

РОЗРАХУНОК РІВНОВАЖНИКОВИМ МЕТОДОМ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ У КОЛІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ПРИ ПЕРІОДИЧНІЙ СКЛАДЕНІЙ НАПРУЗІ ЖИВЛЕННЯ

© Фільц Р.В., Лябук М.Н., 2008

Показано застосування рівноважникового методу розв'язування лінійних інтегральних рівнянь з постійними коефіцієнтами до розрахунку ustalених і перехідних процесів у лінійних електричних колах другого порядку за періодичної складеної напруги чи живлення.

Analytical method of calculating steady states and transients in linear circuits with periodical inputs has been developed. The method is based on using integral equations and on description of functions by the terms of equivalents.

Задачі дослідження. Задачею дослідження є опрацювання ефективного методу розрахунку процесів у лінійних стаціонарних електричних колах при складених періодичних вимушеннях, тобто таких, що є періодичними функціями, утвореними з фінітної функції за допомогою її періодичного продовження з періодом T .

Аналіз останніх досліджень. Відповідь лінійного стаціонарного кола на складене періодичне вимушення має вільну й вимушену складову. Вільну складову розраховують, як правило, операторним методом Гевісайда. Вимушену складову розраховують символічним методом на підставі розкладу періодичного вимушення в ряд Фур'є або операторним методом Гевісайда. Перший із цих методів спричиняє результат у вигляді суми ряду, обчислення якого вимагає виконання дуже великої кількості арифметичних операцій, а другий вимагає застосування складнішої частини теорії функцій комплексної змінної – теорії лишків і, як і весь операторний метод Гевісайда, характеризується відсутністю наочності.

Рівноважниковий метод розв'язування лінійних інтегральних рівнянь зі сталими коефіцієнтами [1, 2] усуває обидва вказані недоліки. Тут вимушена складова (усталений процес) визначається як періодичний розв'язок двоточкової крайової задачі для системи інтегральних та алгебраїчних рівнянь, у якій крайова умова віддзеркалює вимогу періодичності розв'язку на періоді T вимушувальної сили. Вільна складова визначається як розв'язок початкової задачі для системи інтегральних та алгебраїчних рівнянь, у якій початкова умова є невідомою. Початкові значення для вільної складової визначаються з вимоги, щоб сума початкових значень вимушеної та вільної складової для кожної з функцій, які є інтегралами від інших функцій, дорівнювала заданим початковим значенням цих функцій для перехідного процесу.

Виклад основного матеріалу. Описано застосування рівноважникового методу до розрахунку процесів у лінійних стаціонарних колах на прикладі нерозгалуженого кола другого порядку (рис. 1) під час періодичного кусково-гармонічного вимушення

$$u_{\text{п}}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{\text{п1}}(t - kT)(h(t - kT) - h(t - (k+1)T)),$$

де $h(t)$ – функція Гевісайда;

$$u_{\text{п1}}(t) = (U_c \cos(\omega t) + U_s \sin(\omega t))(h(t) - h(t - T))$$

– фінітна функція, тобто функція, словесний опис якої має вигляд

$$u_{\text{п1}}(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } t < 0; \\ U_c \cos(\omega t) + U_s \sin(\omega t), & \text{якщо } 0 < t < T; \\ 0, & \text{якщо } t > 0. \end{cases}$$

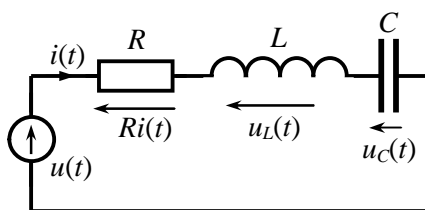


Рис. 1. Нерозгалужене коло другого порядку

Розрахунок усталеного процесу. Періодичний процес описується на першому періоді T системою рівнянь, яка складається з одного алгебраїчного рівняння

$$u_{Cn1}(t) + Ri_{n1}(t) + u_{Ln1}(t) - U_c \cos(\omega t) - U_s \sin(\omega t) = 0 \quad (1)$$

і двох інтегральних рівнянь

$$i_{n1}(t) = \frac{1}{L} \int_0^t dt \cdot u_{Ln1}(t) + i_{n10}; \quad (2)$$

$$u_{Cn1}(t) = \frac{1}{C} \int_0^t dt \cdot i_{n1}(t) + u_{Cn10}, \quad (3)$$

разом з граничною умовою

$$i_{n10} = i_{n1T}; \quad u_{Cn10} = u_{Cn1T}, \quad (4)$$

де $R, L, C, U_c, U_s, \omega$ – відомі числа; $i_{n1}(t), u_{Ln1}(t), u_{Cn1}(t)$ – невідомі функції; $i_{n10} @ i_{n1}(0), u_{Cn10} @ u_{Cn1}(0)$ – невідомі початкові значення функцій $i_{n1}(t), u_{Cn1}(t)$; $i_{n1T} @ i_{n1}(T), u_{Cn1T} @ u_{Cn1}(T)$ – невідомі значення функцій $i_{n1}(t), u_{Cn1}(t)$ при $t = T$.

Системі інтегральних та алгебраїчних рівнянь (1)–(3) відповідає система алгебраїчних рівноважникових рівнянь [1, 2]

$$u_{Cn1r}(r) + Ri_{n1r}(r) + u_{Ln1r}(r) - \frac{U_c + U_s \omega r}{1 + (\omega r)^2} = 0; \quad (5)$$

$$i_{n1r}(r) = \frac{1}{L} r u_{Ln1r}(r) + i_{n10}; \quad (6)$$

$$u_{Cn1}(r) = \frac{1}{C} r i_{n1r}(r) + u_{Cn10}, \quad (7)$$

де $r = \int_0^t dt \cdot$ – інтегральний оператор; $i_{n1r}(r), u_{Cn1r}(r), u_{Ln1r}(r)$ – рівноважники невідомих функцій.

З рівняння (7) отримуємо

$$u_{Ln1r}(r) = \frac{L}{r} i_{n1r}(r) - \frac{Li_{n10}}{r}. \quad (8)$$

Виключивши в рівнянні (5) невідомі рівноважники $u_{Ln1r}(r), u_{Cn1r}(r)$, отримуємо алгебраїчне рівняння

$$\frac{1}{C} r i_{n1r}(r) + u_{Cn10} + Ri_{n1r}(r) + \frac{L}{r} i_{n1r}(r) - \frac{Li_{n10}}{r} - \frac{U_c + U_s \omega r}{1 + (\omega r)^2} = 0.$$

Перетворимо його до вигляду

$$\left(\frac{1}{C} r + R + \frac{L}{r}\right) i_{n1r}(r) = \frac{U_c + U_s \omega r}{1 + (\omega r)^2} - u_{Cn10} + \frac{Li_{n10}}{r}. \quad (9)$$

Розв'язком рівняння (9) є функція

$$i_{n1r}(r) = \frac{\frac{U_c + U_s \omega r}{1 + (\omega r)^2} - u_{Cn10} + \frac{Li_{n10}}{r}}{\frac{1}{C} r + R + \frac{L}{r}} = \frac{i_{n10} + \left(\frac{U_c}{L} - \frac{u_{Cn10}}{L}\right)r + \frac{\omega U_s}{L} r^2}{(1 + (\omega r)^2) \left(\frac{1}{LC} r^2 + \frac{R}{L} r + 1\right)}. \quad (10)$$

Другий множник у знаменнику виразу (10) є рівноважниковим характеристичним многочленом кола. Запишемо його у вигляді

$$1 + \frac{R}{L}r + \frac{1}{LC}r^2 = (1 + \alpha_1 r)(1 + \alpha_2 r), \quad (11)$$

де

$$\alpha_1 = \frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}; \quad \alpha_2 = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}. \quad (12)$$

Формула (10) набуває з урахуванням (11) вигляду

$$i_{n1r}(r) = \frac{i_{n10} + \left(\frac{U_c}{L} - \frac{1}{L}u_{Cn10}\right)r + \frac{U_s}{L}\omega r^2}{(1 + (\omega r)^2)(1 + \alpha_1 r)(1 + \alpha_2 r)}. \quad (13)$$

Запишемо її як суму простих дробів

$$i_{n1r}(r) = A_{1c} \frac{1}{1 + (\omega r)^2} + A_{1s} \frac{\omega r}{1 + (\omega r)^2} + A_{1:} \frac{1}{1 + \alpha_1 r} + A_{2:} \frac{1}{1 + \alpha_2 r}, \quad (14)$$

де $A_{1c}, A_{1s}, A_{1:}, A_{2:}$ – невідомі коефіцієнти. Звівши цю суму до спільного знаменника, маємо

$$i_{n1r}(r) = \frac{1}{(1 + \omega^2 r^2)(1 + \alpha_1 r)(1 + \alpha_2 r)} \left((A_{1c} + A_{1:} + A_{2:}) + ((\alpha_1 + \alpha_2)A_{1c} + \omega A_{1s} + \alpha_2 A_{1:} + \alpha_1 A_{2:})r + \right. \\ \left. + (\alpha_1 \alpha_2 A_{1c} + \omega(\alpha_1 + \alpha_2)A_{1s} + \omega^2 A_{1:} + \omega^2 A_{2:})r^2 + (\omega \alpha_1 \alpha_2 A_{1s} + \omega^2 \alpha_2 A_{1:} + \omega^2 \alpha_1 A_{2:})r^3 \right). \quad (15)$$

З порівняння у формулах (15) і (13) коефіцієнтів за однакових степенів оператора r отримуємо лінійну систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} A_{1c} + A_{1:} + A_{2:} &= i_{n10}; \\ (\alpha_1 + \alpha_2)A_{1c} + \omega A_{1s} + \alpha_2 A_{1:} + \alpha_1 A_{2:} &= \frac{U_c}{L} - \frac{u_{Cn10}}{L}; \\ \alpha_1 \alpha_2 A_{1c} + \omega(\alpha_1 + \alpha_2)A_{1s} + \omega^2 A_{1:} + \omega^2 A_{2:} &= \frac{\omega U_s}{L}; \\ \omega \alpha_1 \alpha_2 A_{1s} + \omega^2 \alpha_2 A_{1:} + \omega^2 \alpha_1 A_{2:} &= 0. \end{aligned}$$

Запишемо її як одне векторне рівняння

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{g} & 1 & 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & \omega & \alpha_2 & \alpha_1 \\ \alpha_1 \alpha_2 & \omega(\alpha_1 + \alpha_2) & \omega^2 & \omega^2 \\ \mathbf{g} & \alpha_1 \alpha_2 & \omega \alpha_2 & \omega \alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1c} \\ A_{1s} \\ A_{1:} \\ A_{2:} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{n10} \\ \frac{U_c}{L} - \frac{u_{Cn10}}{L} \\ \frac{\omega U_s}{L} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Розв'язок рівняння (16) знаходимо числовим способом за формулою

$$\begin{bmatrix} A_{1c} \\ A_{1s} \\ A_{1:} \\ A_{2:} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{g} & 1 & 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & \omega & \alpha_2 & \alpha_1 \\ \alpha_1 \alpha_2 & \omega(\alpha_1 + \alpha_2) & \omega^2 & \omega^2 \\ \mathbf{g} & \alpha_1 \alpha_2 & \omega \alpha_2 & \omega \alpha_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} i_{n10} \\ \frac{U_c}{L} - \frac{u_{Cn10}}{L} \\ \frac{\omega U_s}{L} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}i_{n10} + a_{12}u_{Cn10} + a_{13}U_c + a_{14}U_s \\ a_{21}i_{n10} + a_{22}u_{Cn10} + a_{23}U_c + a_{24}U_s \\ a_{31}i_{n10} + a_{32}u_{Cn10} + a_{33}U_c + a_{34}U_s \\ a_{41}i_{n10} + a_{42}u_{Cn10} + a_{43}U_c + a_{44}U_s \end{bmatrix}, \quad (17)$$

де a_{jk} ($j, k = 1, \dots, 4$) – відомі числа. Підставивши (17) до (14), отримуємо вираз

$$i_{n1r}(r) = (a_{11}i_{n10} + a_{12}u_{Cn10} + a_{13}U_c + a_{14}U_s) \frac{1}{1 + (\omega r)^2} + (a_{21}i_{n10} + a_{22}u_{Cn10} + a_{23}U_c + a_{24}U_s) \frac{\omega r}{1 + (\omega r)^2} +$$

$$+(a_{31}i_{п10} + a_{32}u_{Cп10} + a_{33}U_c + a_{34}U_s)\frac{1}{1 + \alpha_1 r} + (a_{41}i_{п10} + a_{42}u_{Cп10} + a_{43}U_c + a_{44}U_s)\frac{1}{1 + \alpha_2 r}. \quad (18)$$

Рівноважникові (18) відповідає функція часу

$$\begin{aligned} i_{п1}(t) = & \\ = & (a_{11}i_{п10} + a_{12}u_{Cп10} + a_{13}U_c + a_{14}U_s)\cos(\omega t) + (a_{21}i_{п10} + a_{22}u_{Cп10} + a_{23}U_c + a_{24}U_s)\sin(\omega t) + \\ & +(a_{31}i_{п10} + a_{32}u_{Cп10} + a_{33}U_c + a_{34}U_s)e^{-\alpha_1 t} + (a_{41}i_{п10} + a_{42}u_{Cп10} + a_{43}U_c + a_{44}U_s)e^{-\alpha_2 t}. \end{aligned} \quad (19)$$

Підставивши до (19) $t = T$, отримуємо вираз

$$\begin{aligned} i_{п1}(T) = & \\ = & (a_{11}i_{п10} + a_{12}u_{Cп10} + a_{13}U_c + a_{14}U_s)\cos(\omega T) + (a_{21}i_{п10} + a_{22}u_{Cп10} + a_{23}U_c + a_{24}U_s)\sin(\omega T) + \\ & +(a_{31}i_{п10} + a_{32}u_{Cп10} + a_{33}U_c + a_{34}U_s)e^{-\alpha_1 T} + (a_{41}i_{п10} + a_{42}u_{Cп10} + a_{43}U_c + a_{44}U_s)e^{-\alpha_2 T}. \end{aligned} \quad (20)$$

Перша частина граничної умови (4) набуває з урахуванням (20) вигляду

$$\begin{aligned} (a_{11}i_{п10} + a_{12}u_{Cп10} + a_{13}U_c + a_{14}U_s)\cos(\omega T) + (a_{21}i_{п10} + a_{22}u_{Cп10} + a_{23}U_c + a_{24}U_s)\sin(\omega T) + \\ + (a_{31}i_{п10} + a_{32}u_{Cп10} + a_{33}U_c + a_{34}U_s)e^{-\alpha_1 T} + (a_{41}i_{п10} + a_{42}u_{Cп10} + a_{43}U_c + a_{44}U_s)e^{-\alpha_2 T} = i_{п10}. \end{aligned} \quad (21)$$

Рівняння (21) містить дві невідомі – $i_{п10}$, $u_{Cп10}$. Запишемо його у вигляді

$$k_{11}i_{п10} + k_{12}u_{Cп10} = g_1, \quad (22)$$

де

$$\begin{aligned} k_{11} = & a_{11}\cos(\omega T) + a_{21}\sin(\omega T) + a_{31}e^{-\alpha_1 T} + a_{41}e^{-\alpha_2 T} - 1; \\ k_{12} = & a_{12}\cos(\omega T) + a_{22}\sin(\omega T) + a_{32}e^{-\alpha_1 T} + a_{42}e^{-\alpha_2 T}; \end{aligned} \quad (23)$$

$$g_1 = -(a_{13}U_c + a_{14}U_s)\cos(\omega T) - (a_{23}U_c + a_{24}U_s)\sin(\omega T) - (a_{33}U_c + a_{34}U_s)e^{-\alpha_1 T} - (a_{43}U_c + a_{44}U_s)e^{-\alpha_2 T}.$$

Підставивши (10) до (7), отримуємо вираз

$$u_{Cп1}(r) = \frac{1}{C}ri_{п1r}(r) + u_{Cп10} = \frac{\frac{1}{C}i_{п10}r + (\frac{U_c}{LC} - \frac{u_{Cп10}}{LC})r^2 + \frac{\omega U_s}{LC}r^3}{(1 + (\omega r)^2)(1 + \alpha_1 r)(1 + \alpha_2 r)} + u_{Cп10}. \quad (24)$$

Запишемо його у вигляді

$$u_{Cп1}(r) = B_{1c}\frac{1}{1 + (\omega r)^2} + B_{1s}\frac{\omega r}{1 + (\omega r)^2} + B_{1:}\frac{1}{1 + \alpha_1 r} + B_{2:}\frac{1}{1 + \alpha_2 r} + u_{Cп10}. \quad (25)$$

Звівши до спільного знаменника, маємо

$$\begin{aligned} u_{Cп1}(r) = & \frac{1}{(1 + \omega^2 r^2)(1 + \alpha_1 r)(1 + \alpha_2 r)}((B_{1c} + B_{1:} + B_{2:}) + ((\alpha_1 + \alpha_2)B_{1c} + \omega B_{1s} + \alpha_2 B_{1:} + \alpha_1 B_{2:})r + \\ & + (\alpha_1 \alpha_2 B_{1c} + \omega(\alpha_1 + \alpha_2)B_{1s} + \omega^2 B_{1:} + \omega^2 B_{2:})r^2 + (\omega \alpha_1 \alpha_2 B_{1s} + \omega^2 \alpha_2 B_{1:} + \omega^2 \alpha_1 B_{2:})r^3) + u_{Cп10}. \end{aligned} \quad (26)$$

З порівняння у формулах (26) і (24) коефіцієнтів за однакових степенів оператора r отримуємо векторне рівняння

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{g} & 1 & 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & \omega & \alpha_2 & \alpha_1 \\ \alpha_1 \alpha_2 & \omega(\alpha_1 + \alpha_2) & \omega^2 & \omega^2 \\ \mathbf{g} & \alpha_1 \alpha_2 & \omega \alpha_2 & \omega \alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{1c} \\ B_{1s} \\ B_{1:} \\ B_{2:} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ \frac{i_{п10}}{C} \\ \frac{U_c}{LC} - \frac{u_{Cп10}}{LC} \\ \frac{U_s}{LC} \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Розв'язок рівняння (27) знаходимо числовим способом за формулою

$$\begin{bmatrix} B_{1c} \\ B_{1s} \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{g} & 1 & 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & \omega & \alpha_2 & \alpha_1 \\ \alpha_1 \alpha_2 & \omega(\alpha_1 + \alpha_2) & \omega^2 & \omega^2 \\ \mathbf{g} & \alpha_1 \alpha_2 & \omega \alpha_2 & \omega \alpha_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ \frac{i_{n10}}{C} \\ \frac{U_c}{LC} - \frac{u_{Cn10}}{LC} \\ \frac{U_s}{LC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}i_{n10} + b_{12}u_{Cn10} + b_{13}U_c + b_{14}U_s \\ b_{21}i_{n10} + b_{22}u_{Cn10} + b_{23}U_c + b_{24}U_s \\ b_{31}i_{n10} + b_{32}u_{Cn10} + b_{33}U_c + b_{34}U_s \\ b_{41}i_{n10} + b_{42}u_{Cn10} + b_{43}U_c + b_{44}U_s \end{bmatrix}, \quad (28)$$

де b_{jk} ($j, k = 1, \dots, 4$) – відомі числа. Підставивши (28) до (25), отримуємо вираз

$$\begin{aligned} u_{Cn1r}(r) = & \\ = & (b_{11}i_{n10} + b_{12}u_{Cn10} + b_{13}U_c + b_{14}U_s) \frac{1}{1 + (\omega r)^2} + (b_{21}i_{n10} + b_{22}u_{Cn10} + b_{23}U_c + b_{24}U_s) \frac{\omega r}{1 + (\omega r)^2} + \\ + & (b_{31}i_{n10} + b_{32}u_{Cn10} + b_{33}U_c + b_{34}U_s) \frac{1}{1 + \alpha_1 r} + (b_{41}i_{n10} + b_{42}u_{Cn10} + b_{43}U_c + b_{44}U_s) \frac{1}{1 + \alpha_2 r} + u_{Cn10}. \end{aligned} \quad (29)$$

Рівноважникові (29) відповідає функція часу

$$\begin{aligned} u_{Cn1}(t) = & \\ = & (b_{11}i_{n10} + b_{12}u_{Cn10} + b_{13}U_c + b_{14}U_s) \cos(\omega t) + (b_{21}i_{n10} + b_{22}u_{Cn10} + b_{23}U_c + b_{24}U_s) \sin(\omega t) + \\ + & (b_{31}i_{n10} + b_{32}u_{Cn10} + b_{33}U_c + b_{34}U_s) e^{-\alpha_1 t} + (b_{41}i_{n10} + b_{42}u_{Cn10} + b_{43}U_c + b_{44}U_s) e^{-\alpha_2 t} + u_{Cn10}. \end{aligned} \quad (30)$$

Підставивши до (30) $t = T$, отримуємо вираз

$$\begin{aligned} u_{Cn1}(T) = & \\ = & (b_{11}i_{n10} + b_{12}u_{Cn10} + b_{13}U_c + b_{14}U_s) \cos(\omega T) + (b_{21}i_{n10} + b_{22}u_{Cn10} + b_{23}U_c + b_{24}U_s) \sin(\omega T) + \\ + & (b_{31}i_{n10} + b_{32}u_{Cn10} + b_{33}U_c + b_{34}U_s) e^{-\alpha_1 T} + (b_{41}i_{n10} + b_{42}u_{Cn10} + b_{43}U_c + b_{44}U_s) e^{-\alpha_2 T} + u_{Cn10}. \end{aligned} \quad (31)$$

Друга частина граничної умови (4) набуває з урахуванням (31) вигляду

$$\begin{aligned} (b_{11}i_{n10} + b_{12}u_{Cn10} + b_{13}U_c + b_{14}U_s) \cos(\omega T) + (b_{21}i_{n10} + b_{22}u_{Cn10} + b_{23}U_c + b_{24}U_s) \sin(\omega T) + \\ + (b_{31}i_{n10} + b_{32}u_{Cn10} + b_{33}U_c + b_{34}U_s) e^{-\alpha_1 T} + (b_{41}i_{n10} + b_{42}u_{Cn10} + b_{43}U_c + b_{44}U_s) e^{-\alpha_2 T} + u_{Cn10} = u_{Cn10}. \end{aligned} \quad (32)$$

Рівняння (32) містить дві невідомі – i_{n10} , u_{Cn10} . Запишемо його у вигляді

$$k_{21}i_{n10} + k_{22}u_{Cn10} = g_2, \quad (33)$$

де

$$\begin{aligned} k_{21} = & b_{11} \cos(\omega T) + b_{21} \sin(\omega T) + b_{31} e^{-\alpha_1 T} + b_{41} e^{-\alpha_2 T}; \\ k_{22} = & b_{12} \cos(\omega T) + b_{22} \sin(\omega T) + b_{32} e^{-\alpha_1 T} + b_{42} e^{-\alpha_2 T}; \\ g_2 = & -(b_{13}U_c + b_{14}U_s) \cos(\omega T) - (b_{23}U_c + b_{24}U_s) \sin(\omega T) - (b_{33}U_c + b_{34}U_s) e^{-\alpha_1 T} - (b_{43}U_c + b_{44}U_s) e^{-\alpha_2 T}. \end{aligned} \quad (34)$$

Розв'язавши систему рівнянь (22), (33) числово, отримуємо невідомі початкові значення i_{n10} , u_{Cn10} . Підставивши їх до (19), (30), отримуємо шуканий розв'язок двоточкової крайової задачі (1)–(4).

Вираз для періодичної складової струму при $0 \leq t < \infty$ сконструюємо періодичним продовженням функцій (19), (30), тобто як нескінченну суму фінітних функцій, кожна з яких відрізняється від попередньої тільки зсувом уздовж осі часу на один період T

$$\begin{aligned} i_n(t) = & i_{n1}(t)(h(t) - h(t - T)) + i_{n1}(t - T)(h(t - T) - h(t - 2T)) + \dots + \\ + & i_{n1}(t - kT)(h(t - kT) - h(t - (k + 1)T)) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} i_{n1}(t - kT)(h(t - kT) - h(t - (k + 1)T)); \end{aligned} \quad (35)$$

$$u_{Cn}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{Cn1}(t - kT)(h(t - kT) - h(t - (k + 1)T)).$$

Перетворимо вирази (35) з застосуванням оператора зсуву [3, 4]

$$\zeta(\theta) @ e^{\theta \frac{d}{dt}}.$$

Як відомо, для довільної функції $x(t)$ і для довільного θ маємо

$$x(t + \theta) = \zeta(\theta)x(t) = e^{\theta \frac{d}{dt}}x(t), \quad (36)$$

тобто функція $x(t + \theta)$, графік якої отриманий з графіка функції $x(t)$ за допомогою зсуву вздовж осі абсцис на величину θ , формально дорівнює добуткові оператора зсуву $\zeta(\theta)$ на функцію $x(t)$. З (36) випливає, що

$$x(t + k\theta) = e^{k\theta \frac{d}{dt}}x(t) = (e^{\theta \frac{d}{dt}}x(t))^k = \zeta^k(\theta)x(t).$$

Прийнявши $\theta = -T$, запишемо вирази (35) у вигляді

$$i_{\Pi}(t) = (1 + \zeta(-T) + \dots + \zeta^k(-T) + \dots)i_{\Pi 1}(t)(h(t) - h(t - T)) = \frac{1}{1 - \zeta(-T)}i_{\Pi 1}(t)(h(t) - h(t - T));$$

$$u_{C\Pi}(t) = (1 + \zeta(-T) + \dots + \zeta^k(-T) + \dots)u_{C\Pi 1}(t)(h(t) - h(t - T)) = \frac{1}{1 - \zeta(-T)}u_{C\Pi 1}(t)(h(t) - h(t - T)), \quad (37)$$

оскільки нескінченна сума $1 + \zeta(-T) + \dots + \zeta^k(-T) + \dots$ є розкладом у ряд Тейлора функції $\frac{1}{1 - \zeta(-T)}$.

На рис. 2 показані графіки функцій $i_{\Pi}(t)$, $u_{C\Pi}(t)$ для аперіодичного кола з параметрами $R = 2 \Omega$, $L = 0,01 \text{ Н}$, $C = 0,001 \text{ Ф}$ ($\alpha_1 = 4,07 \text{ с}^{-1}$; $\alpha_2 = 2460 \text{ с}^{-1}$), а на рис. 3 – для коливного кола з параметрами $R = 0,1 \Omega$, $L = 0,01 \text{ Н}$, $C = 0,0001 \text{ Ф}$ ($\alpha_1 = (100 - j9990) \text{ с}^{-1}$; $\alpha_2 = (100 + j9990) \text{ с}^{-1}$), за напруги $u_{\Pi}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (8\cos(2\pi \cdot 100(t - 0,003k)) + 2\sin(2\pi \cdot 100(t - 0,003k)))(h(t) - h(t - 0,003))$, графік якої показаний на рис. 4.

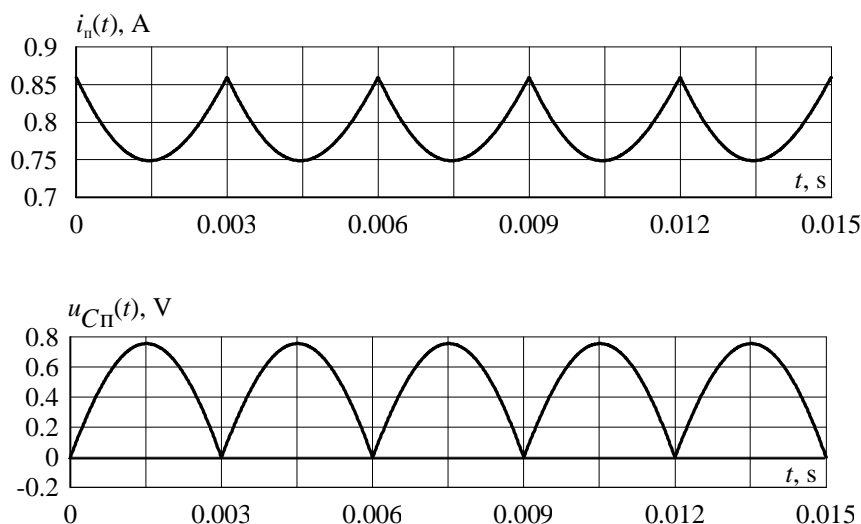


Рис. 2. Графіки функцій $i_{\Pi}(t)$, $u_{C\Pi}(t)$ для аперіодичного кола

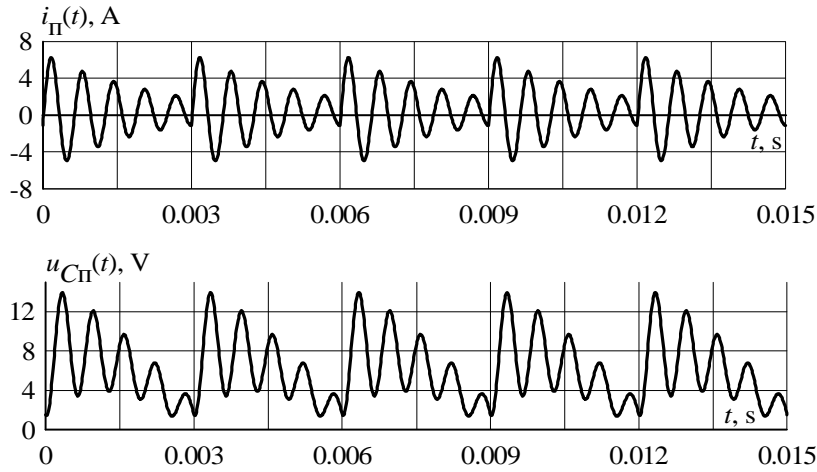


Рис. 3. Графіки функцій $i_{\pi}(t)$, $u_{C\pi}(t)$ для коливного кола

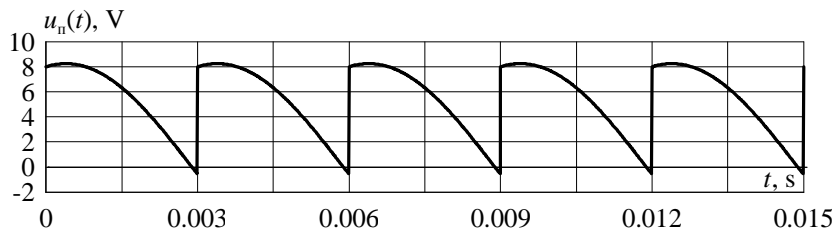


Рис. 4. Графік функцій $u_{\pi}(t)$

Розрахунок перехідного процесу. Початкова умова для перехідного процесу має вигляд

$$i(0) @ i_0; \quad u_C(0) @ u_{C0}, \quad (38)$$

де i_0 , u_{C0} – відомі числа. У перехідному процесі напруга на конденсаторі й струм у колі є сумами вільних складових $i_B(t)$, $u_{CB}(t)$ і періодичних складових (35), тобто

$$i(t) = i_B(t) + i_{\pi}(t); \quad u_C(t) = u_{CB}(t) + u_{C\pi}(t). \quad (39)$$

Вільні складові є розв'язком системи рівнянь

$$u_{CB}(t) + Ri_B(t) + u_{LB}(t) = 0; \quad i_B(t) = \frac{1}{L} \int_0^t dt \cdot u_{LB}(t) + i_B(0); \quad u_{CB}(t) = \frac{1}{C} \int_0^t dt \cdot i_B(t) + u_{CB}(0). \quad (40)$$

У рівняннях (35) початкові значення $i_B(0)$, $u_{CB}(0)$ вільних складових є поки що невідомими. Системі (40) відповідає система рівноважникових рівнянь

$$u_{CB}(r) + Ri_{Br}(r) + u_{LBr}(r) = 0; \quad i_{Br}(r) = \frac{1}{L} r u_{LBr}(r) + i_B(0); \quad u_{CB}(r) = \frac{1}{C} r i_{Br}(r) + u_{CB}(0). \quad (41)$$

Розв'язавши систему (41) щодо невідомих рівноважників $i_{Br}(r)$, $u_{CB}(r)$, отримуємо формули

$$i_{Br}(r) = \frac{i_B(0) - \frac{u_{CB}(0)}{L} r}{(1 + \alpha_1 r)(1 + \alpha_2 r)}; \quad u_{CB}(r) = \frac{u_{CB}(0) + (\frac{R}{L} u_{CB}(0) + \frac{1}{C} i_B(0)) r}{(1 + \alpha_1 r)(1 + \alpha_2 r)} \quad (42)$$

Розклавши функції (42) на прості дроби, отримуємо

$$i_{Br}(r) = \frac{\frac{u_{CB}(0)}{L} + \alpha_1 i_B(0)}{\alpha_1 - \alpha_2} \frac{1}{(1 + \alpha_1 r)} + \frac{-\frac{u_{CB}(0)}{L} - \alpha_2 i_B(0)}{\alpha_1 - \alpha_2} \frac{1}{(1 + \alpha_2 r)}; \quad (43)$$

$$u_{CB}(r) = \frac{(\alpha_1 - \frac{R}{L}) u_{CB}(0) - \frac{1}{C} i_B(0)}{\alpha_1 - \alpha_2} \frac{1}{(1 + \alpha_1 r)} + \frac{(\frac{R}{L} - \alpha_2) u_{CB}(0) + \frac{1}{C} i_B(0)}{\alpha_1 - \alpha_2} \frac{1}{(1 + \alpha_2 r)}.$$

Рівноважникам (43) відповідають функції часу

$$i_B(t) = \frac{\frac{u_{CB}(0)}{L} + \alpha_1 i_B(0)}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{-\alpha_1 t} + \frac{-\frac{u_{CB}(0)}{L} - \alpha_2 i_B(0)}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{-\alpha_2 t};$$

$$u_{CB}(t) = \frac{(\alpha_1 - \frac{R}{L})u_{CB}(0) - \frac{1}{C} i_B(0)}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{-\alpha_1 t} + \frac{(\frac{R}{L} - \alpha_2)u_{CB}(0) + \frac{1}{C} i_B(0)}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{-\alpha_2 t}. \quad (44)$$

Прийнявши в (44) $t=0$ і враховуючи початкову умову (38), отримуємо систему рівнянь

$$i(0) = i_B(0) + i_{\Pi}(0) = i_B(0) + i_{\Pi 10} = i_0;$$

$$u_C(0) = u_{CB}(0) + u_{C\Pi}(0) = u_{CB}(0) + u_{C\Pi 10} = u_{C0},$$

з якої знаходимо

$$i_B(0) = i_0 - i_{\Pi 10}; \quad u_{CB}(0) = u_{C0} - u_{C\Pi}(0).$$

Підставивши обчислені значення $i_B(0)$, $u_{CB}(0)$ до (44) і отриманий результат до (39), отримуємо вирази струму в колі й напруги на конденсаторі в перехідному процесі.

Висновки. Рівноважниковий метод розрахунку ustalених і перехідних процесів у лінійному стаціонарному колі другого порядку з періодичним кусково-гармонічним вимушенням є концепційно простішим і з обчислювального погляду ефективнішим порівняно з операторним методом Гевісайда.

1. Filc. R. *Equivalents Method for Linear Circuits Transients Calculation. Proceedings of International Conference on Modern Problems of Radio Engineering, Telecommunications and Computer Science. TCSET'2002.* – Lviv – Slavsk, 2002. – С. 18–23. 2. Filc R. *Rachunek równoważników.* – Poznań, 2006. 3. Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике.* – М.: Наука, 1970. 4. Фильц Р. *Оператор сдвига и его применение в задачах электромеханики.* // Изв. вузов. Электромеханика. – 1991. – № 4. – С. 5–12.

УДК 629.7.064.5

Б.М. Харчишин

Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра ЕМА

КОЕФІЦІЄНТ ЧУТЛИВОСТІ ЗА ШВИДКІСТЮ ПОЛЯРИЗОВАНОГО ЕЛЕКТРОДВИГУНА

Ó Харчишин Б.М., 2008

Наведено результати дослідження коефіцієнта чутливості за швидкістю магніто-електричного перетворювача поляризованого типу за допомогою математичної моделі розрахунку його магнітного стану.

The results of the angular speed sensitivity research of electromagnetic polarized transformer are provided calculated with the help of the mathematical model of its magnetic state.

Вступ. У сучасних електроприводах систем слідкування часто застосовують поляризовані двигуни обмеженого кута повороту, що є магнітоелектричними перетворювачами (МЕП) вхідного електричного сигналу в пропорційне переміщення робочого органа [1]. Це пояснюється вдалим поєднанням їхніх позитивних якостей як виконавчих елементів (швидкодія, високий коефіцієнт віддачі), так і метрологічних перетворювачів (лінійність та симетрія характеристик, мала зона нечутливості), що зумовило подальше зацікавлення розробників у використанні двигунів такого типу.