

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДЛЯ ФОТОТЕПЛОВОЇ ДІАГНОСТИКИ З УРАХУВАННЯМ ТЕМПЕРАТУРНИХ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ ТЕПЛОФІЗИЧНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ МАТЕРІАЛІВ

© Демкович І.В., Петровська Г.А., Бобицький Я.В., 2008

I.V. Demkovytsch, H.A. Petrovska, Y.V. Bobytski

MATHEMATICAL MODELING FOR THE PHOTOTHERMAL DIAGNOSTICS AT CONSIDERATION OF THE TEMPERATURE DEPENDENCES OF THERMAL MATERIALS COEFFICIENTS

© Demkovytsch I.V., Petrovska H.A., Bobytski Y.V., 2008

Розроблено математичну модель розрахунку теплових полів та полів деформацій для фототеплової діагностики оптичних та теплофізичних характеристик матеріалів з урахуванням температурних залежностей коефіцієнта теплопровідності та теплоємності. Досліджено вплив температурних залежностей на результати моделювання теплових полів, що виникають у зразках під дією потужного лазерного випромінювання.

The mathematical model of the calculation of the thermal and deformation fields for photothermal diagnostics of optical and thermal characteristics of material at consideration temperature dependences of the heat conductivity and heat capacity was developed. The influence of the temperature dependences on results of modeling thermal fields, that appears in examples under intense laser emission was researched.

Вступ

У роботах [1–4] розроблені фототеплові методи діагностики оптичних та теплофізичних характеристик матеріалів за експериментально зареєстрованими тепловими полями чи полями деформацій, що виникають під час опромінення досліджуваного зразка потужним лазерним пучком з відомим просторово-часовим розподілом випромінювання. Методи ґрунтуються на математичній моделі, яка дає змогу моделювати температурні поля та поля поверхневих деформацій, однак, в розробленій моделі було прийнято, що теплофізичні характеристики досліджуваних матеріалів не залежать від температури. Проте, як відомо, характеристики багатьох матеріалів можуть істотно відрізнятися для різних значень температури, причому, ці зміни можуть бути як лінійними, так і нелінійними.

Отже, математичну модель необхідно будувати з врахуванням температурних залежностей характеристик матеріалів, оскільки вимірювання розробленими методами можуть проводитись в широкому діапазоні температур.

Математична модель розрахунку теплових полів та полів деформацій

У цій математичній моделі приймаємо, що теплофізичні та оптичні характеристики досліджуваного матеріалу залежать від температури.

Нехай на зразок протяжністю l_x та товщиною l_y падає лазерний пучок з розподілом інтенсивності у поперечному перерізі пучка, що відповідає поперечній моді випромінювання TEM_{mn} . [5].

Систему взаємозв'язаних рівнянь, які за певних початкових і граничних умов описують зміну у просторі і часі полів зміщень та температури, можна записати так [6]:

$$\begin{cases} \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} + 2 \text{grad } \mu \hat{\Pi}_e + \text{grad } I \text{ div } \mathbf{u} - \\ \text{grad} [(3\lambda + 2\mu)\alpha_T(T - T_0)] - \rho \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{F} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(I_q(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(I_q(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) + w_0 - c(T) r \frac{\partial T}{\partial t} - (3l + 2m)\alpha_T T_0 \text{div } \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

де T – температура зразка; T_0 – її початкове значення; \mathbf{u} – вектор зміщень; $\dot{\mathbf{u}}$, $\dot{\mathbf{F}}$, $\dot{\mathbf{u}}$ – похідні за часом; λ , m – коефіцієнти Ляме; $\text{grad } m \cdot \hat{\Pi}_e$ – скалярний добуток тензора деформації $\hat{\Pi}_e$ та вектора $\text{grad } \mu$; \mathbf{F} – об'ємні сили всередині зразка (джерело напружень); w_0 – питома об'ємна потужність; $c(T)$ – питома теплоємність; ρ – густина матеріалу зразка; $\lambda_q(T)$ – коефіцієнт теплопровідності; α_T – коефіцієнт теплового лінійного розширення, t – час.

Зазначимо, що рівняння (1) описує зміщення точок поверхні зразка під дією температурного поля, що описується рівнянням (2).

Якщо λ , μ , α_T є постійними величинами, а об'ємні сили $\mathbf{F} = 0$, то рівняння (1) набуде вигляду

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} - \mathbf{F}_T - \rho \dot{\mathbf{u}} = 0 \quad (3)$$

де $\mathbf{F}_T = (3l + 2m)\alpha_T \text{grad}(T - T_0)$ – об'ємні сили, які виникають у зразку під дією температурного поля [6].

Якщо знехтувати впливом деформаційних процесів на поле температури, то рівняння (2) можна спростити:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(I_q(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(I_q(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) + w_0 - c(T) r \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (4)$$

Переміщення у зразку, спричинені дією лазерного випромінювання, визначаються поетапно за допомогою розрахунку температурного поля на основі рівняння (4), а потім поля переміщень за допомогою рівняння (3).

Температурне поле визначають за таких граничних та початкових умов:

$$\mathbf{m}_q(T) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0}^{x=l_x} = a_k(T - T_c), \quad \mathbf{m}_q(T) \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}^{y=l_y} = a_k(T - T_c), \quad (5)$$

$$T|_{t=0} = T_0 \quad (6)$$

де T_c – температура зовнішнього середовища; a_k – коефіцієнт тепловіддачі.

Зміщення у зразку під дією температурного поля визначають за таких граничних та початкових умов:

$$\begin{cases} \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) = 0 \\ \mu \cdot 2 \frac{\partial u_2}{\partial y} + \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T(T - T_0) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$\mathbf{u}|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \quad (8)$$

Тут u_1 , u_2 – компоненти вектора зміщень.

Питому об'ємну потужність означимо так:

$$\omega_0 = I(x)k(y)k(t),$$

де $k(t)$ – часова залежність густини потужності лазерного випромінювання; $I(x) =$

$$= I_0 \left[H_i(\xi) \exp \left(- \left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} \right)^2 \right) \right]^2 = I_0 k(x) \text{ – просторовий розподіл густини потужності лазерного}$$

випромінювання вздовж координати x , який залежить від індексу поперечної моди лазерного випромінювання;

$$I_0 = \frac{I_{сеп}}{\frac{1}{l_x} \int_0^{l_x} k(x) dx}; \quad I_{сеп} = \frac{P_{сеп}}{S};$$

$P_{сеп}$ – середня потужність випромінювання на поверхні зразка; S – опромінювана площа; $H_i(\xi)$ – поліном Ерміта i -го порядку, $i = m = n$ – індекс поперечної моди лазерного випромінювання ТЕМ_{mn} [5] для осесиметричного пучка; $\xi = \sqrt{2} \frac{x - l_x / 2}{r_p}$.

Залежно від індексу поперечної моди i вибирається поліном Ерміта, зокрема, для $i = 0$: $H_i(\xi) = 1$; для $i = 1$: $H_i(\xi) = 2\xi$; для $i = 2$: $H_i(\xi) = 4\xi^2 - 2$ і т.д.

$$k(y) = (1 - R) \alpha(y, T) \exp \left(- \int_0^{l_y} a(h, T) dh \right),$$

де $\alpha(y) = \alpha_n(y) + \alpha_o(y)$ – коефіцієнт поглинання у зразку; $\alpha_n(y)$ – поглинання у поверхневому шарі; $\alpha_o(y)$ – поглинання в об'ємі матеріалу; R – коефіцієнт відбивання від поверхні зразка; η – змінна інтегрування.

Для розв'язання задачі (3)–(4) з граничними умовами (5)–(8) використано метод скінченних різниць [7].

Аналіз та порівняння математичних моделей

У роботах [3, 4] розроблено фототепловий метод вимірювання поглинання тонкоплівкових дзеркальних покриттів. Теоретичні та експериментальні дослідження в цих роботах виконували, зокрема, для лазерних дзеркал потужних газових лазерів. Дослідження таких дзеркал свідчать, що для реальних значень внутрішньорезонаторної потужності, яка діє на поверхню дзеркала, і при реальних значеннях поглинання тонкоплівкових покриттів (0,005–0,1 %) температура на поверхні дзеркала в центрі пучка може досягати значень 50–200 °С. Як матеріал для підкладок таких дзеркал традиційно використовують кварцове скло. З огляду на це, дослідження впливу температурних залежностей теплофізичних характеристик досліджуваного матеріалу на змодельовані розподіли температурного поля виконували для кварцового скла.

У роботі [8] наведені експериментальні температурні залежності коефіцієнта теплопровідності та теплоємності для кварцового скла. З цих експериментальних залежностей зрозуміло, що в інтервалі робочих температур, які можуть виникати під час фототеплових досліджень, зміни цих параметрів є істотними, що підтверджує необхідність врахування температурних залежностей під час моделювання теплових полів та полів деформацій. Інтерполяцією експериментальних кривих отримані такі функціональні залежності теплопровідності та теплоємності від температури в діапазоні температур 0–500 °С:

$$I(T) = 19,03456 + 0,09198 \cdot T - 5,77922 \cdot 10^{-5} \cdot T^2 \quad (9)$$

$$C(T) = 0,56644 + 6,9385 \cdot 10^{-4} \cdot T \quad (10)$$

На рис. 1 показані результати моделювання температурного поля, що виникає на поверхні резонаторного дзеркала неперервного аргонного лазера під дією внутрішньорезонаторної потужності. Моделювання виконували для постійних значень коефіцієнта теплопровідності та теплоємності (крива 1) та з врахуванням температурних залежностей цих параметрів $\lambda(T)$ та $C(T)$ (крива 2).

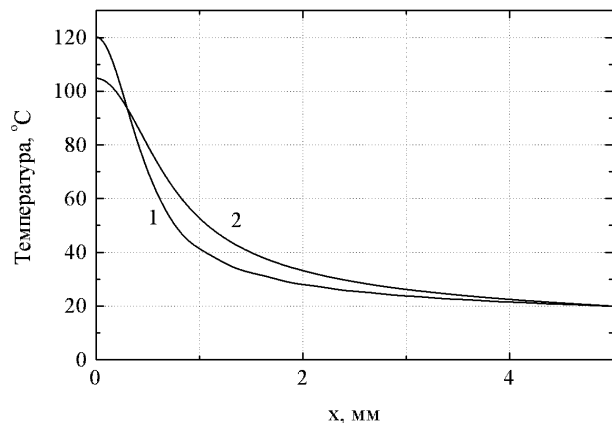


Рис. 1. Розподіл температури на поверхні дзеркала, розрахований без врахування (крива 1) та з врахуванням температурних залежностей $\lambda(T)$ та $C(T)$ (крива 2) (потужність лазерного випромінювання 100 Вт, діаметр пучка 2 мм, поверхнєве поглинання 0,02 %)

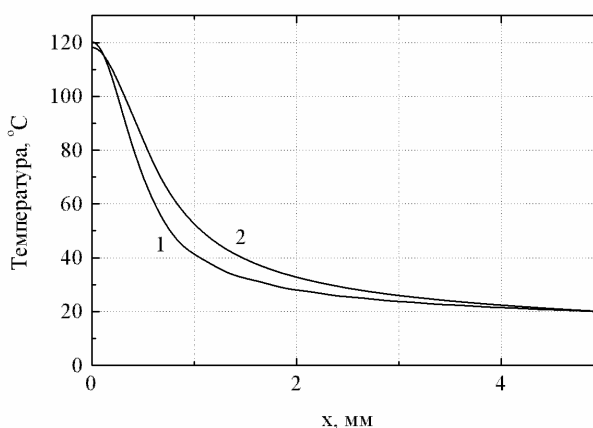


Рис. 2. Розподіл температури на поверхні кварцового зразка, розрахований без врахування (крива 1) та з врахуванням температурних залежностей $\lambda(T)$ та $C(T)$ (крива 2) (потужність лазерного випромінювання 100 Вт, діаметр пучка 2 мм, поверхнєве поглинання: крива 1 - 0,02 %; крива 2 - 0,03 %)

З рис. 1 очевидно, що розподіли температури на поверхні при однакових параметрах збуджуючого випромінювання та характеристиках досліджуваного зразка, отримані за допомогою різних моделей, відрізняються, причому, як свідчать результати числових експериментів, ця різниця збільшується із зростанням температури.

Результати моделювання, показані на рис. 2, свідчать також про те, що однакова температура на поверхні дзеркала в центрі лазерного пучка може відповідати різним коефіцієнтам поглинання залежно від вибраної моделі для розрахунку. Це підтверджує той факт, що точність вимірювання невідомого параметра фототепловими методами (зокрема, коефіцієнта поглинання) залежить від точності задання відомих характеристик досліджуваних матеріалів, а також врахування залежностей цих характеристик від температури. Очевидно також, що, наприклад, для вимірювання поглинання не можна як контрольний параметр використовувати лише температуру в центральній точці пучка, а необхідно контролювати повністю температурне поле у досліджуваному зразку. Саме тому в роботах [3, 4] поверхнєве поглинання вимірювали інтерференційним методом реєстрацією фазових змін, що виникають у пучку тестуючого лазера під час проходження його через наведене теплове поле. Це дозволяє фактично реєструвати інтегрально всю поглинуту потужність (енергію) на поверхні досліджуваного зразка.

Висновки

Розроблено математичну модель розрахунку теплових полів та полів деформацій для фототеплової діагностики оптичних та теплофізичних характеристик матеріалів, в якій враховуються залежності коефіцієнта теплопровідності та теплоємності досліджуваних матеріалів від темпе-

ратури. Врахування температурних залежностей дозволяє достовірніше моделювати температурні поля та поля деформацій, що виникають у зразках під дією потужного лазерного випромінювання. Використання розробленої моделі в фототеплових методах діагностики дозволить істотно підвищити точність вимірювання невідомих параметрів.

1. Петровська Г.А., Демкович І.В., Бобицький Я.В., Тоган М.М., Пашкевич Р.І. Комплексний метод визначення поглинання оптичних матеріалів // *Укр. фіз. журн.* – 2001. – Т. 46, № 8. – С. 893–898.
2. Petrovska G.A., Demkovych I.V., Bobitski Y.V. *Photothermal method for measurement of thermal and physical parameters of construction materials Proc. 1st International conference on advanced optoelectronics and lasers (CAOL'2003).* – Alushta, Crimea South Coast (Ukraine), 2003. – P. 150–152.
3. Петровська Г.А., Демкович І.В., Бобицький Я.В. Фототепловий метод визначення коефіцієнта поглинання дзеркальних покриттів // *Вісн. Нац. ун-ту “Львівська політехніка”.* – 2005. – № 532. – С. 170–177.
4. Petrovska H., Demkovych I., Bobitski Y. *The measurement photothermal method of mirrors covering absorption coefficient // Proc. 7th International Conference on Optical Technologies, Optical Sensors and Measuring Techniques OPTO 2006.* – Nürnberg, Germany 2006. – P. 147–152.
5. Довгий Я.О. *Оптические квантовые генераторы.* – К.: Вища шк., 1977. – 232 с.
6. Підстригач Я.С., Коляно Ю.М. та ін. *Термопружність тіл при змінних коефіцієнтах тепловіддачі.* – К.: Наук. думка, 1977. – 158 с.
7. Самарский А.А. *Теория разностных схем.* – М.: Наука, 1989.
8. Мачулка Г.А. *Лазерная обработка стекла.* – М.: Сов. радио, 1989.