комплекс аналізу режимів і процесів електроенергетичних систем // Технічна електродинаміка. – 1998. – Спец. вип. – С. 56–61. 3. Лоханин Е.К. Применение метода компенсирующих ЭДС для расчета режимов энергосистем // Электричество. – 1995. – № 2. 4. Скрипник О.І. Аналіз статичної стійкості енергетичних систем // Фізичний збірник НТШ. Т. 3. – 1998. – С. 464–477.

УДК 621.3

Р.В. Фільц, М.Н. Лябук
Луцький державний технічний університет

ЗАКОНИ КОМУТАЦІЇ ЯК ПИТАННЯ ДИДАКТИКИ ТЕОРІЇ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

Для законів комутації наведено математичне обґрунтування. Показано спосіб визначення стану кола після комутації у випадках, коли закони комутації ігноруються.

The laws of commutation in electric circuits have been proved mathematically. The algorithm of electrical circuit initial conditions calculation in cases, when laws of commutation are ignored, has been developed.

Задачі дослідження. Задачами дослідження є обґрунтування законів комутації на математичному рівні й опрацювання методу визначення початкового стану електричного кола після комутації, коли закони комутації ігноруються.

Аналіз останніх досліджень. У теорії перехідних процесів в електричних колах розглянуто такі твердження:

А. Струм у навої не може змінюватися миттєво (інакше – струм у навої є неперервною функцією часу);

Б. Напруга на конденсаторі не може змінюватися миттєво (інакше – напруга на конденсаторі є неперервною функцією часу).

Прийнято вважати, що рівноцінними з твердженнями А, Б є, відповідно, твердження:

А1. Потокозчеплення навою не може змінюватися миттєво (інакше – потокозчеплення навою є неперервною функцією часу);

Б1. Заряд конденсатора не може змінюватися миттєво (інакше – заряд конденсатора є неперервною функцією часу).

Ці твердження називають у підручниках з теоретичних основ електротехніки законами комутації (англійський термін – law of commutation, німецький – Schaltgesetz, російський – закон коммутации, польський – prawo komutacji).

Закони комутації в більшості підручників обґрунтовують на фізичному рівні таким способом [1–4].

А. Якщо в моменті $t = t^-$ струм $i_L(t)$ у навої становив $i_L(t^-) = i_L^-$, а в моменті $t = t^+ = t^- + \Delta t$ він дорівнював би $i_L(t^+) = i_L(t^- + \Delta t) = i_L^+ \neq i_L^-$, то при $\Delta t \to 0$ похідна $\dfrac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{i_L^+ - i_L^-}{\Delta t}$ була б нескінченно великою і, відповідно, нескінченно великою була б індукована напруга $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}$ на затискачах навою. З фізичного погляду це неможливо, оскільки виникне пробій ізоляції між затискачами навою, який відкриє шлях для струму в навої через іскровий (дуговий) розряд, і тоді струм у навої залишиться неперервною функцією часу.

А1. Якщо в моменті $t = t^-$ потокозчеплення $\psi(t)$ навою становило $\psi(t^-) = \psi^-$, а в моменті $t = t^+ = t^- + \Delta t$ воно дорівнювало б $\psi(t^+) = \psi(t^- + \Delta t) = \psi^+ \neq \psi^-$, то при $\Delta t \to 0$ індукована в навої напруга $u_L = \frac{\mathrm{d}\psi(t)}{\mathrm{d}t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\psi^+ - \psi^-}{\Delta t}$ була б нескінченно великою. З фізичного погляду це неможливо, оскільки виникне пробій ізоляції між затискачами навою, який відкриває шлях для струму в навої, внаслідок чого струм у навої і, відповідно, потокозчеплення навою $\psi = Li$ залишаться неперервними функціями часу.

Б. Якщо в моменті $t = t^-$ напруга $u_C(t)$ на конденсаторі становила u_C^-, а в моменті $t = t^+ = t^- + \Delta t$ вона дорівнювала б $u_C^+ = u_C(t^- + \Delta t) \neq u_C^-$, то при $\Delta t \to 0$ похідна $\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{u_C^+ - u_C^-}{\Delta t}$ була б нескінченно великою і, відповідно, нескінченно великим був би струм $i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$, що протікав би через конденсатор. З фізичного погляду це неможливо, оскільки провідники, що з'єднують конденсатор з джерелом, завжди мають деякий опір, який і обмежить струм до скінченної величини, отже, напруга на конденсаторі не може змінитися миттєво.

Б1. Якщо в моменті $t = t^-$ заряд $q(t)$ конденсатора становив q^-, а в моменті $t = t^+ = t^- + \Delta t$ він дорівнював би $q^+ = q(t^- + \Delta t) \neq q^-$, то при $\Delta t \to 0$ струм $i(t) = \frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{q^+ - q^-}{\Delta t}$ конденсатора був би нескінченно великим. З фізичного погляду це неможливо, оскільки провідники, що з'єднують конденсатор з джерелом, завжди мають деякий опір, який і обмежить струм до скінченної величини, отже, заряд конденсатора не може змінитися миттєво.

У деяких підручниках закони комутації обґрунтовуються на підставі енергетичних співвідношень таким способом.

А, А1. Якщо в моменті $t = t^-$ енергія $W_L(t)$ магнітного поля навою становила $W_L^- = L(i^-)^2/2 = (\psi^-)^2/2L$, а в моменті $t = t^+ = t^- + \Delta t$ вона дорівнювала б $W_L^+ = L(i^+)^2/2 = (\psi^+)^2/2L \neq W_L^-$, то при $\Delta t \to 0$ потужність $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W_L(t)$, яку споживав би навій від джерела, була б нескінченно великою, що з фізичного погляду неможливо, оскільки реальне джерело має скінченну потужність.

Б, Б1. Якщо в моменті $t = t^-$ енергія $W_C(t)$ електричного поля конденсатора становила $W_C^- = C(u_C^-)^2/2 = (q^-)^2/2C$, а в моменті $t = t^+ = t^- + \Delta t$ вона дорівнювала б $W_C^+ = C(u_C^+)^2/2 = (q^+)^2/2C \neq W_C^-$, то при $\Delta t \to 0$ потужність $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W_C(t)$, яку споживав би конденсатор від джерела, була б нескінченно великою, що з фізичного погляду неможливо, оскільки реальне джерело має скінченну потужність.

Легко зауважити, що ці обґрунтування є доведеннями від супротивного: якщо припустити, що твердження А, А1, Б, Б1 не виконуються, то це суперечитиме фізиці. Однак вони не є математичними доведеннями.

Виклад основного матеріалу. ***Коли виникає потреба застосування законів комутації?*** Розрахунок перехідних процесів в електричних колах зводять здебільшого до розв'язування задачі Коші, тобто до розв'язування системи диференційних та алгебраїчних рівнянь (яка, як відомо, описує множину всіх можливих перехідних процесів у цьому колі) разом з початковою умовою (яка виділяє з цієї множини єдиний шуканий перехідний процес). Наприклад, для кола, зображеного на рис. 1, перехідний процес, зумовлений деякою комутацією в колі, описується задачею Коші, тобто системою диференційних та алгебраїчних рівнянь

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}; \quad u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}; \tag{1}$$

$$u_R(t)+u_L(t)+u_C(t)-u_д(t)=0; \quad u_R(t)=Ri(t)$$

разом з початковою умовою

$$u_C(t^+)=u_C^+; \; i(t^+)=i^+, \tag{2}$$

де R, L, C – відомі числа; $u_д(t)$ – відома функція; $u_R(t), u_L(t), u_C(t), i(t)$ – невідомі функції. Початкові значення u_C^+, i^+ визначають на підставі законів комутації: якщо в моменті $t=t^-$ (тобто безпосередньо перед комутацією) значення функцій $u_C(t), i(t)$ дорівнювали, відповідно, u_C^-, i^-, то в моменті $t=t^+$ (тобто безпосередньо після комутації) вони залишаються незмінними, тобто

$$u_C^+=u_C^-, \quad i^+=i^-. \tag{3}$$

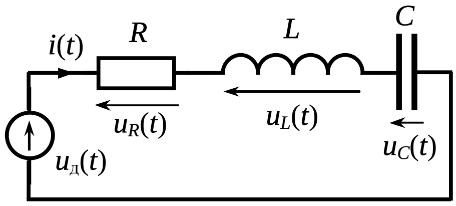

Рис. 1. Електричне коло

Математичне обґрунтування законів комутації. Альтернативою до задачі Коші є опис перехідних процесів як системи інтегральних та алгебраїчних рівнянь. Наприклад, для кола, зображеного на рис. 1, перехідний процес описується системою рівнянь

$$u_C(t)=\frac{1}{C}\int_{t^+}^{t} i(t)\mathrm{d}t+u_C^+; \quad i(t)=\frac{1}{L}\int_{t^+}^{t} u_L(t)\mathrm{d}t+i^+; \tag{4}$$

$$u_R(t)+u_L(t)+u_C(t)-u_д(t)=0; \quad u_R(t)=Ri(t). \tag{5}$$

Тут початкова умова безпосередньо врахована в інтегральних рівняннях (4), а система інтегральних та алгебраїчних рівнянь (4), (5) вичерпно описує єдиний шуканий перехідний процес. З порівняння формулювання задачі розрахунку перехідних процесів як задачі Коші (1), (2) і як системи інтегральних рівнянь (4), (5) є очевидним, що останнє є не тільки простішим, але й досконалішим.

Назвемо функції, які знаходяться під знаком інтеграла, інтегрованими функціями (в (4) – це функції $i(t), u_L(t)$), а функції, які є інтегралами від інтегрованих функцій – інтегральними функціями (в (4) – це функції $u_C(t), i(t)$). Тут питання про те, якими повинні бути величини u_C^+, i^+, розв'язується не на фізичному рівні (тобто на підставі законів комутації), а на рівні математичному. Насправді, нехай інтегровані функції $i(t), u_L(t)$ у рівняннях (4) є на інтервалі $t^- \le t \le t^- +\Delta t=t^+$ довільними (навіть розривними) функціями, які приймають тільки скінченні значення. Тоді

$$u_C^+=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{C}\int_{t^-}^{t^-+\Delta t} i(t)\mathrm{d}t+u_C^-=u_C^-; \quad i^+=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{L}\int_{t^-}^{t^-+\Delta t} u_L(t)\mathrm{d}t+i^-=i^-, \tag{6}$$

отже, інтегральні функції $u_C(t), i(t)$ є функціями неперервними (навіть тоді, коли інтегровані функції є розривними).

У системі інтегральних та алгебраїчних рівнянь, що описує перехідний процес в електричному колі, кількість інтегральних рівнянь (тобто формул, які визначають інтегральні функції через інтегровані) дорівнює кількості консервативних елементів у колі (тобто, навоїв і конденсаторів) і для цих функцій необхідно знати початкові значення.

Під час застосування операторного методу Гевісайда у випадках, коли необхідно формалізувати опис дуже коротких вимушень $x(t)$ з заданим інтегралом $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{d}t = Y,$ використовують дельта-функцію $\delta(t)$ Дірака, яка є функцією, що приймає нескінченно велике значення в нескінченно короткому проміжку часу, а $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = 1,$ і записують вимушення у вигляді $x(t) = Y\delta(t).$ Тоді, якщо значення інтегральної функції $y = \int\limits^{t} x(t)\mathrm{d}t = \int\limits^{t} Y\delta(t)\mathrm{d}t$ безпосередньо перед дією імпульсу $x(t) = Y\delta(t)$ становило $y(t^-) = y^-,$ то безпосередньо після його закінчення воно дорівнюватиме

$$y^+ = \lim_{\Delta t \to 0} \int\limits_{t^-}^{t^- + \Delta t} Y\delta(t)\mathrm{d}t + y^- = y^- + Y. \tag{7}$$

Отже, якщо інтегрована функція є імпульсом вигляду $x(t) = Y\delta(t),$ то інтегральна функція змінюється в моменті дії імпульсу на величину, що дорівнює параметрові Y цього імпульсу. Однак треба пам'ятати, що фізично здійснені вимушення не можуть приймати нескінченно великих значень і є тільки математичною абстракцією.

Імпульсні функції є ідеальним математичним апаратом для встановлення й обчислення стану електричного кола, який виникає безпосередньо після розмикання навоїв і закорочення конденсаторів. Насправді:

- якщо в схемі електричного кола послідовно з навоєм, який необхідно розімкнути в моменті $t = t^-$, до того ж відомо, що перед розмиканням струм у навої дорівнює $i(t^-) = i^-,$ ввімкнути джерело напруги $u_{\text{д}\delta}(t) = \Psi\delta(t - t^-),$ то це зумовить в моменті $t = t^-$ стрибкоподібну зміну стану кола; параметр Ψ імпульсної функції $u_{\text{д}\delta}(t)$ можна завжди вибрати так, щоб у моменті $t = t^+ = t^- + \Delta t,$ де $\Delta t \to 0,$ струм у навої дорівнював нулю;
- якщо в схемі електричного кола паралельно з конденсатором, який необхідно закоротити в моменті $t = t^-$, до того ж відомо, що перед закороченням напруга на конденсаторі дорівнює $u_C(t^-) = u_C^-,$ ввімкнути джерело струму $i_{\text{д}\delta}(t) = Q\delta(t - t^-),$ то це викличе в моменті $t = t^-$ стрибкоподібну зміну стану кола; параметр Q імпульсної функції $i_{\text{д}\delta}(t)$ можна завжди вибрати таким, щоб у моменті $t = t^+ = t^- + \Delta t,$ де $\Delta t \to 0,$ напруга на конденсаторі дорівнювала нулю.

Визначення стану електричного кола після комутації, коли закони комутації ігноруються. У практиці часто виникає потреба розраховувати перехідні процеси, які відбуваються в електричних колах після розмикання навоїв, у яких струм не дорівнює нулю (наприклад, після вимикання з мережі первинної обмотки трансформатора або обмотки статора асинхронної чи синхронної машини), і (або) після закорочення заряджених конденсаторів (наприклад, після шунтування чи пробиття секції конденсатора). До того ж нехтуємо короткочасними перехідними процесами, які насправді відбуваються в колі (наприклад, дуговим чи іскровим розрядом між контактами, які розмикаємо) і вважаємо, що комутація відбулася миттєво. Очевидно, що в таких ситуаціях ми закони комутації ігноруємо.

Для розрахунку таких перехідних процесів необхідно знати початкові значення струмів у навоях, що залишилися нерозімкненими, і напруг на конденсаторах, що залишилися незакороченими. Розглянемо це питання на прикладі однофазного трансформатора без осердя, ввімкненого за схемою, зображеною на рис. 2, під час розмикання його вторинної обмотки.

Нехай безпосередньо перед розмиканням вторинної обмотки в моменті $t = t^-$ потокозчеплення $\psi_1(t),\ \psi_2(t)$ обмоток дорівнювали, відповідно, $\psi_1(t^-) = \psi_1^-;\ \psi_2(t^-) = \psi_2^-$. Оскільки

$$\psi_1^- = L_{11}i_1^- + L_{12}i_2^-;\quad \psi_2^- = L_{21}i_1^- + L_{22}i_2^-, \tag{8}$$

де $L_{11};\ L_{12} = L_{21};\ L_{22}$ – індуктивності обмоток; $i_1^- = i_1(t^-),\ i_2^- = i_2(t^-)$ – значення струмів $i_1(t),\ i_2(t)$ обмоток в моменті $t = t^-$, то

$$i_1^- = \frac{L_{22}\psi_1^- - L_{12}\psi_2^-}{L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}};\quad i_2^- = \frac{L_{11}\psi_2^- - L_{21}\psi_1^-}{L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}}. \tag{9}$$

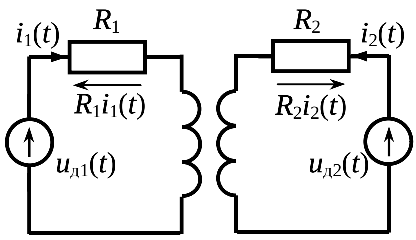

Рис. 2. Схема однофазного трансформатора

Щоб встановити й обчислити стан кола, який виникне безпосередньо після розмикання вторинної обмотки, введемо до неї імпульсну напругу

$$u_{д2\delta}(t) = \Psi\delta(t - t^-), \tag{10}$$

яка повинна запевнити рівність $i_2^+ = 0$, де Ψ – поки що невідоме значення параметра імпульсної напруги $u_{д2\delta}(t)$, і розглянемо процес в інтервалі $t^- \le t \le t^- + \Delta t = t^+$, де $\Delta t \to 0$. Усі функції в цьому інтервалі відзначатимемо індексом $(-+)$. Цей процес описується системою рівнянь

$$R_1 i_{1(-+)}(t) + u_{L1(-+)}(t) = u_{д1(-+)}(t);\quad R_2 i_{2(-+)}(t) + u_{L2(-+)}(t) = \Psi\delta(t); \tag{11}$$

$$\psi_{1(-+)}(t) = \int_{t^-}^{t} u_{L1(-+)}(t)\mathrm{d}t + \psi_1^-;\quad \psi_{2(-+)}(t) = \int_{t^-}^{t} u_{L2(-+)}(t)\mathrm{d}t + \psi_2^-; \tag{12}$$

$$\psi_{1(-+)}(t) = L_{11}i_{1(-+)}(t) + L_{12}i_{2(-+)};\quad \psi_{2(-+)}(t) = L_{21}i_{1(-+)}(t) + L_{22}i_{2(-+)}. \tag{13}$$

З рівнянь (11) одержуємо, що

$$u_{L1(-+)}(t) = u_{д1(-+)}(t) - R_1 i_{1(-+)}(t);\quad u_{L2(-+)}(t) = \Psi\delta(t) - R_2 i_{2(-+)}(t). \tag{14}$$

Підставивши (14) до (12), для моменту $t = t^+$ маємо

$$\psi_1^+ = \int_{t^-}^{t^+} u_{L1(-+)}(t)\mathrm{d}t + \psi_1^- = \int_{t^-}^{t^+} u_{д1(-+)}(t)\mathrm{d}t - \int_{t^-}^{t^+} R_1 i_{1(-+)}(t)\mathrm{d}t + \psi_1^-; \tag{15}$$

$$\psi_2^+ = \int_{t^-}^{t^+} u_{L2(-+)}(t)\mathrm{d}t + \psi_2^- = \int_{t^-}^{t^+} \Psi\delta(t)\mathrm{d}t - \int_{t^-}^{t^+} R_2 i_{2(-+)}(t)\mathrm{d}t + \psi_2^-. \tag{16}$$

Згідно з формулами (12), потокозчеплення $\psi_{1(-+)}(t),\ \psi_{2(-+)}(t)$ є інтегральними функціями. Струми $i_{1(-+)}(t),\ i_{2(-+)}(t)$ зв'язані з потокозчепленнями $\psi_{1(-+)}(t),\ \psi_{2(-+)}(t)$ алгебраїчними залежностями (13), отже, вони мають цю саму властивість. Тому у формулі (15) обидва інтеграли й у формулі (16) – другий інтеграл дорівнюють нулю, і формули (15), (16) зводяться до вигляду

$$\psi_1^+ = \psi_1^-; \tag{17}$$

$$\psi_2^+ = \Psi + \psi_2^-. \tag{18}$$

При $t = t^+$ за умовою задачі маємо $i_{2(-+)}(t^+) = i_2^+ = 0$, тому

$$\psi_1^+ = L_{11}i_1^+ + L_{12}i_2^+ = L_{11}i_1^+; \tag{19}$$

$$\psi_2^+ = L_{21}i_1^+ + L_{21}i_2^+ = L_{21}i_1^+, \tag{20}$$

звідки

$$i_1^+ = \frac{\psi_1^+}{L_{11}} \neq i_1^-; \quad \psi_2^+ = L_{21}\frac{\psi_1^+}{L_{11}} = \frac{L_{21}}{L_{11}}\psi_1^+ \neq \psi_2^-. \tag{21}$$

З (18) маємо

$$\Psi = \psi_2^+ - \psi_2^-. \tag{22}$$

Підставивши (20) до (21), отримуємо з урахуванням (8) значення параметра імпульсної напруги $u_{\text{д}2\delta}(t)$

$$\Psi = \frac{L_{21}}{L_{11}}\psi_1^+ - \psi_2^- = \frac{L_{21}}{L_{11}}\psi_1^- - \psi_2^- = \frac{L_{21}}{L_{11}}(L_{11}i_1^- + L_{12}i_2^-) - (L_{21}i_1^- + L_{22}i_2^-) = \frac{L_{12}L_{21} - L_{11}L_{22}}{L_{11}}i_2^-. \tag{23}$$

Отже, під час вмикання до вторинної обмотки трансформатора імпульсної напруги (10) з параметром (22) (а це є рівнозначним розмиканню цієї обмотки) струм і потокозчеплення вторинної обмотки, а також струм первинної обмотки змінюються миттєво, а потокозчеплення первинної обмотки залишається незмінним.

Перехідний процес після розмикання вторинної обмотки (тобто. при $t \geq t^+$) відбувається тільки в первинній обмотці. Він описується системою рівнянь

$$R_1 i_1(t) + u_{L1}(t) = u_{\text{д}1}(t); \quad \psi_1(t) = \int_{t^+}^{t} u_{L1}(t)\mathrm{d}t + \psi_1^+; \quad \psi_1(t) = L_{11}i_1(t).$$

Висновки. 1. Закони комутації набувають застосування тільки тоді, коли навої та конденсатори описувати диференційними співвідношеннями. Якщо ж ці елементи електричного кола описувати інтегральними співвідношеннями, то закони комутації стають зайвими.

2. Закони комутації мають просте математичне обґрунтування на підставі інтегральних співвідношень, що описують навій і конденсатор. Оскільки математичне обґрунтування є вагомішим від фізичного, то фізичне обґрунтування належить розглядати тільки як ілюстрацію їх несуперечливості законам фізики.

3. У практиці часто виникає необхідність розраховувати перехідні процеси, зумовлені комутаціями, які допустимо вважати миттєвими (вимикання з мережі первинного кола трансформаторів та електричних машин змінного струму, шунтування секцій конденсаторів тощо). До того ж закони комутації ігноруються. Початкові стани кіл після таких комутацій доцільно розраховувати з застосуванням дельта-функції Дірака.

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники: электрические цепи: учебник. – М.: Гардарики, 2002. – 638 с. 2. Основы теории цепей: учебник / Г.В. Зевеке, П.А. Ионкин, А.В. Нетушил, С.В. Страхов. – М.: Энергия, 1975. – 752 с. 3. Перхач В.С. Теоретична електротехніка: лінійні кола: підручник. – К.: Вища шк., 1992. – 439 с. 4. Filippow E. Grundlagen der Elektrotechnik. – Leipzig. 1970.