

Л. Журавчак
Карпатське відділення Інституту геофізики
ім. С. І. Субботіна НАН України

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНОГО ПРОЦЕСУ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ПРИГРАНИЧНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ РІЗНИХ ТИПІВ

© Журавчак Л., 2009

Обґрунтовано ефективність непрямого методу приграничних елементів для побудови і числово-аналітичного розв'язування систем граничних інтегральних рівнянь, до яких зводиться нестационарний процес теплопровідності в однорідних областях довільної форми. Це дало змогу порівняно з непрямим методом граничних елементів послабити сингулярність граничних інтегральних рівнянь, спростити побудову дискретно-континуальних моделей та істотно підвищити точність обчислення шуканої температури поблизу меж об'єктів. Розглянуто використання приграничних елементів (ПГЕ) чотирьох типів (шестигранники з неплоскими гранями, криволінійні плоскі чотирикутники, сімейства кривих і точок) для знаходження нестационарного теплового поля. Проведено теоретичний і числовий аналіз пропонувананих підходів. Показано, що для оптимально вибраної товщини приграничної області точність обчислення температури на границях круга і квадрата є вищою під час використання чотирикутників та сімейств дуг, покращується при збільшенні кількості дуг і точок та поєднанні різних типів ПГЕ (зокрема, чотирикутників і сімейств дуг).

The efficiency of indirect method of near-boundary elements in constructing and numerical-analytical solving of systems of boundary integral equations, the non-stationary process of heat-conductivity in the homogeneous domains of arbitrary shape reduces to, has been proven. The method enabled, as compared to indirect method of boundary elements, to reduce the singularity of boundary integral equations, to simplify the constructing of discrete-continual models and to significantly improve accuracy of temperature calculations near the domain's boundaries. Near-boundary elements (NBE) of four types (hexahedrons with non-planar faces, curvilinear flat quadrangles, and families of curves and points) have been compared in estimation of non-stationary thermal field. Theoretical and numerical analysis of the elements has been conducted. It has been shown that, in the case of optimally chosen thickness of near-boundary domain, accuracy of temperature estimations on the boundary of circle and square was better when quadrangles and families of curves were used, improved with the increase of the number of curves and points and when combinations of different types of NBE (in particular, quadrangles and families of curves) were used.

Вступ

Зниження матеріаломісткості елементів конструкцій, що працюють в умовах температурних навантажень, оцінка їх міцності та надійності потребує розвитку відомих і розроблення нових теоретичних методів знаходження нестационарних теплових полів в областях складної форми та проведення на цій основі ґрунтовних наукових досліджень. Оскільки аналітичні розв'язки нестационарних задач теплопровідності класичними методами можна знайти тільки для однорідних областей канонічної чи близької до неї форми, то для об'єктів довільної форми при математичному моделюванні в останні роки все ширше використовують числові та числово-аналітичні методи, орієнтовані на застосування сучасних швидкодіючих комп'ютерів. Використання методу граничних

інтегральних рівнянь (МГІР) [1–3] та створених на його основі прямих і непрямих методів граничних елементів [4,5] має низку незаперечних переваг при моделюванні процесів в однорідних середовищах, оскільки дає змогу точно задовольняти вихідні рівняння моделі, доступно описує необмежені і напівбезмежні об'єкти. Застосування МГІР та усіх його числових модифікацій потребує дискретизації тільки межі об'єкта, що економить обсяг оперативної пам'яті під час роботи алгоритму і дає порівняно високу точність розрахунків у внутрішніх точках. Однак при обчисленні температури поблизу межі тіла точність розрахунків різко зменшується [6], а знаходження теплового потоку вимагає попереднього аналітичного виділення особливості (головного значення). З огляду на це в багатьох випадках, на нашу думку, доцільно застосовувати непрямий метод приграничних елементів (НМПГЕ), який можна розглядати як один з варіантів методу джерела і віднести до непрямих методів досліджень, оскільки введені для одержання розв'язку задачі невідомі не є фізичними змінними [7–9].

Для побудови інтегрального зображення розв'язку нестационарного рівняння теплопровідності у статті використано приграничні елементи чотирьох типів та дві покрокові схеми. Дискретно-континуальну модель для знаходження інтенсивностей невідомих джерел, введених у ПГЕ і апроксимованих поліномами за часом, зведено до СЛАР, утвореної внаслідок задоволення в колокаційному сенсі граничних умов. Здійснено аналітичне інтегрування за часом та частково-аналітичне за координатами інтегралів, що складають матрицю СЛАР та її праву частину. За допомогою комп'ютерного моделювання порівняно теоретичні й обчислювальні аспекти розв'язків двовимірних нестационарних задач теплопровідності.

Математична модель для знаходження теплового поля

Розглянемо однорідне ізотропне тіло довільної форми, яке віднесено до декартової системи координат x_1, \dots, x_n і займає область $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ($n=2,3$). Для знаходження температури $\theta(x, \tau)$ запишемо рівняння

$$\mathbf{P}_{0\tau}(\theta(x, \tau)) = \Delta \theta(x, \tau) - \frac{1}{a} \frac{\partial \theta(x, \tau)}{\partial \tau} = -\psi(x, \tau), (x, \tau) \in \Omega \times \mathbf{T}, \quad (1)$$

граничні умови першого й другого роду

$$\theta(x, \tau) = \theta_{\Gamma}(x, \tau), (x, \tau) \in \partial\Omega^{(1)} \times \mathbf{T}, \quad q(x, \tau) = -\lambda \frac{\partial \theta(x, \tau)}{\partial \mathbf{n}(x)} = q_{\Gamma}(x, \tau), (x, \tau) \in \partial\Omega^{(2)} \times \mathbf{T}, \quad (2)$$

та початкові умови

$$\theta(x, 0) = \theta_0(x), x \in \Omega, \quad (3)$$

де Δ – оператор Лапласа, $\mathbf{T} = \{\tau | 0 < \tau < \infty\}$, τ – час, $x = (x_1, \dots, x_n)$, a, λ – коефіцієнти температуро- та теплопровідності, $\cup_{q=1}^2 \partial\Omega^{(q)} = \partial\Omega$; $\partial\Omega^{(1)} \cap \partial\Omega^{(2)} = \emptyset$, $\partial\Omega$ – границя області Ω , яка є кривою або поверхнею Ляпунова, $\mathbf{n}(x) = (\mathbf{n}_1(x), \dots, \mathbf{n}_n(x))$ – вектор зовнішньої одиничної однозначно визначеної нормалі до границі $\partial\Omega$. Зрозуміло, що окрім наведених граничних умов, можна розглядати також їхні лінійні комбінації. Оскільки це не викликає принципових відмінностей, але дещо ускладнює структуру викладу, ми їх описувати не будемо.

Основні положення НМПГЕ. Побудова інтегральних зображень розв'язків початково-крайової задачі та граничних інтегральних рівнянь

Висвітлимо основні положення НМПГЕ [7]. З цією метою розглянемо область $B \subset \mathbf{R}^n$ таку, що $\Omega \subset B$, $\partial\Omega \cap \partial B = \emptyset$. Уведемо зовнішню приграничну область $G = B \setminus \Omega$ з невідомою функцією $\varphi(x, \tau)$, яка описує розподіл фіктивних джерел, а також з метою забезпечення монотонної зміни функції $\theta_0(x)$ під час переходу через границю $\partial\Omega$ розглянемо розширену область початкової умови Ω_0 ($\Omega \subset \Omega_0 \subset \mathbf{R}^n$, $\partial\Omega \cap \partial\Omega_0 = \emptyset$) з відомою неперервною функцією $f_0(x)$, яка збігається з

$\theta_0(x)$ в $\Omega \cup \partial\Omega$, дорівнює нулю ззовні Ω_0 , а в області $\Omega_0 \setminus (\Omega \cup \partial\Omega)$ вибирається у зручному для інтегрування вигляді. Після розширення області визначення функції $\theta(x, \tau)$ на весь \mathbf{R}^n , рівняння (1) перепишемо у вигляді

$$\mathbf{P}_{0\tau}(\theta(x, \tau)) = -\varphi(x, \tau)\chi_G - \psi(x, \tau) - f_0(x)\delta(\tau), \quad (x, \tau) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{T}, \quad (4)$$

де χ_G – характеристична функція області G , тобто $\chi_G=1$ при $x \in G$, $\chi_G=0$ при $x \notin G$; $\delta(z)$ – дельта-функція Дірака.

Встановимо справедливості твердження.

Теорема. Нехай задано зовнішню приграничну до Ω область G та область розширених початкових умов Ω_0 із введеними в них джерелами $\varphi(x, \tau)$ та функцією $f_0(x)$. Шукана фізична величина описується рівняннями (4), причому для оператора $\mathbf{P}_{0\tau}(\theta(x, \tau))$ існує й відомий фундаментальний розв'язок $U(x, \tau, \xi, \xi_4)$. Тоді інтегральні зображення температури як розв'язок рівняння (1) та теплового потоку з урахуванням початкового розподілу (3) мають вигляд:

$$\theta(x, \tau) = \mathbf{F}_\tau(x, \tau, U) + b_\tau(x, \tau, U), \quad (x, \tau) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{T}, \quad q(x, \tau) = \mathbf{F}_\tau(x, \tau, Q) + b_\tau(x, \tau, Q), \quad (5)$$

де $\mathbf{F}_\tau(x, \tau, \Phi) = \int_0^\tau \int_G \Phi(x, \tau, \xi, \xi_4) \varphi(\xi, \xi_4) dG(\xi) d\xi_4$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n$, $\xi_4 \in T$,

$$b_\tau(x, \tau, \Phi) = a \int_0^\tau \int_{\Omega} \Phi(x, \tau, \xi, \xi_4) \psi(\xi, \xi_4) d\Omega(\xi) d\xi_4 + \int_{\Omega_0} \Phi(x, \tau, \xi, 0) f_0(\xi) d\Omega_0(\xi),$$

$$U(x, \xi, \tau, \xi_4) = \frac{1}{[4\pi a(\tau - \xi_4)]^{n/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4a(\tau - \xi_4)}\right), \quad r^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2, \quad y_i = x_i - \xi_i,$$

$$Q(x, \tau, \xi, \xi_4) = -\lambda \frac{\partial U(x, \tau, \xi, \xi_4)}{\mathbf{n}(x)} = \lambda \sum_{l=1}^n \frac{U(x, \tau, \xi, \xi_4) y_l}{2a(\tau - \xi_4)} \mathbf{n}_l(x).$$

Для доведення цієї теореми розглянемо відповідну реальній нову задачу, для якої область Ω та її границя $\partial\Omega$ поміщені в необмежені площину чи простір з того самого матеріалу. Вважатимемо, що граничні значення температури та теплового потоку нової задачі точно збігаються з розв'язками реальної. Врахуємо також заданий розподіл джерел на одиницю площі чи об'єму $\psi(\xi, \xi_4)$ та початковий розподіл $f_0(\xi)$. З метою більшої ясності для опису місцезнаходження джерел всередині області використаємо нові координати ξ, ξ_4 , аналогічні x, τ , причому початок системи ξ збігається з початком координат x . Тепер введемо фіктивні джерела невідомої наперед інтенсивності $\varphi(\xi, \xi_4)$ в розрахунок на одиницю площі чи об'єму області G , використовуючи координати ξ, ξ_4 для відповідних точок розміщення джерел в області G .

Фундаментальний розв'язок рівняння (1), який покладемо в основу подальшого аналізу, є значенням шуканої температури $\theta(x, \tau)$ в довільній точці спостереження x в момент часу τ , яке зумовлене миттєвим одиничним джерелом інтенсивності $e(\xi, \xi_4)$, розташованим у точці розміщення джерела ξ в момент часу ξ_4 . Отже, класичні сингулярні розв'язки запишемо у вигляді [10]:

$$\theta(x, \tau) = U(x, \tau, \xi, \xi_4) e(\xi, \xi_4), \quad q(x, \tau) = Q(x, \tau, \xi, \xi_4) e(\xi, \xi_4). \quad (6)$$

Реакцію системи в деякій точці спостереження x на розподіли джерел $\varphi(\xi, \xi_4)$, $\psi(\xi, \xi_4)$, $f_0(\xi)$ знайдемо інтегруванням цих класичних сингулярних розв'язків за часом ξ_4 та по G , Ω , а також їх інтегруванням в нульовий момент часу за Ω_0 відповідно. Так, для одержання $\theta(x, \tau)$

підставимо $\varphi(\xi, \xi_4)$ замість $e(\xi, \xi_4)$ у перше з рівнянь (6), проінтегруємо за часом ξ_4 та областю G , додамо результат інтегрування за часом ξ_4 та за областю Ω цього самого рівняння, в якому $e(\xi, \xi_4)$ замінимо на $\psi(\xi, \xi_4)$, а також результат інтегрування його за областю Ω в нульовий момент часу, в якому $e(\xi, 0)$ замінена на $f_0(\xi)$. У результаті одержимо перше з інтегральних зображень (5). Здійснивши аналогічні операції з другим рівнянням з (6), одержимо другу формулу з (5). Теорему доведено.

Спрямувавши в (5) x з середини області Ω до границі $\partial\Omega$ для задоволення умов (2), одержимо граничні інтегральні рівняння, які зв'язують невідомі $\varphi(\xi, \xi_4)$ з відомими $\psi(\xi, \xi_4)$, $f_0(\xi)$ та заданими на границі $\theta_\Gamma(x, \tau)$, $q_\Gamma(x, \tau)$:

$$\mathbf{F}_\tau(x, \tau, U) = \theta_\Gamma(x, \tau) - b_\tau(x, \tau, U), (x, \tau) \in \partial\Omega^{(1)} \times \mathbf{T}, \quad \mathbf{F}_\tau(x, \tau, Q) = q_\Gamma(x, \tau) - b_\tau(x, \tau, Q), (x, \tau) \in \partial\Omega^{(2)} \times \mathbf{T}. \quad (7)$$

Просторово-часова дискретизація математичної моделі

Оскільки здійснити аналітичне інтегрування у рівняннях (7) для прикладних задач внаслідок довільності області Ω і функцій $\varphi(\xi, \xi_4)$, $\psi(\xi, \xi_4)$ та $f_0(\xi)$ практично неможливо, здійснимо просторово-часову дискретизацію за допомогою таких кроків.

У зовнішній приграничній області $G = B \setminus \Omega$ виділимо $n+1$ підобласті G^j ($j=0, \dots, n$), які взаємно не перетинаються, причому одна чи навіть дві з них можуть бути порожніми множинами. Далі G^j розіб'ємо на плоскі криволінійні чотирикутники (при $n=2$) або шестигранники з неплоскими гранями (при $n=3$) – ПГЕ G_v^j ($v=1, \dots, V_j$), причому $\bigcup_{v=1}^{V_j} G_v^j \subseteq G^j$, а перетин G_v^j і G_w^j при $v \neq w$ не обов'язково повинен бути порожньою множиною. На елементах G_v^0 ($v=1, \dots, V_0$) введемо сімейства точок G_v^{0k} ($k=1, \dots, K_{v0}$), на G_v^1 ($v=1, \dots, V_1$) – криволінійних відрізків G_v^{1k} ($k=1, \dots, K_{v1}$), а на G_v^2 ($v=1, \dots, V_2$) при $n=3$ – поверхні G_v^{2k} ($k=1, \dots, K_{v2}$) (рис. 1). У кожному ПГЕ розмірності n G_v^n (який

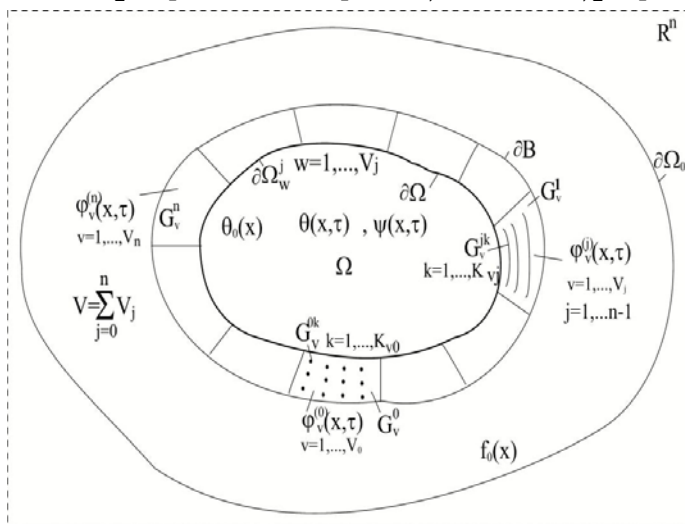


Рис. 1. Типи приграничних елементів

надалі скорочено називатимемо ПГЕ_n) введемо невідоме фіктивне джерело інтенсивності $\varphi_v^{(n)}(x, \tau)$ у розрахунку на одиницю площі або об'єму, а в G_v^j ($j=1, \dots, n-1$) – сукупність джерел, визначених на ПГЕ розмірності j G_v^{jk} (ПГЕ_j), з невідомою інтенсивністю $\varphi_v^{(j)}(x, \tau)$ у розрахунку на одиницю довжини або площі. Для кожного G_v^0 введемо функції $\varphi_v^{(0)}(x, \tau)$, які визначені на ПГЕ нульової розмірності – точках G_v^{0k} (ПГЕ₀) і описують колективну поведінку фіктивних джерел, поміщених в G_v^{0k} .

Області Ω та Ω_0 дискретизуємо внутрішніми комірками Ω_q ($q=1, \dots, Q_1$), Ω_{0q} ($q=1, \dots, Q_2$) відповідно. Для зручності опису залежності $\varphi_v^{(j)}(x, \tau)$ ($j=0, \dots, n$) від часу часовий промінь \mathbf{T} розіб'ємо на інтервали $\mathbf{T}_p =]\tau_{p-1}, \tau_p]$ ($p=1, 2, \dots, \tau_0=0$) і у межах кожного \mathbf{T}_p ($p=1, \dots, P$, $P>1$) функції $\varphi_v^{(j)}(x, \tau)$ апроксимуємо поліномом степеня T з невідомими константами d_v^{jpt} : $\varphi_v^{(j)}(x, \tau) = \sum_{t=0}^T d_v^{jpt} \tau^t$.

Дискретно-континуальну модель побудуємо для двох покровкових часових схем [4]: схеми послідовності початкових умов (СППУ) та схеми єдиної початкової умови (СЄПУ). У першій схемі кожний крок за часом розглянемо як нову задачу, тобто уведемо локальний час $\hat{\tau} = \tau - \sum_{l=1}^{p-1} \Delta\tau_l$ ($\Delta\tau_l$ – величина часового приросту на l -му кроці) і обчислені в кінці кожного часового інтервалу значення $\theta(x, \tau)$ у внутрішніх точках використаємо як початкові для наступного кроку. У другій схемі процес інтегрування за часом завжди відбувається з одного і того ж реального моменту часу.

Оператори $\mathbf{F}_\tau(x, \tau, \Phi)$ та $b_\tau(x, \tau, \Phi)$ після просторово-часової дискретизації для P -го кроку ($\sum_{p=1}^{P-1} \Delta\tau_p < \tau \leq \sum_{p=1}^P \Delta\tau_p$) обох схем запишемо у вигляді:

$$\hat{\mathbf{F}}_\tau^P(x, \hat{\tau}, \Phi) = \sum_{j=0}^n \sum_{v=1}^T \sum_{l=0}^T \hat{A}_{vj}^{(t)}(x, \hat{\tau}, \Phi) d_v^{jPt}, \quad (8)$$

$$\hat{b}^P(x, \hat{\tau}, \Phi) = a \sum_{q=1}^{Q_1} \int_{\Omega_q} \int_{\hat{\tau}} \Phi(x, \hat{\tau}, \xi, \xi_4) \psi(\xi, \tau_{p-1} + \xi_4) d\Omega_q(\xi) d\xi_4 + \sum_{q=1}^{Q_2} \int_{\Omega_{0q}} \Phi(x, \hat{\tau}, \xi, 0) f_0^{(P)}(\xi) d\Omega_{0q}(\xi), \quad (9)$$

$$\mathbf{F}_\tau^P(x, \tau, \Phi) = \sum_{j=0}^n \sum_{v=1}^T \sum_{l=0}^T \tilde{A}_{vj}^{(Pt)}(x, \tau, \Phi) d_v^{jPt} + \sum_{p=1}^{P-1} \sum_{j=0}^n \sum_{v=1}^T \sum_{l=0}^T \bar{A}_{vj}^{(pt)}(x, \tau, \Phi) d_v^{jpt}, \quad (10)$$

$$b^P(x, \tau, \Phi) = a \sum_{q=1}^{Q_1} \left[\sum_{p=1}^{P-1} \int_{\tau_{p-1}}^{\tau_p} \int_{\Omega_q} \Phi(x, \tau, \xi, \xi_4) \psi(\xi, \xi_4) d\Omega_q(\xi) d\xi_4 + \int_{\tau_{p-1}}^{\tau} \int_{\Omega_q} \Phi(x, \tau, \xi, \xi_4) \psi(\xi, \xi_4) d\Omega_q(\xi) d\xi_4 \right] + \sum_{q=1}^{Q_2} \int_{\Omega_{0q}} \Phi(x, \tau, \xi, 0) f_0(\xi) d\Omega_{0q}(\xi). \quad (11)$$

Тут $f_0^{(1)}(x) = f_0(x)$, $f_0^{(p)}(x) = \theta(x, \tau_{p-1})$, $p > 1, x \in \Omega \cup \partial\Omega$,

$$\hat{A}_{vn}^{(p)}(x, \hat{\tau}, \Phi) = \int_0^{\hat{\tau}} \int_{G_v^n} \Phi(x, \hat{\tau}, \xi, \xi_4) dG_v^n(\xi) d\xi_4, \quad \hat{A}_{vj}^{(p)}(x, \hat{\tau}, \Phi) = \sum_{k=1}^{K_{vj}} \int_0^{\hat{\tau}} \int_{G_v^{jk}} \Phi(x, \hat{\tau}, \xi, \xi_4) dG_v^{jk}(\xi) d\xi_4, \quad j=1, n-1,$$

$$\hat{A}_{v0}^{(t)}(x, \hat{\tau}, \Phi) = \sum_{k=1}^{K_{v0}} \int_0^{\hat{\tau}} \int_{G_v^{v0k}} \Phi(x, \hat{\tau}, \xi, \xi_4) d\xi_4, \quad \tilde{A}_{vn}^{(pt)}(x, \tau, \Phi) = \int_{\tau_{p-1}}^{\tau} \int_{G_v^n} \Phi(x, \tau, \xi, \xi_4) dG_v^n(\xi) d\xi_4,$$

$$\tilde{A}_{vj}^{(pt)}(x, \tau, \Phi) = \sum_{k=1}^{K_{vj}} \int_{\tau_{p-1}}^{\tau} \int_{G_v^{jk}} \Phi(x, \tau, \xi, \xi_4) dG_v^{jk}(\xi) d\xi_4, \quad j=1, n-1, \quad \bar{A}_{v0}^{(pt)}(x, \tau, \Phi) = \sum_{k=1}^{K_{v0}} \int_{\tau_{p-1}}^{\tau} \int_{G_v^{v0k}} \Phi(x, \tau, \xi, \xi_4) d\xi_4,$$

$$\bar{A}_{vn}^{(pt)}(x, \tau, \Phi) = \int_{\tau_{p-1}}^{\tau_p} \int_{G_v^n} \Phi(x, \tau, \xi, \xi_4) dG_v^n(\xi) d\xi_4, \quad \tau > \tau_p,$$

$$\bar{A}_{vj}^{(pt)}(x, \tau, \Phi) = \sum_{k=1}^{K_{vj}} \int_{\tau_{p-1}}^{\tau_p} \int_{G_v^{jk}} \Phi(x, \tau, \xi, \xi_4) dG_v^{jk}(\xi) d\xi_4, \quad j=1, n-1, \quad \bar{A}_{v0}^{(pt)}(x, \tau, \Phi) = \sum_{k=1}^{K_{v0}} \int_{\tau_{p-1}}^{\tau_p} \int_{G_v^{v0k}} \Phi(x, \tau, \xi, \xi_4) d\xi_4.$$

Отже, відмінність між цими двома схемами полягає в тому, яким способом значення змінних, що належать даному моменту часу, враховані під час одержання розв'язку для нового моменту часу. У (8), (9) ці змінні відображені в інтегралах за областю Ω_0 як псевдопочаткові значення, тоді як у (10), (11) їхня зміна врахована шляхом підсумовування інтегралів по G_v^j .

**Дискретно-континуальна модель для знаходження невідомих інтенсивностей джерел,
уведених у ПГЕ**

Для задоволення граничних умов використаємо колокаційну методику. Точки колокації виберемо у моменти часу $\hat{\tau}_P^r = \Delta\tau_P \frac{r+1}{T+1}$ або $\tau_P^r = \tau_{P-1} + \Delta\tau_P \frac{r+1}{T+1}$, $r=0, \dots, T$, у середині кожного граничного

елемента $\partial\Omega_w^j = \partial G_w^j \cap \partial\Omega$, $w=1, \dots, V_j$, $\cup_{j=0}^n \cup_{w=1}^{V_j} \partial\Omega_w^j = \partial\Omega$.

Граничні інтегральні рівняння (7) після просторово-часової дискретизації для P -го кроку обох схем записано у вигляді СЛАР.

Для СППУ маємо ($r=0, \dots, T$):

$$\sum_{j=0}^n \sum_{v=1}^{V_j} \sum_{t=0}^T \hat{A}_{vj}^{(t)}(x^w, \hat{\tau}_P^r, U) d_v^{jPt} = \theta_\Gamma(x^w, \tau_{P-1} + \hat{\tau}_P^r) - \hat{b}^P(x^w, \hat{\tau}_P^r, U), x^w \in \partial\Omega_w^j \subset \partial\Omega^{(1)}, w=1, \dots, V^{(1)}, \quad (12)$$

$$\sum_{j=0}^n \sum_{v=1}^{V_j} \sum_{t=0}^T \hat{A}_{vj}^{(t)}(x^w, \hat{\tau}_P^r, Q) d_v^{jPt} = q_\Gamma(x^w, \tau_{P-1} + \hat{\tau}_P^r) - \hat{b}^P(x^w, \hat{\tau}_P^r, Q), x^w \in \partial\Omega_w^j \subset \partial\Omega^{(2)}, w=V^{(1)}+1, \dots, V, \quad (13)$$

Для СЕПУ одержимо ($r=0, \dots, T$):

$$\sum_{j=0}^n \sum_{v=1}^{V_j} \sum_{t=0}^T \tilde{A}_{vj}^{(Pt)}(x^w, \tau_P^r, U) d_v^{jPt} = \theta_\Gamma(x^w, \tau_P^r) - b^P(x^w, \tau_P^r, U) - \sum_{p=1}^{P-1} \sum_{j=0}^n \sum_{v=1}^{V_j} \sum_{t=0}^T \bar{A}_{vj}^{(pt)}(x^w, \tau, U) d_v^{jpt},$$

$$x^w \in \partial\Omega_w^j \subset \partial\Omega^{(1)}, w=1, \dots, V^{(1)}, \quad (14)$$

$$\sum_{j=0}^n \sum_{v=1}^{V_j} \sum_{t=0}^T \tilde{A}_{vj}^{(Pt)}(x^w, \tau_P^r, Q) d_v^{jPt} = q_\Gamma(x^w, \tau_P^r) - b^P(x^w, \tau_P^r, Q) - \sum_{p=1}^{P-1} \sum_{j=0}^n \sum_{v=1}^{V_j} \sum_{t=0}^T \bar{A}_{vj}^{(pt)}(x^w, \tau, Q) d_v^{jpt},$$

$$x^w \in \partial\Omega_w^j \subset \partial\Omega^{(2)}, w=V^{(1)}+1, \dots, V. \quad (15)$$

Зазначимо, що для постійного кроку за часом матрицю системи (12), (13) обчислюємо один раз і зберігаємо у пам'яті комп'ютера.

Знайшовши з (12), (13) або (14), (15) невідомі d_v^{jPt} , використаємо формули, аналогічні (5) для обчислення шуканої температури та теплового потоку як у будь-якій внутрішній точці, так і у точках границі ($x^z \in \partial\Omega \cup \Omega$) в момент часу $\tau \in T_P$

для СППУ:

$$\theta^{(P)}(x^z, \hat{\tau}) = \sum_{j=0}^n \sum_{v=1}^{V_j} \sum_{t=1}^T \hat{A}_{vj}^{(t)}(x^z, \hat{\tau}, U) d_v^{jPt} + \hat{b}^P(x^z, \hat{\tau}, U), \hat{\tau} \in]0, \Delta\tau_P],$$

$$q^{(P)}(x^z, \hat{\tau}) = \sum_{j=0}^n \sum_{v=1}^{V_j} \sum_{t=1}^T \hat{A}_{vj}^{(t)}(x^z, \hat{\tau}, Q) d_v^{jPt} + \hat{b}^P(x^z, \hat{\tau}, Q),$$

та СЕПУ:

$$\theta^{(P)}(x^z, \tau) = \sum_{j=0}^n \sum_{v=1}^{V_j} \sum_{t=1}^T \tilde{A}_{vj}^{(Pt)}(x^z, \tau, U) d_v^{jPt} + \sum_{p=1}^{P-1} \sum_{j=0}^n \sum_{v=1}^{V_j} \sum_{t=1}^T \bar{A}_{vj}^{(pt)}(x^z, \tau, U) d_v^{jpt} + b^P(x^z, \tau, U), \tau_{P-1} < \tau \leq \tau_P,$$

$$q^{(P)}(x^z, \tau) = \sum_{j=0}^n \sum_{v=1}^{V_j} \sum_{t=1}^T \tilde{A}_{vj}^{(Pt)}(x^z, \tau, Q) d_v^{jPt} + \sum_{p=1}^{P-1} \sum_{j=0}^n \sum_{v=1}^{V_j} \sum_{t=1}^T \bar{A}_{vj}^{(pt)}(x^z, \tau, Q) d_v^{jpt} + b^P(x^z, \tau, Q).$$

При обчисленні інтегралів, які входять у СЛАР (12)–(15), здійснено аналітичне інтегрування за часом. Потім проблему інтегрування за плоскими або просторовими декартовими координатами аналітичними способами зведено до інтегрування за одновимірною або двовимірною областями, одночасним усуненням сингулярності [7]. У результаті вказаних операцій під час розв'язання дво-

або тривимірних нестационарних задач нам необхідно здійснювати числове інтегрування лише за елементами деякої кривої або поверхні. В одержаних формулах корисним є той факт, що підінтегральні функції, як правило, не містять сингулярностей, і числове інтегрування виконується без труднощів.

Числові дослідження

Приклад 1. Область $\Omega \subset R^2$ і розширену область B вибирали у вигляді кругів: $\Omega = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$, $B = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1 + h_1\}$.

Приклад 2. Область Ω і розширену область B вибирали у вигляді квадратів, границі яких задавали так: $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, $\partial B = \Gamma_{B1} \cup \Gamma_{B2} \cup \Gamma_{B3} \cup \Gamma_{B4}$,

де $\Gamma_1 = \{(x_1, x_2) : x_1 = -1.5, -1.5 < x_2 < 1.5\}$, $\Gamma_2 = \{(x_1, x_2) : x_2 = -1.5, -1.5 \leq x_1 \leq 1.5\}$,

$\Gamma_3 = \{(x_1, x_2) : x_1 = 1.5, -1.5 < x_2 < 1.5\}$, $\Gamma_4 = \{(x_1, x_2) : x_2 = 1.5, -1.5 \leq x_1 \leq 1.5\}$,

$\Gamma_{B1} = \{(x_1, x_2) : x_1 = -1.5 - h_2, -1.5 - h_2 < x_2 < 1.5 + h_2\}$, $\Gamma_{B2} = \{(x_1, x_2) : x_2 = -1.5 - h_2, -1.5 - h_2 \leq x_1 \leq 1.5 + h_2\}$,

$\Gamma_{B3} = \{(x_1, x_2) : x_1 = 1.5 + h_2, -1.5 - h_2 < x_2 < 1.5 + h_2\}$, $\Gamma_{B4} = \{(x_1, x_2) : x_2 = 1.5 + h_2, -1.5 - h_2 \leq x_1 \leq 1.5 + h_2\}$.

У першому прикладі на $\partial\Omega$ задавали температуру $\theta = \theta_\Gamma(x, \tau) = k\tau$ ($k = 3$ °C/c) та вибирали коефіцієнт температуропровідності $a = 5 \text{ м}^2/\text{с}$, у другому – $\theta = \theta_\Gamma(x, \tau) = 17.77$ °C, $a = 0.204 \text{ м}^2/\text{с}$ при нульових початкових умовах; всі лінійні розміри задавали в метрах, час – у секундах. Границю $\partial\Omega$ розбивали на вісім граничних елементів $\partial\Omega_v$ однакової довжини. Для першого прикладу елементи дискретизації вибирали у вигляді криволінійних чотирикутних сегментів однакової площі, для другого – у вигляді прямокутників, прямокутних або рівнобедрених трапецій (рис. 2 а, б).

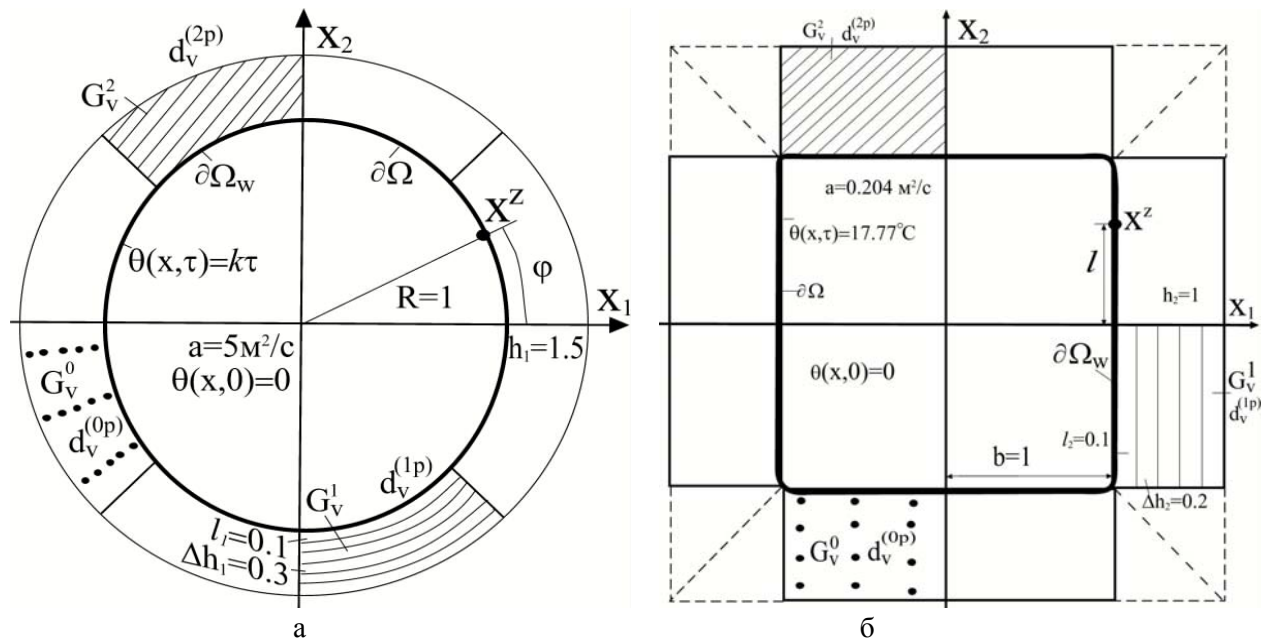


Рис. 2. Моделі об'єктів

Для виявлення особливостей, внесених кожним типом ПГЕ, задачу спочатку почергово розв'язували для окремих типів ПГЕ ($j=2,1,0$), коли дві підмножини G^l ($l \neq j$) були порожніми. Кількість дуг (для ПГЕ₁) та точок (для ПГЕ₀) на усіх елементах вибирали однаковими. Інтенсивності введених фіктивних джерел на кожному кроці за часом апроксимували невідомими постійними $d_v^{(jp)}$. Розв'язки першого і другого прикладів, одержані за допомогою СЕПУ для окремих типів ПГЕ та їх поєднання, мали вигляд:

$$\theta^{sj}(x,\tau)=\sum_{v=1}^8 \bar{A}_{vj}^{(P0)}(x,\tau,U)d_v^{(jP)} + \sum_{p=1}^{P-1} \sum_{v=1}^8 \bar{A}_{vj}^{(p0)}(x,\tau,U)d_v^{(jP)}, \quad s=1,2,$$

$$\theta^{s3}(x,\tau)=\sum_{v=1}^8 \sum_{j=1}^2 \bar{A}_{vj}^{(P0)}(x,\tau,U)d_v^{(jP)} + \sum_{p=1}^{P-1} \sum_{v=1}^8 \sum_{j=1}^2 \bar{A}_{vj}^{(p0)}(x,\tau,U)d_v^{(jP)}.$$

Для внутрішніх точок результати, одержані за допомогою НМПГЕ, збіглися з аналітичними розв'язками, наведеними в роботах [11, 12], та з одержаними НМГЕ [5] з точністю до трьох значущих цифр.

У точках на границі досліджували залежність відносних похибок $\delta\theta^{sj}(x,\tau)=(\theta^{sj}(x,\tau)-\theta_{\Gamma}(x,\tau))/\theta_{\Gamma}(x,\tau)$ ($j=0,\dots,3$) від висоти h_s ПГЕ, їх типу та форми. Розглядали три випадки дискретизації області G^j : з нестачею ($\cup_{v=1}^{V_j} G_v^j \subset G^j$), повну ($\cup_{v=1}^{V_j} G_v^j = G^j$, $G_v^j \cap G_w^j = \emptyset$ при $v \neq w$), з перекриттям ($G_v^j \cap G_w^j \neq \emptyset$ при $v \neq w$). Для першого прикладу елементи дискретизації вибирали у вигляді криволінійних чотирикутних сегментів однакової площі, для другого – у вигляді прямокутників, прямокутних або рівнобедрених трапецій (рис. 3).

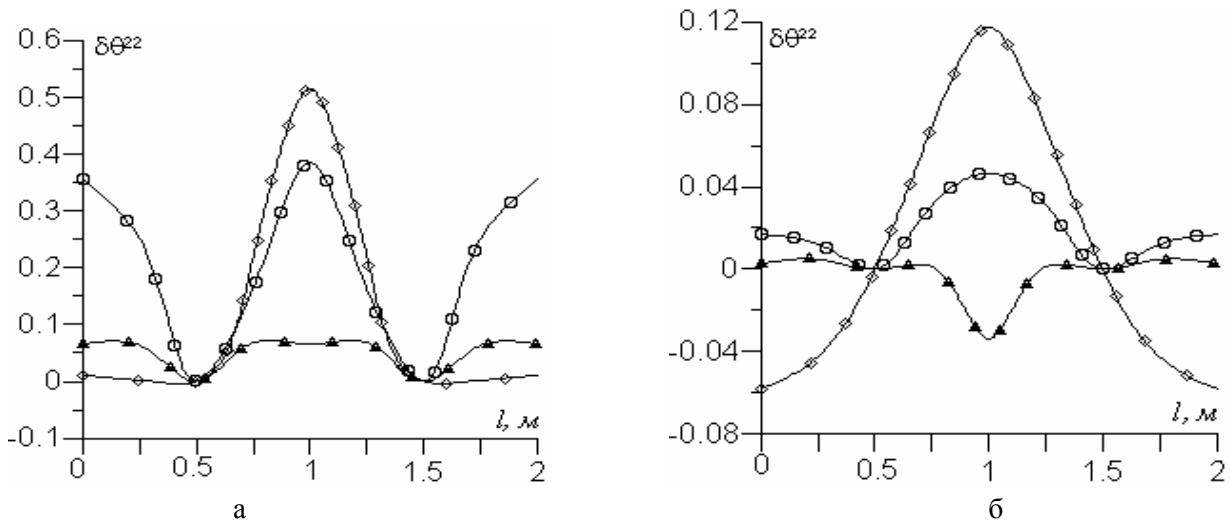


Рис. 3. Залежність похибок $\delta\theta^{22}$ на частині границі квадрата від форми чотирикутників: прямокутники (криві з символами \square), прямокутні (криві з \diamond) та рівнобедрені трапеції (криві з \triangle) в моменти часу $\tau=1$ (а) та $\tau=3$ (б); $h_2=1$, l – відстань від точки $(1.0;0)$ до точки спостереження

Враховуючи той факт, що для круга вищої точності розв'язків досягали за повної дискретизації області G^j , а для квадрата – під час розбиття на прямокутники, на рис. 4 зображено числові результати в моменти часу $\tau=0.1$, $\tau=0.6$ для круга (а, б) та $\tau=1$, $\tau=3$ (в, г) для квадрата у цих випадках. Щоб узгодити порівняння результатів, для числового інтегрування використовували квадратурні формули Гаусса з 4 (для дуг) та 16 (для чотирикутників) вузлами; ПГЕ₂ у першому прикладі вибирали заввишки $h_1=1.5$, ПГЕ₁ почергово розміщували на відстанях $l_1=0.1, 0.4, 0.7, 1.0, 1.3$ від границі, ПГЕ₀ рівномірно вибирали на цих кривих, у другому прикладі ПГЕ₂ були заввишки $h_2=1.0$, а криві ПГЕ₁ – на $l_2=0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ від границі. Тут ϕ – кут між віссю $0x_1$ та точкою спостереження. Криві з символами “о”, “х” відповідають використанню сімейств дуг з однією та п'ятьма (для круга) чи чотирма (для квадрата) дугами на кожному G_v^1 , з символами “ \diamond ”, “ Δ ” – сімейств точок з 3-ма та 15-ма (для круга) або 12-ма (для квадрата) точками на кожному G_v^0 , без символів – криволінійних чотирикутників, з символами “+” – комплексному використанню двох

зображень (ПГЕ₂ та ПГЕ₁ з п'ятьма дугами). Внаслідок симетрії задач приведено залежність похибок тільки на четвертій частині границі.

Як показано на рис. 4, для оптимально вибраної товщини приграничної області ($h_1=1.5$, $h_2=1.0$) точність обчислення температури на границях круга і квадрата є найвищою під час використання ПГЕ₂ та сімейств дуг, покращується при збільшенні кількості дуг і точок та спільному застосуванні різних типів ПГЕ (зокрема, чотирикутників і сімейств дуг).

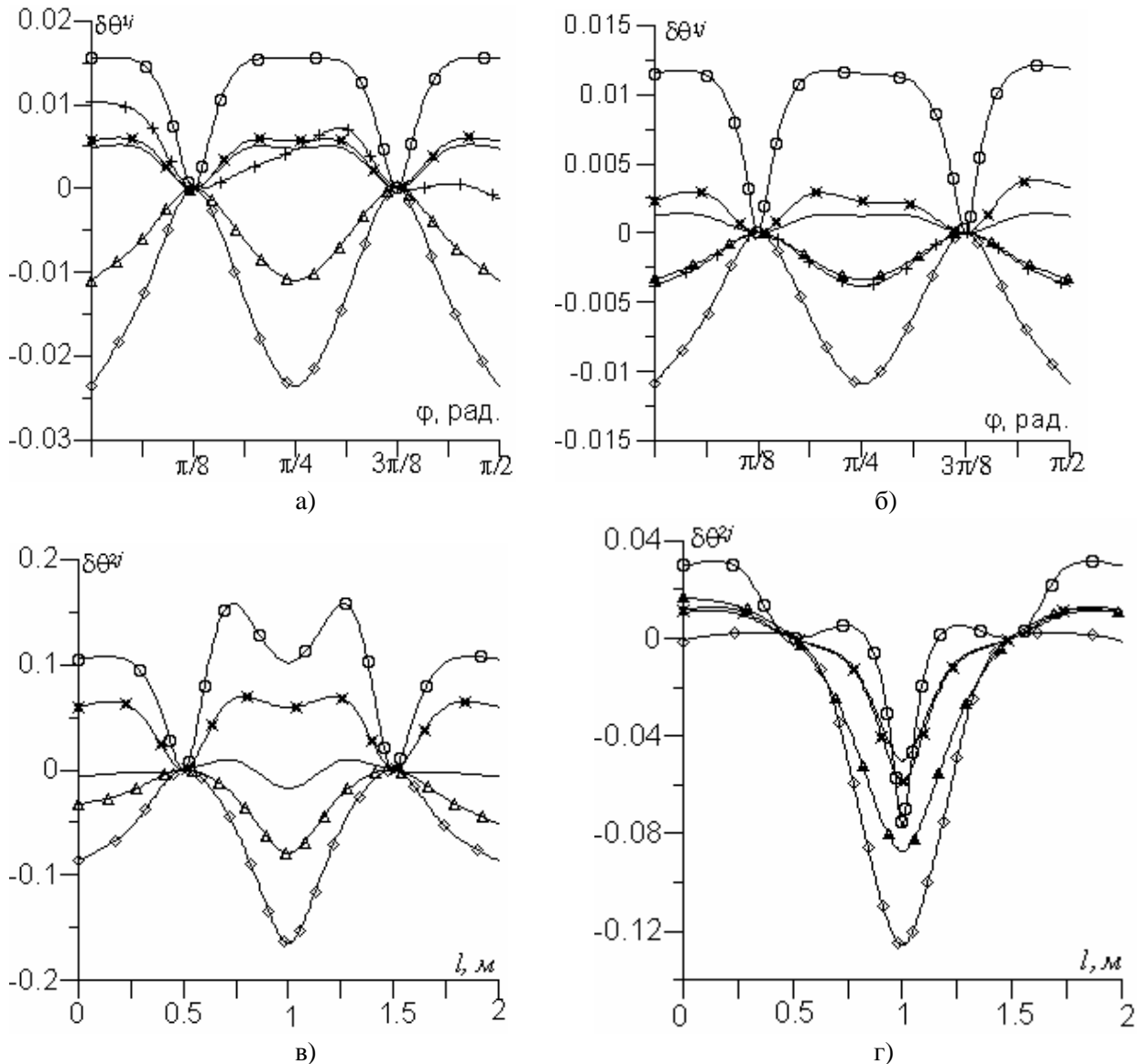


Рис. 4. Залежність похибок $\delta\theta^{sj}$ на частині границі круга (а, б) та квадрата (в, г) для різних типів ПГЕ в різні моменти часу

Висновки

Для тіл, що займають деяку область в \mathbf{R}^2 чи \mathbf{R}^3 , схема розв'язування задач НМПГЕ є надзвичайно подібною, що дає змогу використати модульний принцип побудови програмного забезпечення та уніфікувати розроблення його частини. Відмінності в основному проявляються тільки в розмірності та формі приграничних елементів і у фундаментальних розв'язках.

Здійснене аналітичне інтегрування по часовій змінній згортки фундаментального розв'язку з інтенсивностями невідомих джерел у випадку апроксимації останніх поліномами за часом, а також за однією з просторових змінних (полярному або сферичному радіусу), дало змогу усунути сингулярність підінтегральної функції. Це спрощує подальшу побудову програмного забезпечення дискретних моделей розглянутих задач та підвищує точність одержаних розв'язків.

Проведені числові дослідження показали, що НМПГЕ у поєднанні з покроковими часовими схемами (СППУ та СЕПУ) забезпечує вищу точність розрахунків температурного поля порівняно з НМГЕ під час використання однакової кількості елементів та однакового ступеня апроксимації невідомих функцій фіктивних джерел. Це обґрунтовується тим, що пригранична область та розширена область початкової умови згладжують вплив уведених у цих областях джерел та функцій. Рекомендації щодо вибору параметрів у НМПГЕ можуть бути такими: для модельних задач з відомими аналітичними розв'язками варто виходити з апостеріорних оцінок отриманих числових результатів, для інших – порівнювати результати обчислень шуканих функцій у певних ділянках границі із заданими на них граничними умовами.

Порівняння теоретичних та обчислювальних аспектів застосування різних типів ПГЕ дає змогу зробити такі висновки. Під час застосування ПГЕ₂ і ПГЕ₁ всі інтеграли розглядають у звичайному сенсі, тобто у разі потреби можна обмежитись тільки числовим інтегруванням. ПГЕ₁ у випадку однієї кривої або поверхні можна розглядати як аналог деякого гладкого контуру, який охоплює область Ω , не збігається з її границею і був запропонований у методі функціональних рівнянь Купрадзе [1], однак питання про способи вибору такого контуру до цього часу повністю не досліджені. Зрозуміло, що при числовій реалізації такого алгоритму значна віддаленість контуру від граничної поверхні приводить до поганої обумовленості матриці СЛАР внаслідок відносно малої величини діагональних елементів або до одержання лінійно-залежних систем рівнянь [13, 14]. Використання сімейств кривих дає змогу усунути вказану проблему, оскільки із збільшенням кількості кривих дискримінант матриці СЛАР зростає. ПГЕ₀ значно спрощують алгоритм розв'язування задачі, оскільки дають змогу уникнути інтегрування за ПГЕ, замінивши його підсумовуванням добутоків фундаментального розв'язку на значення невідомих інтенсивностей фіктивних джерел. Їх можна рекомендувати при знаходженні початкових наближень як експрес-метод для розв'язування обернених задачах математичної фізики, коли більшу роль відіграє оптимізація часу, ніж точності.

1. Купрадзе В.Д. *Методы потенциала в теории упругости*. – М.: Физматгиз, 1963. – 472 с.
2. Михлин С. Г. *Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения*. – М.: Физматгиз, 1962. – 256 с.
3. Мухелишвили Н. И. *Сингулярные интегральные уравнения*. – М.: Наука, 1968. – 512 с.
4. Бенерджи П., Баттерфилд Р. *Метод граничных элементов в прикладных науках*. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
5. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. *Методы граничных элементов*. – М.: Мир, 1987. – 524 с.
6. Михаськів В. В., Журавчак Л. М., Фітель Г. В. Використання граничних і приграничних елементів у двовимірній моделі нестационарної теплопровідності // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*, 2003. – 46, № 2. – С. 155–161.
7. Журавчак Л. М., Грицько Є. Г. *Метод приграничних елементів у прикладних задачах математичної фізики*. – Львів: Карпатське відділення Інституту геофізики НАН України, 1996. – 220 с.
8. Журавчак Л. М., Шуміліна Н. В. Розпізнавання об'ємних локальних неоднорідностей за нестационарним тепловим полем тіла // *Доп. НАН України*, 2005. – № 10. – С. 42–47.
9. Zhuravchak L.M, Shumilina N.V. *Mathematical modeling of non-stationary thermal field in spatial solids for recognition of homogeneous inclusions* // *Proceedings of Sixth International Congress on Thermal Stresses, Vienna, 2005*. – Vol. 2. – P. 521–524.
10. Владимиров В. С. *Уравнения математической физики*. – М.: Наука, 1971. – 512 с.
11. Карслоу Г., Егер Д. *Теплопроводность твердых тел*. – М.: Наука, 1964. – 488 с.
12. Bruch J.C., Zvoloski G. *Transient two-dimensional heat conduction solved by the finite element method* // *Int. J. Numerical Methods Engng.* – 1974, 8. – P. 481–494.
13. Верюжский Ю.В. *Численные методы потенциала в некоторых задачах прикладной механики*. – К.: Виц. шк., 1978. – 184 с.
14. Gray L.J. *Numerical experiments with boundary element technique for corners* // *Advances in Boundary Elements*, 1989. – Vol. 1. – CMP, Southampton. – P. 243–251.