \frac{\Omega_{12}^2}{6 \cdot T_{M1}} + \frac{\Omega_{12}^2}{2\gamma \cdot T_{M1}} \right\}^2 > 0, \quad (36)$$

тоді рівняння (34) має один дійсний корінь й два комплексно спряжених:

$$y_1 = \bar{A} + \bar{B}; \quad y_{2,3} = -\frac{\bar{A} + \bar{B}}{2} \pm j \cdot \frac{\bar{A} - \bar{B}}{2} \cdot \sqrt{3}, \quad (37)$$

$$\text{де } j = -\sqrt{-1}, \quad \bar{A} = \sqrt[3]{-\frac{\tilde{q}}{2} + \sqrt{Q}}, \quad \bar{B} = \sqrt[3]{-\frac{\tilde{q}}{2} - \sqrt{Q}}, \quad Q = \left\{ \left(\frac{\tilde{p}}{3} \right)^3 + \left(\frac{\tilde{q}}{2} \right)^2 \right\}.$$

Тоді корені (33) набувають вигляду

$$p_1 = y_1 - \frac{1}{3T_{M1}} = \bar{A} + \bar{B} - \frac{1}{3T_{M1}}; \quad p_{2,3} = y_{2,3} - \frac{1}{3T_{M1}}; \\ p_{2,3} = -\frac{\bar{A} + \bar{B}}{2} - \frac{1}{3T_{M1}} \pm j \cdot \frac{\bar{A} - \bar{B}}{2} \cdot \sqrt{3}. \quad (38)$$

Для того, щоб у системі існувало демпфування коливань необхідно й достатньо, щоб одночасно $\text{Re } p_{1,2,3} < 0$. Ця обставина зводить поле можливих змін параметрів системи до такого:

$$-\frac{2}{3T_{11}} < \bar{A} + \bar{B} < \frac{1}{3T_{11}}. \quad (39)$$

2. Якщо виконується умова:

$$\left(\frac{\tilde{p}}{3} \right)^3 + \left(\frac{\tilde{q}}{2} \right)^2 = 0, \quad (40)$$

або

$$\left\{ -\frac{1}{9 \cdot T_{M1}^2} + \frac{\Omega_{12}^2}{3} \right\}^3 + \left\{ \frac{1}{27 \cdot T_{M1}^3} - \frac{\Omega_{12}^2}{6 \cdot T_{M1}} + \frac{\Omega_{12}^2}{2\gamma \cdot T_{M1}} \right\}^2 = 0, \quad (41)$$

тоді рівняння (34) має три дійсних корені, два з яких рівні між собою:

$$y_1 = 2 \cdot \sqrt[3]{-\frac{\tilde{q}}{2}}; \quad y_2 = y_3 = -\sqrt[3]{-\frac{\tilde{q}}{2}}. \quad (42)$$

Тоді корені (33) набувають вигляду

$$p_1 = y_1 - \frac{1}{3T_{M1}} = 2 \cdot \sqrt[3]{-\frac{\tilde{q}}{2}} - \frac{1}{3T_{M1}}; \quad p_{2,3} = y_{2,3} - \frac{1}{3T_{M1}} = -\sqrt[3]{-\frac{\tilde{q}}{2}} - \frac{1}{3T_{M1}}. \quad (43)$$

Для того, щоб у системі існувало демпфування коливань необхідно й достатньо, щоб виконувалась умова:

$$-\frac{1}{3T_{M1}} < \sqrt[3]{-\frac{\tilde{q}}{2}} < \frac{1}{6T_{M1}}. \quad (44)$$

3. Якщо виконується умова

$$\left(\frac{\tilde{p}}{3} \right)^3 + \left(\frac{\tilde{q}}{2} \right)^2 < 0, \quad (45)$$

або

$$\left\{ -\frac{1}{9 \cdot T_{M1}^2} + \frac{\Omega_{12}^2}{3} \right\}^3 + \left\{ \frac{1}{27 \cdot T_{M1}^3} - \frac{\Omega_{12}^2}{6 \cdot T_{M1}} + \frac{\Omega_{12}^2}{2\gamma \cdot T_{M1}} \right\}^2 = 0, \quad (46)$$

тоді рівняння (34) має три дійсних кореня, які всі різні. При цьому $\tilde{p} < 0$ й:

$$y_1 = 2 \cdot \sqrt{-\frac{\tilde{p}}{3}} \cdot \cos \frac{\alpha}{3}; \quad y_{2,3} = -2 \cdot \sqrt{-\frac{\tilde{p}}{3}} \cdot \cos \left(\frac{\alpha}{3} \pm \frac{2\pi}{3} \right), \quad (47)$$

де $\cos \alpha = -\frac{\tilde{q}}{2\sqrt{-\left(\frac{\tilde{p}}{3}\right)^3}}$.

Тоді корені (33) набувають вигляду

$$p_1 = 2 \cdot \sqrt{-\frac{\tilde{p}}{3}} \cdot \cos \frac{\alpha}{3} - \frac{1}{3T_{M1}}; \quad p_2 = -2 \cdot \sqrt{-\frac{\tilde{p}}{3}} \cdot \cos \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{2\pi}{3} \right) - \frac{1}{3T_{M1}}; \quad (48)$$

$$p_3 = -2 \cdot \sqrt{-\frac{\tilde{p}}{3}} \cdot \cos \left(\frac{\alpha}{3} - \frac{2\pi}{3} \right) - \frac{1}{3T_{M1}}.$$

Для того, щоб у системі існував аперіодичний режим загасання її характеристик (M, ω_1, ω_2) , необхідно й достатньо, щоб виконувалась одночасно такі умови:

$$\begin{cases} 2 \cdot \sqrt{-\frac{\tilde{p}}{3}} \cdot \cos \frac{\alpha}{3} - \frac{1}{3T_{M1}} < 0; \\ -2 \cdot \sqrt{-\frac{\tilde{p}}{3}} \cdot \cos \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{2\pi}{3} \right) - \frac{1}{3T_{M1}} < 0; \\ -2 \cdot \sqrt{-\frac{\tilde{p}}{3}} \cdot \cos \left(\frac{\alpha}{3} - \frac{2\pi}{3} \right) - \frac{1}{3T_{M1}} < 0. \end{cases} \quad (49)$$

(Необхідно зазначити, що у випадку 1 існуватимуть загасаючі коливання системи з частотою $\Omega^* = \frac{\bar{A} - \bar{B}}{2} \cdot \sqrt{3}$).

Найтиповішою є ситуація, яка відповідає першому випадку. При цьому вплив параметрів електропривода на загасання коливань характеризує логарифмічний декремент:

$$\lambda = 2\pi \cdot \frac{\left| \left\{ -\frac{\bar{A} + \bar{B}}{2} - \frac{1}{3T_{M1}} \right\} \right|}{\Omega^*}. \quad (50)$$

При $\Omega^* \rightarrow 0$: $\lambda = \infty$, $\beta = \beta_{кр}$ (критичне значення) й перехідний процес у системі набуває аперіодичного характеру. Отже, залежність $\lambda = f(\beta)$ має вигляд, зображений на рис. 10 (крива 1). Розглядаючи цю криву, можемо впевнитись, що зміна жорсткості механічної характеристики є ефективним засобом зміни коливних властивостей системи.

При $J_2 \gg J_1$ (ї можна прийняти, що $J_2 \approx \infty$) подальше збільшення β у області $\beta > \beta_{кр}$ відповідно до (50) спричиняє монотонне зростання коефіцієнта загасання α :

$$\alpha = \left\{ \left[-\frac{\bar{A} + \bar{B}}{2} - \frac{1}{3T_{M1}} \right] \right\}, \quad (51)$$

оскільки друга маса коливань здійснювати не може ($J_2 \rightarrow \infty$). За скінченних значень J_2 й γ друга маса залучається у процес коливань, причому у разі жорсткого закріплення першої маси коливання, які виникають, не загасають. Відповідно, якщо прийняти, що $\beta \rightarrow \infty$ й $T_{M1} \rightarrow 0$, то у двомасовій системі демпфування повинно зменшуватись й $\lambda \rightarrow 0$. Залежність $\lambda = f(\beta)$ для двомасової пружної електромеханічної системи показана на рис. 10 (крива 2). Тут високий рівень демпфування відповідає вузькій області значень β , причому існує оптимальне значення β_{max} , за якого $\lambda = \lambda_{max}$.

Значення λ_{\max} залежать від конкретного сполучення параметрів електромеханічної системи, й за високого значення демпфування може існувати область значень β , яким відповідає $\lambda = \lambda_{\max} = \infty$.

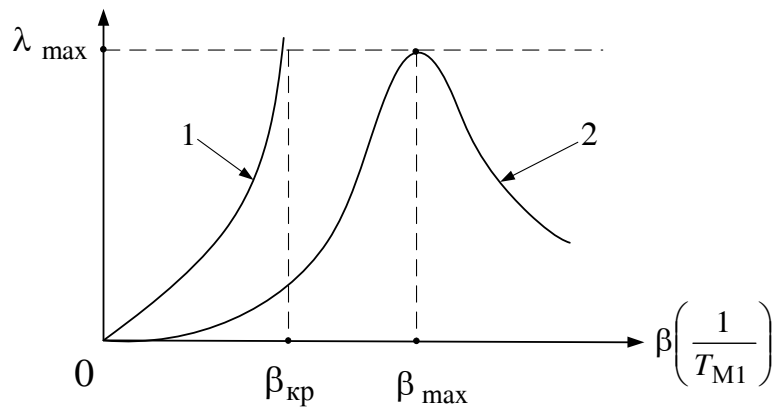


Рис.10. Характеристики демпфування двомасової системи

Висновки:

1. Запропонована адекватна модель узагальненої системи електропривода з двигуном, який має лінійну механічну характеристику (для варіантів дво- й тримасової моделі).
2. Встановлені основні закономірності, властиві реальним нелінійним електромеханічним системам у перехідних режимах їх функціонування (пуску/гальмування), а також допустимі відхилення роботи двигуна системи від його статичного стану.
3. Отримані результати можна застосовувати надалі для вдосконалення інженерних методів розрахунку подібних систем.

1. Голован А.Т. Основы электропривода. – М.;Л.: Госэнергоиздат, 1959. – 344с. 2. Андреев В.П., Сабинин Ю.А. Основы электропривода. – М.;Л.: Госэнергоиздат, 1963. – 722с. 3. Основы автоматизированного электропривода / М.Г.Чиликин, М.М.Соколов, В.М. Терехов, А.В.Шинянский. – М.: Энергия, 1974. – 567 с. 4. Чиликин М.Г., Ключев В.И., Сандлер А.С. Теория автоматизированного электропривода. – М.: Энергия, 1979. – 616 с. 5. Чиликин М.Г., Сандлер А.С. Обиций курс электропривода. – М.: Энергоиздат, 1981. – 576 с. 6. Башарин А.В., Голубев Ю.Н., Кепперман В.Г. Примеры расчета атоматизированного электропривода. – Л.: Энергия, 1972. – 440 с. 7. Вешеневский С.Н. Характеристики двигателей в электроприводе. – М.;-Л.: Энергия, 1977. – 432 с. 8. Копылов И.П. Электромеханические преобразователи энергии. – М.: Энергия, 1973. – 400 с. 9. Уайт Д., Вудсон Г. Электромеханическое преобразование энергии. – М.;Л.: Энергия, 1964. – 527 с. 10. Ключев В.И. Теория электропривода: Учебник для вузов. – М.: Энергоатомиздат, 1985. – 560 с. 11. Теория автоматического управления /Под ред. А.В.Нетушила. – М.: Высшая школа, 1968. – Ч. 1.– 424 с.; 1972. – Ч. 2. – 430 с. 12. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. – М.: Наука, 1972. – 450 с. 13. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1970. – 720 с.