УДК 330.43+336.764.2

Н.Л. Іващук
Національний університет “Львівська політехніка”

МОДЕЛЮВАННЯ ЦІН ГЕОМЕТРИЧНИХ АЗІЙСЬКИХ ОПЦІОНІВ ІЗ СТОХАСТИЧНИМ ДОХОДОМ БАЗОВОГО АКТИВУ

Досліджена сутність одного із різновидів похідних інструментів, а саме – азійських опціонів, які є представниками групи екзотичних опціонів. Розглянуто види азійських опціонів та їх інвестиційну привабливість для інвесторів. Визначено способи обчислення суми кінцевого платежу для азійських опціонів з правом купівлі та з правом продажу. Запропоновано метод визначення цін геометричних азійських опціонів із стохастичним доходом базового активу, зокрема наведено формули для опціонів з середньою ціною виконання та середнім опціонним курсом. Досліджено методи обчислення цін таких опціонів за дискретного та неперервного способів спостереження за ціною базового активу.

In article the essence of one of derivatives versions, namely, Asian options which are representatives of exotic options group is investigated. In work kinds of Asian options and their investment appeal to investors are considered. Ways of calculation of the sum of final payment for Asian options with the right of purchase and the right of sale are determined. The method of calculation of the geometrical Asian option prices from the stochastic income of the underlying asset is offered, namely formulas for average-price options and average-strike options. Methods of calculation of the prices of such options are investigated at a discrete and continuous way of supervision over the price of the underlying asset.

Постановка проблеми у загальному вигляді та її зв’язок з важливими науковими та практичними завданнями. У сучасній світовій економіці значно зросла роль похідних фінансових інструментів, які стали одним із найуспішніших способів страхування фінансових інвестицій від ризиків різної природи. Кожен ринковий суб’єкт прагне у своїй діяльності уникати негативного впливу непередбачуваних подій. Саме з цією метою були створені нові види фінансових інструментів, які називаються деривативами. До таких похідних інструментів зараховують опціонні контракти, які є інструментами як біржового, так і позабіржового обігу. Опціони, так як і ф’ючерси, купуються хеджерами для управління ризиками, однак на відміну від ф’ючерсів опціони не тільки забезпечують захист їхніх власників від несприятливих змін цін, але й зберігають для них можливість отримання вигоди за сприятливого руху ціни базового інструменту.

Аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано вирішення цієї проблеми. Дослідження сутності та основ функціонування стандартних опціонних контрактів здійснювало багато науковців, серед яких слід відзначити Ф. Блека, М. Шоулса [1], Дж. Гула [4], Р. Колба [5], Р. Мертона [7]. Натомість проблематику азійських опціонів для фіксованого або нульового доходу базового активу досліджували: Ґ. Ґастінеу [3], Е. Леві [6], М. Ніколс [9], М. Рубінштейн [10], Т. Ворст [11], П. Занґ [12], М. Зурак [13] та інші.

Цілі статті. Мета дослідження – визначити способи обчислення цін геометричних азійських опціонів, виставлених як базовий інструмент, дохід за яким описується розривною стрибкоподібною функцією.

Основний матеріал дослідження. Залежні від траєкторії опціони (path-dependent optons), які ще називають умовними опціонами, є найпопулярнішою групою деривативів серед екзотичних (нестандартних) опціонів. Умовні опціони здебільшого обертаються на позабіржових ринках, однак трапляються і в біржовому обігу. В останні роки відбулося значне зростання кількості таких похідних фінансових інструментів, що позитивно відобразилося на їхній ліквідності та обсягах обороту. А це, своєю чергою, призвело до зменшення спредів у ціні цих деривативів.

Азійські опціони (Asian options) є одними із найпопулярніших умовних опціонів, які купуються господарськими суб'єктами з метою хеджування своїх позицій. Переважну частину їхніх покупців становлять підприємства. Наприклад, у 2000 році вони становили 3/4 покупців [9, с. 49]. Назва цих деривативів походить від того, що першою інституцією, яка виставила їх на продаж, був Bankers Trust в Токіо [5, с. 608].

Спільною ознакою усіх азійських опціонів є залежність їхнього доходу не тільки від ціни базового активу у день виконання опціону, але й від середнього значення ціни у певний визначений період під час терміну дії опціону. Оскільки на величину середнього значення впливає багато даних зі спостережень за ціною базового активу, здійснених протягом певного проміжку часу, то вартість опціону залежатиме від історичних значень ціни базового активу протягом усього терміну дії опціону. Саме тому азійські опціони зараховуються до групи залежних від траєкторії опціонів. Точніше кажучи, – це екзотичні опціони, обумовлені середньою ціною базового активу [14].

Азійські опціони називають також ***опціонами середньої ціни***, або середнього значення чи ставки (average-price чи average rate options). До цієї групи деривативів також зараховують опціони з середньою ціною виконання (average-strike options), або ***середнім опціонним курсом***, ціна виконання яких не є фіксованою, наперед відомою величиною, як у разі стандартних опціонів, а залежною від траєкторії базового активу. Завдяки тому, що ціна таких опціонів не залежить від ціни базового активу виключно в один день, вони менш податливі маніпуляціям курсом базового активу з метою отримання вигоди. Дж. Гулл підкреслює, що опціони з середньою ціною виконання можуть гарантувати, що середня ціна, заплачена за базовий актив під час його регулярного обігу в даний період часу, не буде вищою від кінцевої ціни, а також за аналогією, що середня ціна, отримана за базовий актив, не буде нижчою, ніж кінцева ціна [4, с. 399]. Більше того, У. Леві звертає увагу на той факт, що на ринках, інструменти яких характеризуються високою змінністю, усереднення їх ціни дає змогу „згладжувати" різкі коливання цін [6, с. 474].

Якщо період спостереження за ціною базового активу збігається з терміном дії опціону, то такий інструмент називається ***повним*** ***азійським опціоном***. Натомість, якщо котирування базового активу, які використовуються до визначення середнього значення, вибираються тільки з деякого періоду часу протягом дії опціону, то такий похідний інструмент називається ***частковим*** ***азійським опціоном*** (partial Asian option).

Наступна класифікація азійських опціонів ґрунтується на частоті спостережень за ціною базового активу. Якщо моніторинг проводиться неперервно, тобто середня ціна визначається з усіх значень ціни базового активу, то такий похідний інструмент називається ***неперервним*** ***азійським опціоном*** (continuous Asian option). В обігу трапляються також і ***дискретні*** ***азійські опціони***, в яких спостереження за ціною базового активу здійснюються лише у наперед визначені моменти часу, наприклад, один раз на день, раз на три дні тощо.

В опціонному контракті можна зазначити один із двох способів визначення середньої ціни базового активу: середнє геометричне або середнє арифметичне. Якщо в опціонному контракті передбачається визначення середнього геометричного, то такий опціон називатимемо ***геометричним*** ***азійським опціоном*** (geometric Asian option), у випадку ж використання середнього арифметичного – ***арифметичним*** ***азійським опціоном*** (arithmetic Asian option). В обігу зустрічаються переважно інструменти, що ґрунтуються на середньому арифметичному, яке є більш читабельним для інвесторів. Однак оцінювання азійських опціонів, в основу яких покладено арифметичне середнє, є значно складнішим, ніж оцінювання опціонів, що ґрунтуються на геометричному середньому. Тому розглянемо детальніше геометричні азійські опціони.

Слід зазначити, що і середнє арифметичне, і середнє геометричне можуть мати характер простого значення (коли усім цінам приписуються однакові вагові коефіцієнти) або середньозваженого (коли окремим цінам базового активу приписуються різні вагові коефіцієнти). Розглянуті вищі опціони передбачають використання у функції виплати простого середнього значення. Натомість опціони, в основу функції виплати яких покладено середньозважене значення цін базового активу, називають ***еластичними азійськими опціонами*** (flexible Asian options). Такі деривативи характеризуються диверсифікованішими способами визначення середнього значення, яке є основою для обчислення величини кінцевого платежу за таким опціоном. Сторони опціонного контракту можуть узгодити деякі деталі угоди, як, наприклад, приписування окремим значенням ціни з наперед визначених дат різних вагових коефіцієнтів. У цьому разі обчислене значення буде середньозваженим.

Функція кінцевої виплати за ***азійським опціоном з середньою ціною*** має такий вигляд:

- для опціону з правом купівлі: $\max(S_{av} - K, 0)$;
- для опціону з правом продажу: $\max(K - S_{av}, 0)$;

де S_{av} – середня ціна базового активу протягом терміну дії опціону;

K – ціна виконання опціону.

Натомість для ***азійського опціону з середнім опціонним курсом*** функцію кінцевої виплати можна записати так:

- для опціону з правом купівлі: $\max(S_T - S_{av}, 0)$;
- для опціону з правом продажу: $\max(S_{av} - S_T, 0)$,

де S_T – ціна базового активу на ринку спот у момент погашення опціону T.

Загальновідомо, що першою моделлю оцінювання стандартних опціонів була модель Блека-Шоулса, яка давала змогу за деяких припущень визначити ціну стандартного європейського опціону купівлі акцій, на які не виплачувалися дивіденди, тобто базові активи не приносили доходу. Р. Мертон розширив класичну модель оцінювання опціонів Блека-Шоулса, включаючи випадок стохастичного доходу базового активу, який описується розривною стрибкоподібною функцією [7]. Як і в багатьох інших економічних моделях, розривність моделюється за допомогою процесу Пуассона. У моделі зроблено припущення, що дохід базового активу є розривною функцією, яка залежить від величини та частоти поступлень. Р. Мертон припустив, що базовому активу опціону відповідає такий стохастичний процес:

$$\frac{dS}{S} = (\mu - \lambda\zeta)dt + \sigma dz + dq, \text{ причому } \zeta = E(Y-1),$$

де μ – математичне сподівання для доходу базового активу без стрибків;

σ – стандартне відхилення для доходу базового активу без стрибків;

z – стандартний процес Гаусса-Вінера;

q – незалежний процес Пуассона, причому dz і dq припускаються незалежними;

λ – середня кількість поступлень доходу на одиницю часу;

$(Y-1)$ – зміна процентної частки випадкової змінної у ціні базового активу, якщо існує пуассонівський випадок;

E – оператор математичного сподівання від випадкової змінної Y, $Y \geq 0$;

$\{Y\}$ – множина стрибків, які є незалежними та ідентично розподіленими.

За описаних вище припущень Р. Мертон отримав такий вираз для оцінювання стандартного європейського опціону купівлі з ціною виконання K:

$$\pi_{\lambda,Y}(C_{bs}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^n}{n!} E_n\left[C_{bs}\left(SY_n e^{-\lambda\zeta\tau}, K, \tau, r, \sigma\right)\right], \qquad (1)$$

де Y_n має такий самий розподіл, як добуток n незалежних та ідентично розподілених випадкових змінних Y, $Y_0 = 1$;

E_n – оператор математичного сподівання від розподілу Y_n;

$C_{bs}(W, K, \tau, r, \sigma)$ – стандартна формула Блека-Шоулса для європейського опціону купівлі акцій зі спотовою ціною W та ціною виконання K;

τ – час до погашення опціону;

r – фіксована відсоткова ставка без ризику;

σ – змінність ціни (значення) базового активу.

За аналогією отримаємо формулу для оцінювання стандартного європейського опціону з правом продажу базового активу:

$$\pi_{\lambda,Y}(P_{bs}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^n}{n!} E_n\left[P_{bs}\left(SY_n e^{\lambda\xi\tau}, K, \tau, r, \sigma\right)\right], \quad (2)$$

$$\xi = E(1-Y),$$

де $P_{bs}(W, K, \tau, r, \sigma)$ – стандартна формула Блека-Шоулса для європейського опціону продажу акцій зі спотовою ціною W та ціною виконання K.

Використовуючи теорію стохастичних процесів зі стрибками, викладену в монографії [2], яка математично обґрунтовує і розвиває зокрема підхід Мертона до розширення класичної моделі Блека-Шоулса на випадок стохастичної стрибкоподібної функції доходу за базовими активами, розробимо нові економіко-математичні моделі для геометричних азійських опціонів європейського стилю виконання.

Дослідимо спочатку дискретний процес спостереження за ціною базового активу. Загальновідомо, що стандартне середнє геометричне з n додатних значень $a_1, a_2, ..., a_n$ обчислюється за формулою

$$GA(n) = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}}, \ i = 1,2,3,...,n, \quad (3)$$

де n – кількість спостережень; a_i – значення i-го спостереження.

Згідно з припущеннями моделі Блека-Шоулса ціна базового активу $S(\tau)$ описується геометричним броунівським рухом з дивідендною ставкою g. Тоді ціну базового активу у будь-який момент часу T між теперішнім часом t і деяким часом у майбутньому t^* можна описати таким виразом:

$$S(T) = S\exp\left[\left(r - g - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma z(T)\right], \quad (4)$$

де t – теперішній час (момент укладання опціонного контракту), $t < T < t^*$;

t^* – час до погашення опціону;

S – ціна спот (значення) базового активу у початковий момент часу;

g – фіксована дохідність базового активу (для випадку стрибкоподібної функції доходу базового активу $g = 0$).

Слідуючи моделі Блека-Шоулса, припустимо, що кожна з n цін описується рівнянням броунівського руху (4) з частотою спостережень h, що можна записати у вигляді

$$a_i = S[\tau - (n-i)h] = S\exp\left\{\left(r - g - \frac{1}{2}\sigma^2\right)[\tau - (n-i)h] + \sigma z[\tau - (n-i)h]\right\}, \quad (5)$$

де $i = 1,2,...,n$, h – частота спостережень; $\tau = t^* - t$ – час до погашення опціону.

З рівняння (5) зрозуміло, що період усереднення ціни починається у момент першого спостереження ($i = 1$), тобто у момент $T = \tau - (n-1)h$, і закінчується у момент останнього спостереження ($i = n$), тобто у момент $T = \tau$. Якщо усереднені значення описуються рівнянням (5), то натуральний логарифм від $GA(n)/S$ (тобто $\ln[GA(n)/S]$) матиме нормальний розподіл з дисперсією $\sigma^2 T_{n-j}^{sa}$ та середнім часом:

$$\left(r - g - \sigma^2/2\right)T_{\mu,n-j}^{sa} + \ln B^{sa}(S, j), \quad B^{sa}(S,0) = 1,$$

$$B^{sa}(S, j) = \left(\prod_{i=1}^{j} \frac{S[\tau - (n-i)h]}{S}\right)^{\frac{1}{n}},$$

для $1 \le j \le n$, $T_{\mu,n-j}^{sa} = \dfrac{n-j}{n}\left[\tau - \dfrac{h(n-j-1)}{2}\right]$, $T_{n-j}^{sa} = \tau\left(\dfrac{n-j}{n}\right)^2 - \dfrac{(n-j)(n-j-1)(4n-4j+1)}{6n^2}h$,

де n – кількість спостережень, зазначена у контракті;

$T_{\mu,n-j}^{sa}$ – функція ефективного середнього часу для геометричного опціону;

T_{n-j}^{sa} – функція дисперсійного часу (змінності часу) для геометричного опціону;

h – частота спостережень або часовий інтервал між двома спостереженнями;

$B(S, j)$ – середнє геометричне значення.

Дослідимо вплив стрибкоподібної функції доходу базового активу на формування ціни ***<u>дискретного</u> геометричного азійського опціону з середньою ціною*** європейського стилю виконання. Враховуючи формули (1)–(2), а також той факт, що усереднені значення описуються рівнянням (5), ціну такого опціону можна обчислити за допомогою таких формул:

- для опціонів з правом купівлі

$$\pi_{\lambda,Y}\left(c_0^{sa}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^n}{n!} E_n\left[c_0^{sa}\left(SY_n e^{-\lambda\zeta\tau}, K, \tau, r, \sigma\right)\right],$$

$$c_0^{sa}(W, K, \tau, r, \sigma) = WA^{sa}(j) N\left(d_{n-j}^{sa} + \sigma\sqrt{T_{n-j}^{sa}}\right) - K\exp[-r\tau] N\left(d_{n-j}^{sa}\right);$$

- для опціонів з правом продажу

$$\pi_{\lambda,Y}\left(p_0^{sa}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^n}{n!} E_n\left[p_0^{sa}\left(SY_n e^{\lambda\xi\tau}, K, \tau, r, \sigma\right)\right],$$

$$p_0^{sa}(W, K, \tau, r, \sigma) = -WA^{sa}(j) N\left(-d_{0,n-j}^{sa} - \sigma\sqrt{T_{n-j}^{sa}}\right) + K\exp[-r\tau] N\left(-d_{0,n-j}^{sa}\right),$$

$$A^{sa}(j) = \exp\left[-r\left(\tau - T_{\mu,n-j}^{sa}\right) - \sigma^2\left(T_{\mu,n-j}^{sa} - T_{n-j}^{sa}\right)/2\right] B^{sa}(W, j),$$

$$d_{0,n-j}^{sa} = \left\{\ln\left(\frac{W}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T_{\mu,n-j}^{sa} + \ln\left[B^{sa}(W, j)\right]\right\} \Big/ \left(\sigma\sqrt{T_{n-j}^{sa}}\right),$$

де $N(.)$ – функція стандартизованого нормального розподілу випадкової змінної.

А тепер розглянемо **неперервний процес** моніторингу ціни (значення) базового активу. Неперервне середнє арифметичне ціни базового активу $S(\tau)$ між деяким моментом часу у майбутньому s та моментом погашення опціону t^* можна обчислити за допомогою такої інтегральної формули:

$$CAA(s, t^*) = \frac{1}{t^* - s}\int_s^{t^*} S(T)\,dT.$$

За аналогією, неперервне череднє геометричне ціни базового активу $S(\tau)$ між деяким моментом часу у майбутньому s та моментом погашення опціону $t*$ можна обчислити за допомогою такої формули:

$$CGA(s,t*) = \exp\left\{ \frac{1}{t*-s} \int_{s}^{t*} \ln[S(T)]dT \right\}.$$

Якщо в останню формулу підставити вираз (5), то отримаємо

$$CGA(s,t*) = S\exp\left\{ \left(r - g - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \frac{\tau}{2} + \frac{\sigma}{t*-s} \int_{s}^{t*} z(T)dT \right\}.$$

Знайдемо формули для визначення цін ***неперервного*** ***геометричного азійського опціону з середньою ціною*** європейського стилю виконання, зі стрибкоподібною функцією доходу базового активу. Якщо період усереднення ціни базового активу є неперервним і розпочинається у даний момент часу t , то ціну такого опціону можна описати за допомогою таких формул:

− для опціонів з правом купівлі

$$\pi_{\lambda,Y}\left(c_0^{csa}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^n}{n!} E_n\left[c_0^{csa}\left(SY_n e^{-\lambda\zeta\tau}, K, \tau, r, \sigma\right)\right],$$

$$c_0^{csa}(W, K, \tau, r, \sigma) = W\exp\left[-\left(r\tau + \frac{\sigma^2}{6} \right) \Big/ 2 \right] N\left(d_0^{csa} + \sigma\sqrt{\frac{\tau}{3}} \right) - K\exp[-r\tau]N\left(d_0^{csa}\right);$$

− для опціонів х правом продажу

$$\pi_{\lambda,Y}\left(p_0^{csa}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^n}{n!} E_n\left[p_0^{csa}\left(SY_n e^{\lambda\xi\tau}, K, \tau, r, \sigma\right)\right],$$

$$p_0^{csa}(W, K, \tau, r, \sigma) = -W\exp\left[-\left(r\tau + \frac{\sigma^2}{6} \right) \Big/ 2 \right] N\left(-d_0^{csa} - \sigma\sqrt{\frac{\tau}{3}} \right) + K\exp[-r\tau]N\left(-d_0^{csa}\right),$$

$$d_0^{csa} = \left[\ln\left(\frac{W}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)\frac{\tau}{2} \right] \Big/ \left(\sigma\sqrt{\frac{\tau}{3}} \right).$$

Для того, щоб здійснити оцінювання азійського опціону з середнім геометричним ціни виконання, тобто ***геометричного азійського опціону з середнім опціонним курсом***, необхідно знайти коефіцієнт кореляції ρ між логарифмічно-нормально розподіленим доходом базового активу та логарифмічно-нормально розподіленим доходом середнього геометричного, описаного формулою (3). Значення коефіцієнта кореляції можна обчислити на підставі такого виразу:

$$\rho = \frac{\left\{ \sigma^2 + \left[r - g - \frac{1}{2}\sigma^2 \right]\tau \right\}\left(\tau - \frac{n-1}{2}h \right) - \left[r - g - \frac{1}{2}\sigma^2 \right]^2 \tau T_{\mu,n-j}^{sa}}{\sigma^2\sqrt{\tau T_{n-j}^{sa}}}.$$

Розглянемо спочатку **дискретний спосіб** спостереження за ціною базового активу. Ціну ***дискретного*** ***геометричного азійського опціону з середнім опціонним курсом*** європейського стилю реалізації, із стрибкоподібною функцією доходу базового активу можна обчислити за допомогою таких формул:

− для опціонів з правом купівлі

$$\pi_{\lambda,Y}\left(c_0^{ka}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^n}{n!} E_n\left[c_0^{ka}\left(SY_n e^{-\lambda\zeta\tau}, \tau, r, \sigma\right)\right],$$

$$c_0^{ka}(W, \tau, r, \sigma) = W\left\{ N\left(D_{0,g1}\right) - A^{sa}(j)N\left(D_{0,g2}\right) \right\};$$

– для опціонів з правом продажу

$$\pi_{\lambda,Y}\left(p_0^{ka}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^n}{n!}E_n\left[p_0^{ka}\left(SY_n e^{\lambda\xi\tau},\tau,r,\sigma\right)\right],$$

$$p_0^{ka}(W,\tau,r,\sigma)=-W\left\{N\left(-D_{0,g1}\right)-A^{sa}(j)N\left(-D_{0,g2}\right)\right\},$$

$$D_{0,g2}=\left\{-\ln\left[B^{sa}(W,\ j)\right]+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\left(\tau-T_{\mu,n-j}^{sa}\right)+\sigma^2\left(\rho\sqrt{\tau T_{n-j}^{sa}}-1\right)\right\}\Big/\left[\sigma\sqrt{\tau_e}\right],$$

$$D_{0,g1}=D_{0,g2}+\sigma\sqrt{\tau_e}\ ,\ \tau_e=\tau-2\rho\sqrt{\tau T_{n-j}^{sa}}+T_{n-j}^{sa}\,.$$

Натомість за **неперервного способу** спостереження за ціною базового активу ціну ***неперервного*** ***геометричного азійського опціону з середнім опціонним курсом*** європейського стилю реалізації, із стрибкоподібною функцією доходу базового активу можна обчислити за допомогою таких формул:

– для опціонів з правом купівлі

$$\pi_{\lambda,Y}\left(c_0^{cka}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^n}{n!}E_n\left[c_0^{cka}\left(SY_n e^{-\lambda\zeta\tau},\tau,r,\sigma\right)\right],$$

$$c_0^{cka}(W,\tau,r,\sigma)=W\left\{N\left(D_{0,cg1}\right)-\exp\left[-\left(r\tau+\frac{\sigma^2}{6}\right)\Big/2\right]N\left(D_{0,cg2}\right)\right\};$$

– для опціонів з правом продажу

$$\pi_{\lambda,Y}\left(p_0^{cka}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^n}{n!}E_n\left[p_0^{cka}\left(SY_n e^{\lambda\xi\tau},\tau,r,\sigma\right)\right],$$

$$p_0^{cka}(W,\tau,r,\sigma)=-W\left\{N\left(-D_{0,cg1}\right)-\exp\left[-\left(r\tau+\frac{\sigma^2}{6}\right)\Big/2\right]N\left(-D_{0,cg2}\right)\right\},$$

$$D_{0,cg2}=\left[\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{\tau}{2}+\sigma^2\left(\frac{\tau}{2}-1\right)\right]\Big/\left(\sigma\sqrt{\frac{\tau}{3}}\right),\ D_{0,cg1}=D_{0,cg2}+\sigma\sqrt{\frac{\tau}{3}}\ .$$

Аналіз світового ринку деривативів за останні роки показав, що азійські опціони є особливо популярними на позабіржових товарних ринках. Вони є інвестиційно-привабливими інструментами як для продавців, так і для покупців цих деривативів, з огляду на те, що зменшують змінність ціни базового активу. Внаслідок цього знижується ризик можливості втрат інвестора у разі несприятливих для нього, у тому числі спекулятивних змін на готівковому ринку, тобто зменшується ймовірність того, що придбаний опціон закінчить своє життя у позиції „без грошей”.

У зв’язку з тим, що азійські опціони є менш ризикованими для їхніх емітентів, вони характеризуються теоретично нижчими опціонними преміями порівняно зі своїми стандартними аналогами. Однак на практиці ці деривативи не завжди бувають дешевшими [8, с. 53]. Загалом тут діє певне правило: азійські опціони купівлі майже завжди дешевші від стандартних опціонів, натомість азійські опціони продажу переважно дорожчі від своїх стандартних аналогів [13, с. 284–285]. Це пояснюється тим, що змінність середнього значення базового активу є нижчою, ніж змінність його ціни, а також тим, що майбутнє значення середньої ціни є переважно нижчим від майбутнього значення ринкової ціни, що впливає на зниження ціни опціону типу купівлі і підвищення ціни опціону типу продажу.

Висновки та перспективи подальших досліджень. Екзотичні опціони зустрічаються на строковому ринку рідше від своїх класичних аналогів, однак використовуються насамперед при операціях на дуже великі суми, для яких класичні способи хеджування стають невигідними. Замість хеджування позиції складними комбінаціями стандартних опціонів, моніторингу їхніх ринкових цін, здійснення зміни стратегії хеджування і проведення великої кількості інших супровідних операцій, вигіднішим може виявитися продаж (або купівля) опціону спеціального типу, який би відповідав вимогам іншої сторони опціонного контракту.

Ринок деривативів, враховуючи прискорений темп глобалізації фінансових оборотів, концентрацію банків і все частішу появу особливо великих контрактів, має перспективи розвитку. Банки та інші фінансові інституції, як правило, утримують цілий штат спеціалістів та експертів, які спеціалізуються на трансакціях з похідними фінансовими інструментами і мають у своєму розпорядженні великий потенціал математичного та програмного забезпечення для грамотного проведення операцій на строковому ринку, у тому числі світовому. Завдяки цьому спреди (різниці між курсами купівлі і продажу) екзотичних опціонів будуть зменшуватися, а ліквідність – підвищуватися. При цьому важливим моментом є правильне встановлення ціни опціонів, яку можна прогнозувати, використовуючи математичні моделі оцінювання таких деривативів.

1. Black F., Scholes M.J. The Pricing of Options and Corporate Liabilities// Journal of Political Economy. – № 3(81), 1973. – P. 637–654. 2. Cont R., Tankov P. Financial Modelling With Jump Processes. Chapman & Hall/ CRC, 2004. – 527 p. 3. Gastineau G. An Introduction to Special-Purpose Derivatives: Path-Dependent Options// The Journal of Derivatives, 1993. – №1(2). – P. 78–86. 4. Hull J.C. Options, futures and other derivatives. Fourth edition, Prentice-Hall International Inc., Upper Saddle River. – 2000. – 698 p. 5. Kolb R.W. Futures, Options and Swaps. Blackwell Publishing, Padstow. – 2003. – 877 p. 6. Levy E. Pricing European Average Rate Currency Options// Journal of International Money and Finance. – 1992. – № 11. – P.474–491. 7. Merton R. Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discontinuous // Journal of Financial Economics. – 1976. – № 3. – P.125–144. 8. Nichols M. In Praise of the Average // Risk. – 1996. – № 9(5). 9. Parsley M. The Last Piece of the Jigsaw// Euromoney. – November. – 1993. 10. Rubinstein M. Asian options// Risk. – 1991. – № 4(3). 11. Vorst T. Averaging Options / The handbook of exotic options: instruments, analysis and application. McGraw-Hill Book Company. – New York, 1996. 12. Zhang P. Exotic Options. A Guide to Second Generation Options. World Scientific. Singapore. – New Jersey-London-Hong Kong, 2001, – 692 p. 13. Zurack M.A. Application of OTC Options and Other Structure Product // Francis J.C., Toy W.W., Whittaker J.G. The handbook of equity derivatives, John Wiley & Sons Inc. – New York. – 2000. 14. Іващук Н.Л. Сутність та різновиди азіатських опціонів // „Економіка: проблеми теорії та практики”. – Дніпропетровськ, 2007. – Вип. 224, Т. 2, 2007. – С.484–495.