

## ОПТИМІЗАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ СКАНУВАЛЬНОГО ІНТЕРФЕРОМЕТРА ФАБРИ-ПЕРО З ЦИФРОВОЮ ОБРОБКОЮ ВИХІДНОГО СИГНАЛУ

© Татарин В.Я., Петровська Г.А., 2009

V.Ya. Tataryn, H.A. Petrovska

## OPTIMIZATION OF THE PARAMETERS OF SCANNING FABRI-PEROT INTERFEROMETR WITH DIGITAL SIGNAL PROCEEDING

© Tataryn V.Ya., Petrovska H.A., 2009

Розглянуто вплив характеристик АЦП на чутливість сканувального інтерферометра Фабрі-Перо з цифровою обробкою вихідного сигналу. Аналітично розраховано похибку вимірювань, зумовлену обмеженою частотою дискретизації та скінченим кроком квантування вихідного сигналу. Це дає змогу визначити максимально допустимі значення коефіцієнтів відбивання дзеркал інтерферометра для вибраної частоти розгортки, що забезпечує як адекватне аналогово-цифрове перетворення вихідного сигналу, так і максимальне співвідношення сигнал-шум на вході аналогово-цифрового перетворювача.

It is considered an influence of ADC characteristics on the sensitiveness of scanning Fabri-Perot interferometr with digital signal proceeding. An error of measurings is analytically calculated taking into consideration the limited frequency of discretisation and the step of quantum of initial signal. It allows to find the maximally possible values of reflectivities of mirrors of interferometer at the set frequency of involute, which provides both adequate analog digital transformation of initial signal and maximal correlation signal to noise on the ADC input.

### Вступ

Оптимізація параметрів сканувального інтерферометра Фабрі-Перо полягає у виборі таких його параметрів: коефіцієнта відбивання дзеркал та частоти сканування [1], що забезпечують максимальну чутливість інтерферометра за максимальної швидкодії для заданих параметрів АЦП – частоти дискретизації та кроку квантування.

Оскільки в багатьох задачах інтерферометрії вигляд вихідного сигналу є наперед відомий, то з'являється можливість скористатись цим як для підвищення точності інтерферометричних вимірювань, так і для спрощення вимірювальної апаратури. Дійсно, для забезпечення адекватного цифро-аналогового перетворення сигналу необхідно забезпечити відсутність в його спектрі складових з частотою, що перевищує половину частоти дискретизації АЦП. Цю проблему можна вирішити як тривіально, використавши відповідний вхідний фільтр для АЦП [1], так і шляхом формування такого вихідного сигналу інтерферометра, де не буде зайвих частотних складових.

Другий шлях дає змогу виключити з вимірювального кола вхідний фільтр АЦП разом з його фазовими похибками, що приводить як до підвищення точності вимірювань, так і до зниження громіздкості апаратури.

Для розв'язання цієї задачі розраховано похибку у визначенні положення медіани апаратної функції інтерферометра, зумовленої обмеженою частотою дискретизації та скінченним кроком квантування вихідного сигналу фотоприймача сканувального інтерферометра Фабрі-Перо. Це дало змогу знайти оптимальний крок квантування вихідного сигналу для забезпечення будь-якої наперед заданої точності вимірювання положення медіани апаратної функції інтерферометра.

Аналіз спектра апаратної функції сканувального інтерферометра Фабрі-Перо дав змогу знайти максимально допустимі значення коефіцієнтів відбивання його дзеркал, що забезпечує як адекватне аналогово-цифрове перетворення вихідного сигналу, так і максимальне співвідношення сигнал-шум на вході аналогово-цифрового перетворювача.

### Розрахунок похибки у визначенні положення медіани апаратної функції інтерферометра

Розглянемо похибку у визначенні положення медіани апаратної функції інтерферометра, зумовлену обмеженою частотою дискретизації та скінченним кроком квантування вихідного сигналу фотоприймача скануючого інтерферометра Фабрі-Перо. Крок дискретизації АЦП на виході фотоприймача позначимо через  $dt$ , а крок квантування –  $dx$ . На рис. 1 показано найбільш несприятливий випадок визначення медіани ділянки вихідного сигналу, а саме – вихідний сигнал між дискретами  $t(i)$  і  $t(i+1)$  має значення  $x + \frac{1}{2}dx$ .

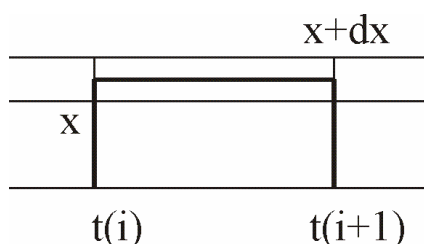


Рис. 1. Визначення медіани ділянки вихідного сигналу фотоприймача інтерферометра

Медіана  $T_m$  цієї ділянки очевидно дорівнює

$$T_m = \frac{t(i) \left( x + \frac{1}{2} dx \right) + t(i+1) \left( x + \frac{1}{2} dx \right)}{2x + dx} = \frac{t(i) \left( x + \frac{1}{2} dx \right) + (t(i) + dt) \left( x + \frac{1}{2} dx \right)}{2x + dx} = t(i) + \frac{1}{2} dt.$$

Проте АЦП на виході фотоприймача може зчитати значення сигналу в точці  $t(i)$  рівним  $x$ , а в точці  $t(i+1)$  – рівним  $x + dx$ . У цьому випадку значення медіани  $T$  цієї ділянки сигналу становитиме:

$$T = \frac{t(i)(x) + t(i+1)(x+dx)}{2x+dx} = \frac{t(i)x + (t(i)+dt)(x+dx)}{2x+dx} = t(i) + \frac{(x+dx)}{2x+dx} dt.$$

Різниця між цими величинами і дасть нам похибку у визначенні медіани  $\Delta T$ :

$$\Delta T = \frac{dx}{2(2x+dx)} dt.$$

З останнього виразу зрозуміло, що за кроку квантування, який значно менший за значення сигналу, похибка буде пропорційною до кроку квантування. Отже, використання багаторівневого АЦП дає вигравш у точності вимірювання:

$$\frac{dt}{\Delta T} = \frac{4x}{dx}.$$

Цей вигравш для 16-розрядного АЦП під час настроювання амплітуди сигналу на половину шкали становитиме:

$$\frac{dt}{\Delta T} = 2^{16},$$

оскільки максимальне значення сигналу становитиме  $2^{15}$ , а середнє значення його ми приймаємо тут як половину максимального значення, тобто  $2^{14} = \frac{2^{16}}{4}$ . Настроювання амплітуди сигналу на половину шкали АЦП необхідне для запобігання обмеженню вихідного сигналу АЦП. Щодо середнього значення відліків АЦП, то значення, яке тут наведено, є дуже грубою оцінкою, проте ця оцінка лише збільшує можливу похибку у визначенні медіани, оскільки за визначенням основну похибку вносять відліки з великим значенням  $x$ , тоді як внесок відліків з меншими значеннями пропорційно менший.

Отже, збільшення розрядності АЦП веде до підвищення точності вимірювань за заданого кроку дискретизації. Однак наведене викладення буде справедливим лише у тому випадку, коли зчитані відліки дійсно відповідають значенням сигналу на виході фотоприймача, тобто виконуються критерії застосування теореми Котельникова [2].

### Аналіз спектра апаратної функції сканувального інтерферометра Фабрі-Перо

Безпосереднє застосування теореми Котельникова у цьому випадку наштовхується на певні математичні труднощі, оскільки ширина апаратної функції інтерферометра Фабрі-Перо є безмежною, в той час, як внаслідок використання сканування, ми її явно обмежуємо в часі. У цьому випадку її спектр є безмежно широким. Тому спектр сигналу треба обмежити. Для цього скористаємось тим фактом, що спектральними складовими сигналу, амплітуда яких менша за половину кроку квантування АЦП, можна знехтувати. Для визначення частоти Котельникова скористаємось значенням розрядності АЦП. Відомо, що неможливо зафіксувати значення, менші за крок квантування АЦП, тобто менші, ніж  $\frac{1}{2^N}$  від максимального сигналу, де  $N$  – розрядність АЦП.

Апаратна функція інтерферометра має вигляд [3]

$$I = I_{\max} \cdot \frac{(1-r)^2}{(1-r)^2 + 4r \sin^2(d/2)} = I_{\max} \cdot \frac{(1-r)^2}{(1-r)^2 + 4r \sin^2\left(\frac{2p \cdot n \cdot t}{t}\right)}, \quad (1)$$

де  $I$  – інтенсивність світла на виході інтерферометра;  $I_{\max}$  – максимальна інтенсивність світла на виході інтерферометра;  $r$  – коефіцієнт відбивання дзеркал інтерферометра, а різницю фаз сусідніх інтерферуючих променів  $d$  можна подати в скануючому інтерферометрі шляхом відповідного вибору початку відліку часу в такий спосіб:

$$d = 2p\Delta/l = (4p \cdot n \cdot h)/l + d' + d'' = \frac{\left(4p \cdot n \cdot \left(h_0 + \frac{dh}{dt} \cdot (t + t_0)\right)\right)}{l} + d' + d'' = \frac{4 \cdot p \cdot n \cdot t}{t},$$

де  $\Delta$  – оптична різниця ходу сусідніх порядків інтерферуючих променів;  $l$  – довжина хвилі;  $n$  – показник заломлення середовища всередині інтерферометра;  $h$  – товщина інтерферометра;  $d'$  і  $d''$  –

зсуви фаз під час відбивання інтерферуючих променів від дзеркал інтерферометра;  $h_0$  – середня товщина інтерферометра;  $\tau$  – тривалість лінійної ділянки сканування, а  $t_0$  – початок відліку часу визначається з умови

$$\left( \frac{4p \cdot n \cdot \left( h_0 + \frac{dh}{dt} \cdot (t + t_0) \right)}{l} \right) + d' + d'' = \frac{4 \cdot p \cdot n \cdot t}{t},$$

тобто

$$\left( \frac{4p \cdot n \cdot \left( h_0 + \frac{dh}{dt} \cdot t_0 \right)}{l} \right) + d' + d'' = 0,$$

де  $\frac{dh}{dt}$  – швидкість переміщення дзеркала скануючого інтерферометра. Ця швидкість, як показано в [4], має оптимальне значення, яке забезпечує переміщення дзеркала інтерферометра на  $l/2$  протягом сканування. Отже, оптимальне значення швидкості переміщення дзеркала є

$$\frac{dh}{dt} = \frac{l}{2 \cdot \tau}.$$

Саме це значення і використане у виразі (1). На рис. 2 показані графіки залежності відносного пропускання інтерферометра від часу і коефіцієнта відбивання дзеркал. З рисунка зрозуміло, що спектр сигналу за малих коефіцієнтів відбивання дзеркал є значно вужчим за цей спектр за великих коефіцієнтів відбивання дзеркал. Сам спектр цього сигналу нам відомий, оскільки вираз (1) отриманий внаслідок складання амплітуд хвиль, що пройшли інтерферометр Фабрі-Перо.

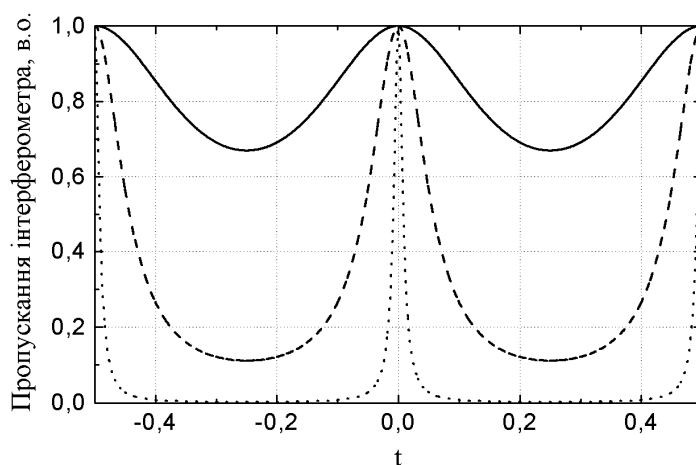


Рис. 2. Часові залежності відносного пропускання інтерферометра за різних коефіцієнтів відбивання дзеркал: верхня крива відповідає коефіцієнту відбивання 0,1; середня – 0,5; нижня – 0,9

Отже, апаратну функцію можна виразити через її спектральні складові в такий спосіб:

$$I = I_{\max} \cdot \left( (1-r)^2 \cdot \left( \sum_{j=0}^{\infty} r^j \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot p \cdot n \cdot t}{t} \cdot j\right) \right)^2 \right) =$$

$$I_{\max} \cdot \frac{(1-r)^2}{2} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \left( \sum_{q=0}^{\infty} r^{j+q} \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot p \cdot n \cdot t}{t} \cdot (j+q)\right) + \sum_{q=0}^{\infty} r^{j+q} \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot p \cdot n \cdot t}{t} \cdot (j-q)\right) \right).$$

З останнього виразу зрозуміло, що амплітуди вищих гармонік в спектрі апаратної функції інтерферометра пропорційні до показника відбивання дзеркала в ступені порядку гармоніки  $j + q$ . Причому кількість гармонік з порядковим номером  $j + q = c$  дорівнює  $c$ . Гармонік з порядковими номерами  $j - q = c \in$  безмежно багато. Але їхні амплітуди становлять спадну геометричну прогресію. Отже, спектр апаратної функції скануючого інтерферометра виражається через порядкові номери гармонік так:

$$\Psi(c, r) = \frac{|c| \cdot r^{|c|} + \frac{2 \cdot r^{|c|}}{1 - r^2}}{2 \cdot p} \cdot (1 - r)^2.$$

У такому разі можна знайти оптимальне значення коефіцієнта відбивання дзеркал інтерферометра, що забезпечить відсутність у спектрі апаратної функції високочастотних (а саме з частотами, більшими від половини частоти дискретизації АЦП) гармонік з амплітудами, що перевищують половину кроку квантування АЦП, який використовується для обробки вихідного сигналу фотоприймача з двох наступних умов. По-перше, частота вищої гармоніки має бути меншою за половину частоти дискретизації АЦП, тобто

$$\frac{4 \cdot p \cdot n}{t} \cdot c < \frac{2 \cdot p}{2 \cdot dt}, \text{ звідки } c_{\max} < \frac{t}{4 \cdot n \cdot dt},$$

де  $c_{\max}$  – максимальний порядок гармоніки спектра апаратної функції інтерферометра, що задовольняє умовам теореми Котельникова.

По-друге, значення спектральної складової апаратної функції на цій частоті, а значить і на вищих частотах, має бути меншою за половину кроку квантування АЦП, що використовується, тобто

$$\frac{|c_{\max}| \cdot r^{|c_{\max}|} + \frac{2 \cdot r^{|c_{\max}|}}{1 - r^2}}{2 \cdot p} \cdot (1 - r)^2 < \frac{1}{2^{N+1}}. \quad (2)$$

Розв'язавши це трансцендентне рівняння, знайдемо коефіцієнт відбивання дзеркал інтерферометра, що забезпечує його максимальну чутливість за заданих характеристик АЦП, тобто кроку дискретизації  $dt$  і розрядності квантування  $N$ .

### Оптимізація параметрів сканувального інтерферометра Фабрі-Перо з цифровою обробкою вихідного сигналу

На рис. 3 показано результати розв'язку рівняння (2) для випадку 16 розрядного АЦП ( $c_{16}$ ) і 8 розрядного АЦП ( $c_8$ ). На цьому ж рисунку показані результати розрахунку номера максимальної гармоніки спектра апаратної функції скануючого інтерферометра Фабрі-Перо, пронормовані в такий спосіб:

$$c_{\max} = \frac{r \cdot t_{\min}}{4 \cdot dt},$$

де  $t_{\min} = 0.01 \text{sec}$  – якийсь наперед заданий час розгортки інтерферометра. Саме вибраний час

взято з [4] як такий, що є реально досяжним. Значенню  $dt$  приписано значення  $\frac{1}{44 \text{kHz}}$ , що відповідає частоті дискретизації стандартної звукової карти персонального комп'ютера.

Використовуючи дані, наведені на рис. 3, задачу оптимізації параметрів скануючого інтерферометра Фабрі-Перо розв'язують так. Для будь-якого наперед заданого значення часу розгортки інтерферометра максимально можливі значення коефіцієнтів відбивання дзеркал знаходять проведенням горизонтальної лінії з точки, розміщеної на пунктирній лінії ( $c_{\max}$ ), до

перетину з суцільною лінією  $C_{16}$ . Крапками позначено лінію  $C_8$ . Тобто для часу сканування  $0.01 \cdot 0.45 \text{ sec} = 0.0045 \text{ sec}$  максимальне значення коефіцієнта відбивання дзеркал становитиме близько 0.8. А для часу сканування  $0.01 \cdot 0.9 \text{ sec} = 0.009 \text{ sec}$  максимальне значення коефіцієнта відбивання дзеркал становитиме 0.9 за розрядності АЦП 16. Вибір максимально можливого значення коефіцієнта відбивання дзеркал зумовлений тим, що він забезпечує і максимально досягну контрастність інтерференційної картини, як це бачимо з рис. 2. А максимально можлива контрастність забезпечує максимальне відношення сигнал-шум на вході АЦП.

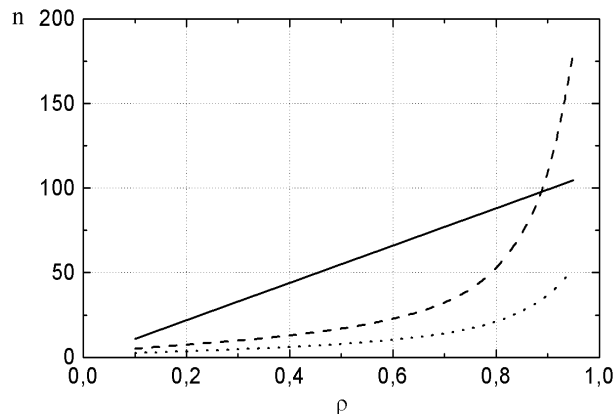


Рис. 3. Залежність номера максимальної гармоніки спектра апаратної функції сканувального інтерферометра Фабрі-Перо від коефіцієнта відбивання дзеркал

Тепер можемо визначити максимальну чутливість скануючого інтерферометра Фабрі-Перо з використанням обробки сигналу його фотоприймача за допомогою 16-розрядного АЦП. Для цього знайдемо інтервал появи сусідніх максимумів інтенсивності на виході інтерферометра  $t_0$  з такого співвідношення:

$$\frac{4 \cdot p \cdot n \cdot t_0}{t} = p .$$

Звідси знайдемо формулу для визначення показника заломлення середовища всередині скануючого інтерферометра Фабрі-Перо залежно від інтервалу появи максимумів інтенсивності на його виході:

$$n = \frac{t}{4 \cdot t_0} .$$

З цієї формули одразу знайдемо чутливість інтерферометра, тобто мінімально можливу зміну показника заломлення  $dn$ , яку цей інтерферометр може зареєструвати:

$$dn = \left| -\frac{t}{4 \cdot t_0^2} \cdot \Delta T \right| \approx \frac{\Delta T}{t} = \frac{dt}{t \cdot 2^N} .$$

При виводі останнього співвідношення було враховано, що за вибору оптимальних параметрів скануючого інтерферометра інтервал між сусідніми максимумами становить половину часу розгортки інтерферометра [4].

Якщо підставимо в останнє рівняння значення кроку дискретизації  $dt = \frac{1}{44 \cdot 10^3 \text{ kHz}}$ , досяжного часу розгортки  $t = 0.01 \text{ sec}$  [4] і розрядності  $N = 16$  стандартного АЦП звукової карти персонального комп'ютера, то отримаємо, що чутливість скануючого інтерферометра становитиме

$$dn < \frac{1}{2^{24}} \approx 6 \cdot 10^{-8} .$$

При цьому, зменшуючи частоту сканування, можна досягти підвищення цієї чутливості за рахунок швидкодії пристрою.

### Висновки

Використання багаторівневого АЦП для аналізу вихідного сигналу фотоприймача скануючого інтерферометра дає змогу значно підвищити точність визначення положень інтерференційних максимумів інтерферометра.

Аналіз спектра апаратної функції скануючого інтерферометра Фабрі-Перо дає змогу знайти максимально можливі значення коефіцієнтів відбивання його дзеркал, що забезпечує як адекватне аналогово-цифрове перетворення вихідного сигналу, так і максимальне співвідношення сигнал-шум.

Використання запропонованої оптимізації параметрів скануючого інтерферометра Фабрі-Перо уможливить забезпечити чутливість за зміною показника заломлення порядку  $10^{-8}$ , використовуючи АЦП з доволі посередніми характеристиками.

*1. Васильев В.Н., Гуров И.П. Компьютерная обработка сигналов в приложении к интерферометрическим системам. – СПб.: БХВ-СПб., 1998. – 240 с. 2. Котельников В.А., Николаев А.М. Основы радиотехники. Ч. 1. – М.: Связьиздат., 2006. – 237 с. 3. Скоков И.В. Многолучевые интерферометры в измерительной технике. – М.: Машиностроение, 1989. 4. Татарин В.Я., Петровська Г.А. Оптимізація функції розгортки п'єзокерамічного перетворювача сканувального інтерферометра // Вісн. Нац. ун-ту "Львівська політехніка". – 2008. – № 619: Електроніка. – С. 181–185.*