УДК 539.3

# ДЕЯКІ СПОСОБИ ОБЧИСЛЕННЯ СИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛІВ ТИПУ КОШІ, НЕОБХІДНИХ ДЛЯ ДІАГНОСТИКИ СТРУМОПРОВІДНИХ МАТЕРІАЛІВ

© *Кутень Андрій[1], Обшта Анатолій[1], Стащук Микола[2], 2008*

[1]Національний університет “Львівська політехніка”, вул. С. Бандери, 12, Львів, Україна
[2]Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, вул. Наукова, 5, Львів, Україна

***Запропоновано ефективні способи обчислення сингулярних інтегралів типу Коші. Перший спосіб полягає у використанні стандартних числових методів для обчислення цих інтегралів з обходом особливості у них. Другий спосіб полягає у заміні функції $j(z)$ відрізком ряду Тейлора. Наведено методику обчислення відповідних сингулярних інтегралів. Для натуральних степенів $x$ отримано точні формули.***

***Предложены эффективные способы вычисления сингулярных интегралов типа Коши. Первый способ заключается в использовании стандартных численных методов для вычисления этих интегралов с обходом особенности в них. Второй способ заключается в замене функции $j(z)$ отрезком ряда Тейлора. Приведена методика вычисления соответствующих сингулярных интегралов. Для натуральных степеней $x$ получены точные формулы.***

***The paper deals with a effective methods of calculation of singular Cauchy type integrals. The first method consists in the use of standard numeral methods for the calculation of these integrals with the round of feature at them. The second method consists in replacement of function $j(z)$ by the segment of Tailor row. The method of calculation of the proper singular integrals is resulted. For natural degrees of $x$ exact formulas are got.***

Для діагностики працездатності деталей машин та конструкцій першочерговою задачею є встановлення їхньої дефектності типу тріщин, порожнин, раковин, заглиблень тощо [3, 7]. Дефекти такого типу, як правило, створюють концентрацію напружень, яка розраховується засобами теорії функцій та сингулярних інтегральних рівнянь. Вивчення сингулярного інтеграла в математиці стосується значна частина окремих публікацій та монографій [1, 2, 4-6, 8-10], в яких розглядаються та обчислюються такі інтеграли, а також демонструється ефективність їхнього практичного застосування. Однак розрахунок вказаних інтегралів завжди є трудомістким, а тому потребує подальшого вдосконалення й розроблення нових, ефективніших, методів їхнього обчислення. У зв’язку із цим у цій статті саме й зроблена спроба обчислення згаданих інтегралів за допомогою нового та ефективного підходу, який грунтується на використанні узагальненої функції типу Гріна [13].

Найпоширенішим прикладом сингулярного інтеграла є інтеграл вигляду

$$I(x)=\int_{-l}^{l}\frac{j(x)\sqrt{l^2-x^2}}{x-x}dx\ . \tag{1}$$

Такий інтеграл має важливе значення в описі руйнування матеріалів внаслідок поширення тріщиноподібних порожнин [1, 5, 8, 9, 11]. Але, як правило, його обчислюють спеціальними методами.

Розглянемо спочатку сингулярний інтеграл (1) при $j(x)=1$, тобто інтеграл

$$I_0(x)=\int_{-l}^{l}\frac{\sqrt{l^2-x^2}}{x-x}dx\ . \tag{2}$$

Спосіб обчислення цього інтеграла відомий [1, 2, 12]. Вигляд його функціональної залежності від $x$ є таким:

$$I_0(x)=\begin{cases}-px, & |x|<l\\ p\left(\sqrt{x^2-l^2}-x\right), & |x|>l\end{cases}, \tag{3}$$

Обчислимо тепер сингулярні інтеграли вигляду

$$I_n(x)=\int_{-l}^{l}\frac{x^n\sqrt{l^2-x^2}}{x-x}dx\ ,\ (n\in N), \tag{4}$$

виразивши їхнє значення через відоме значення (3) та комбінацію степеневих функцій. Для цього подамо $I_n(x)$ так:

$$I_n(x)=\int_{-l}^{l}\frac{x^n\sqrt{l^2-x^2}}{x-x}dx=\int_{-l}^{l}\frac{\left(x^n-x^n\right)\sqrt{l^2-x^2}}{x-x}dx+$$
$$+x^n\int_{-l}^{l}\frac{\sqrt{l^2-x^2}}{x-x}dx=\int_{-l}^{l}\left(x^{n-1}+xx^{n-2}+...+x^{n-1}\right)\sqrt{l^2-x^2}dx+$$
$$+x^nI_0(x)=\sum_{k=0}^{n-1}x^k\int_{-l}^{l}x^{n-k-1}\sqrt{l^2-x^2}dx+x^nI_0(x)=$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}x^{n-k-1}G_k+x^nI_0(x). \tag{5}$$

Тут

$$G_n=\int_{-l}^{l}x^n\sqrt{l^2-x^2}dx\ . \tag{6}$$

Опишемо обчислення інтегралів (6). Очевидно, що $G_1=G_3=...=G_{2k-1}=0$ при $k\in N$. Це випливає з того, що при непарних $n$ підінтегральна функція непарна, а інтеграл від непарної функції у симетричних межах інтегрування дорівнює нулю.

Обчислимо тепер $G_{2n}$, де $n=0,1,2,...$. Очевидно, що

$$G_0=\int_{-l}^{l}\sqrt{l^2-x^2}dx=\frac{1}{2}pl^2, \tag{7}$$

як площа півкруга радіуса $l$. Наступні інтеграли обчислимо за допомогою інтегрування частинами.

$$G_{2n}=\int_{-l}^{l}x^{2n}\sqrt{l^2-x^2}dx=\int_{-l}^{l}x^{2n-1}x\sqrt{l^2-x^2}dx=$$
$$-\frac{1}{3}x^{2n-1}\left(l^2-x^2\right)^{3/2}\Bigg|_{x=-l}^{x=l}+\frac{2n-1}{3}\int_{-l}^{l}x^{2n-2}\left(l^2-x^2\right)^{3/2}dx=$$
$$=\frac{2n-1}{3}l^2\int_{-l}^{l}x^{2n-2}\sqrt{l^2-x^2}dx-$$
$$-\frac{2n-1}{3}\int_{-l}^{l}x^{2n}\sqrt{l^2-x^2}dx=\frac{2n-1}{3}l^2G_{2n-2}-\frac{2n-1}{3}G_{2n}.$$

Звідси

$$G_{2n}=\frac{2n-1}{2n+2}l^2G_{2n-2}\,. \tag{8}$$

Формула (8) дає зручні рекурентні співвідношення для обчислення $G_{2n}$, що дуже зручно для обчислення на комп'ютері. Наприклад,

$$G_2=\frac{2-1}{2+2}l^2G_0=\frac{1}{4}l^2G_0=\frac{1}{4}l^2\frac{1}{2}pl^2=\frac{1}{8}pl^4\,. \tag{9}$$

$$G_4=\frac{4-1}{4+2}l^2G_2=\frac{4-1}{4+2}\frac{2-1}{2+2}l^4G_0=$$
$$=\frac{3\cdot 1}{6\cdot 4}\cdot\frac{1}{2}pl^6=\frac{1}{16}pl^6\ . \tag{10}$$

Взагалі

$$G_{2n}=\frac{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdot...\cdot 1}{(2n+2)\cdot 2n\cdot...\cdot 4}\cdot\frac{1}{2}pl^{2n+2},\ n\in N, \tag{11}$$

Підставляючи у (5) вирази (8) і враховуючи, що для непарних $n$ $G_n=0$, отримуємо вирази для $I_n(x)$. Ось деякі приклади:

$$I_1(x)=\int_{-l}^{l}\frac{x\sqrt{l^2-x^2}}{x-x}dx=G_0+xI_0(x)=0{,}5pl^2+xI_0(x)=$$
$$=\begin{cases}0{,}5p\left(l^2-2x^2\right), & |x|<l\\ 0{,}5p\left(2x\sqrt{x^2-l^2}+l^2-2x^2\right), & |x|>l\end{cases}, \tag{12}$$

$$I_2(x)=\int_{-l}^{l}\frac{x^2\sqrt{l^2-x^2}}{x-x}dx=G_1+G_0x+x^2I_0(x)=$$
$$=0{,}5pl^2x+x^2I_0(x)=\begin{cases}0{,}5px\left(l^2-2x^2\right), & |x|<l\\ 0{,}5px\left(2x\sqrt{x^2-l^2}+l^2-2x^2\right), & |x|>l\end{cases} \tag{13}$$

$$I_3(x)=\int_{-l}^{l}\frac{x^3\sqrt{l^2-x^2}}{x-x}dx=G_2+G_1x+G_0x^2+x^3I_0(x)=$$
$$=0{,}125pl^4+0{,}5pl^2x^2+x^3I_0(x)=$$
$$=\begin{cases}0{,}125pl^4+0{,}5px^2\left(l^2-2x^2\right), & |x|<l\\ 0{,}125pl^4+0{,}5px^2\left(2x\sqrt{x^2-l^2}+l^2-2x^2\right), & |x|>l.\end{cases} \tag{14}$$

Аналізуючи (12)–(14), можна зауважити, що для $I_n(x)$ виконуються такі рекурентні співвідношення:

$$\begin{gathered}I_1(x)=G_0+xI_0(x),\\ I_2(x)=G_1+G_0x+x^2I_0(x)=G_1+xI_1(x),\\ \text{.......................................................}\\ I_n(x)=G_{n-1}+G_{n-2}x+...+G_0x^{n-1}+x^nI_0(x)=G_{n-1}+xI_{n-1}(x).\end{gathered} \tag{15}$$

Ми показали, що аналогічно можна обчислити також інтеграли, у яких як функцію $j(x)$ взяти й інші степені змінної $x$. Для цього дуже зручні співвідношення (8) та (15). Оскільки формули (15) мають рекурентний вигляд, то обчислення інтеграла виду (5) є дуже швидким. Це дає можливість швидко і точно обчислювати такі інтеграли за допомогою комп'ютера. До того ж не виникає проблеми із сингулярністю, бо значення $I_0(x)$ для скінченних значень $x$ відоме і теж скінченне, а більше особливостей ніяких немає. Зауважимо також, що на похибку обчислення інтеграла (5) буде мати вплив тільки похибка, з якою подається значення $x$, та проміжні результати при записі у розрядну сітку комп'ютера (похибка квантування). Такі самі значення цих інтегралів одержуються й на основі методів, запропонованих в роботах [2, 6, 10].

У разі інших функцій, наприклад, тригонометричних, гіперболічних тощо, можна піти двома шляхами: або обчислювати інтеграл (1) наближеними методами (методом лівих або правих прямокутників, трапецій, Сімпсона тощо), або подавши підінтегральну функцію як відрізок ряду Тейлора (фактично як суму степенів змінної $x$, інтеграл від яких можна обчислити точно, використовуючи співвідношення (15)). Ці два способи мають певні недоліки. Перший метод потребує при $|x| \le l$ обходу і спеціального наближення у випадку, коли $x = x$, але його добре застосовувати й у разі $|x| > l$. Другий метод не має цього недоліку, але вимагає знання коефіцієнтів ряду Тейлора для функції $j(x)$, тобто фактично знаходження першої похідної та похідних вищих порядків у нулі цієї функції. Відомо, що чим вищий порядок похідної, тим більше впливають похибки заокруглення на точність її визначення, тобто метод отримання похідних високих порядків у певній точці нестійкий. На практиці це означає, що із задовільною точністю можна знайти лише похідні низьких порядків, наприклад, до четвертого. Крім того, розклад функції у ряд Тейлора дає добре наближення лише для малих значень довжини проміжку інтегрування $l$. При великих $l$ треба брати більше членів ряду Тейлора, що за низької точності знаходження похідних високих порядків може дати високу похибку обчислення інтеграла (1). Але для не дуже великих $l$ цей метод дає добрий результат за незначних обчислювальних затрат. А знання коефіцієнтів ряду Тейлора для деяких функцій (синус, косинус, експонента тощо) дає можливість із задовільною точністю використовувати цей спосіб і при великих $l$, бо не потрібно обчислювати похідних високих порядків.

Розглянемо перший спосіб обчислення інтеграла (1). Для $|x| \le l$ подамо його так:

$$I(x) = \int_{-l}^{l} \frac{j(x)\sqrt{l^2 - x^2}}{x - x}dx = \int_{-l}^{l} \frac{\left(j(x) - j(x)\right)\sqrt{l^2 - x^2}}{x - x}dx +$$

$$+ j(x)\int_{-l}^{l} \frac{\sqrt{l^2 - x^2}}{x - x}dx \approx \int_{-l}^{x-d} \frac{\left(j(x) - j(x)\right)\sqrt{l^2 - x^2}}{x - x}dx + \quad .$$

$$+ \int_{x-d}^{x+d} \frac{\left(j(x) - j(x)\right)\sqrt{l^2 - x^2}}{x - x}dx + \int_{x+d}^{l} \frac{\left(j(x) - j(x)\right)\sqrt{l^2 - x^2}}{x - x}dx +$$

$$+ j(x) I_0(x) \approx \int_{-l}^{x-d} \frac{\left(j(x) - j(x)\right)\sqrt{l^2 - x^2}}{x - x}dx +$$

$$2dj'(x)\sqrt{l^2 - x^2} + \int_{x+d}^{l} \frac{\left(j(x) - j(x)\right)\sqrt{l^2 - x^2}}{x - x}dx + j(x) I_0(x).$$

Якщо $-l \le x \le x - d$ і $x - d \le x \le l$, інтеграл (1) можна обчислити стандартними наближеними методами із довільною точністю, а якщо $|x - x| < d$, його можна наблизити виразом $2dj'(x)\sqrt{l^2 - x^2}$. Таке наближення тим точніше, чим менше $d$. Воно позбавляє необхідності обчислення величини $|x - x|^{-1}$ при $x \approx x$.

Якщо $|x| > l$, інтеграл (1) можна обчислити наближено стандартними методами, оскільки ситуації $x \approx x$ там уже немає і, отже, особливості в такому інтегралі немає.

У другому методі можна оцінити похибку обчислень, що можна продемонструвати на такому прикладі.

Нехай $I(x) = \int_{-l}^{l} \frac{\sin x \sqrt{l^2 - x^2}}{x - x}dx$. Відомо, що $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots$. Тоді

$$I_9(x) = \int_{-l}^{l} \frac{\sin x \sqrt{l^2 - x^2}}{x - x}dx = \int_{-l}^{l} \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots\right)\sqrt{l^2 - x^2}}{x - x}dx =$$

$$= I_1(x) - \frac{I_3(x)}{6} + \frac{I_5(x)}{120} - \frac{I_7(x)}{5040} + \frac{\sin^{(9)}(qx)}{(2n+1)!} I_{2n+1}(x), \; 0 < q < 1.$$

$$\left|I(x) - I_9(x)\right| \le \frac{M_9}{9!}\left|\int_{-l}^{l} \frac{x^9 \sqrt{l^2 - x^2}}{x - x}dx\right| \le \frac{M_9 l^{10}}{9!}\left|I_0(x)\right| \le ,$$

$$\le 0{,}00002\left(\max(|x|,\; l)\right)^{11}$$

Тут позначено $M_9 = \max\left|\sin^{(9)}(x)\right| = 1, \; 0 < x < |x|$. Наприклад, при $l = 1, -2 \le x \le 2$ маємо $\left|I(x) - I_9(x)\right| < 0{,}05$.

Наведемо приклади, які демонструють програмну реалізацію першого та другого підходів до наближеного обчислення сингулярного інтеграла (1) у разі функції $j(x) = \sin x$. У ряді Тейлора для цієї функції взято 7 членів. Результати виконання програм для різних значень $l$ та $x$ наведено на рис. 1, 2.

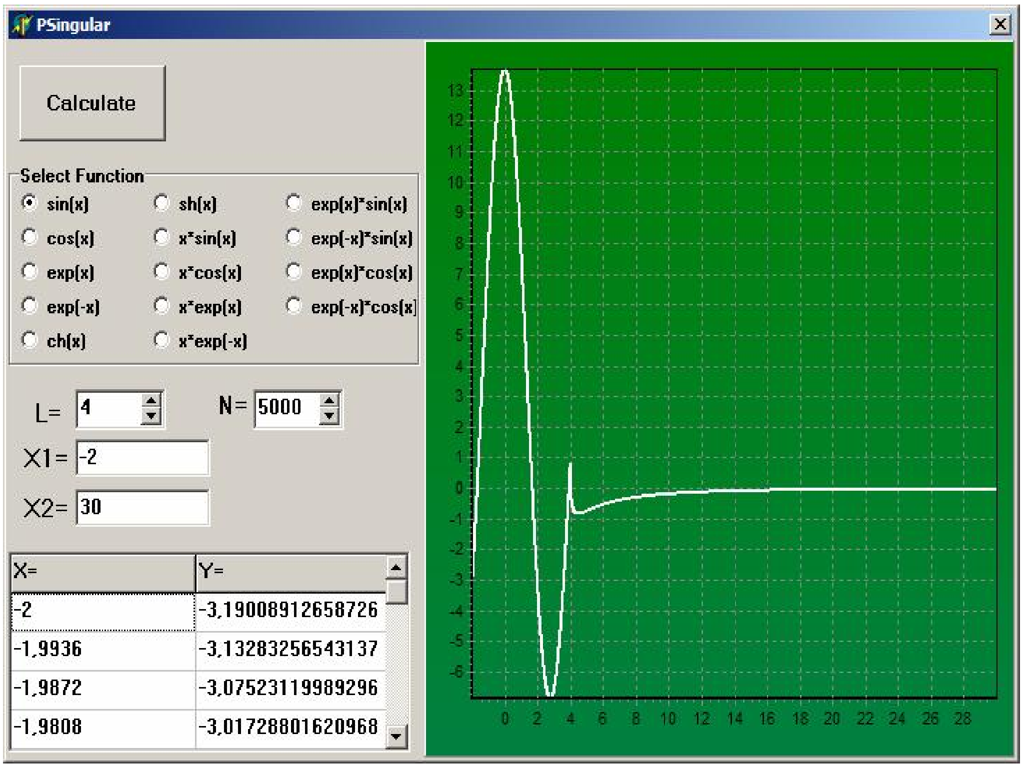


*Рис. 1. Графік залежності сингулярного інтеграла, обчисленого методом лівих прямокутників, для x1=–2, x2=30, l=4*

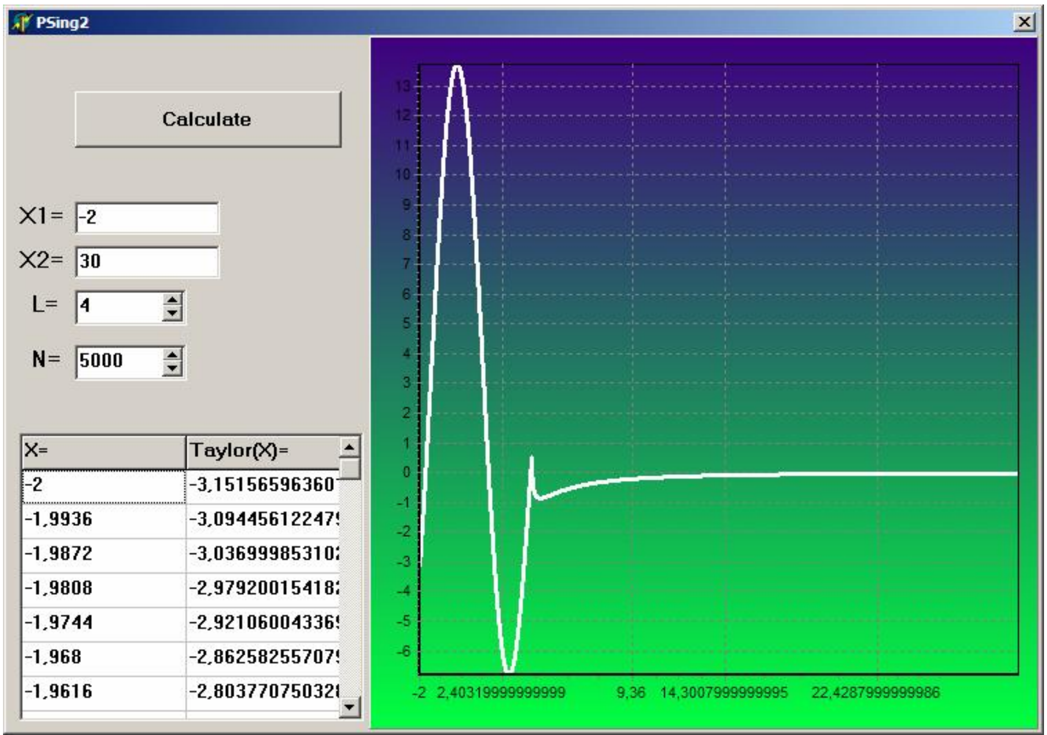


*Рис. 2. Графік залежності сингулярного інтеграла, обчисленого методом розкладу в ряд Тейлора, для x1=–2, x2=30, l=4*

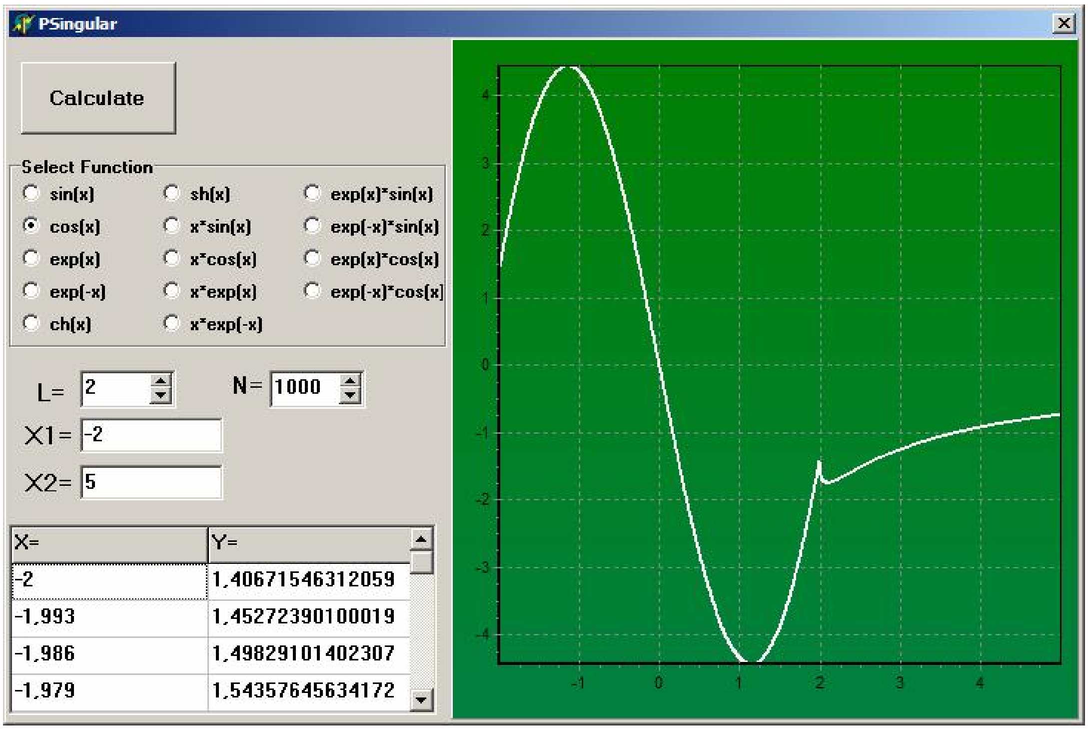


*Рис. 3. Графік залежності сингулярного інтеграла, обчисленого методом лівих прямокутників, для x1=–2, x2=5, l=2*

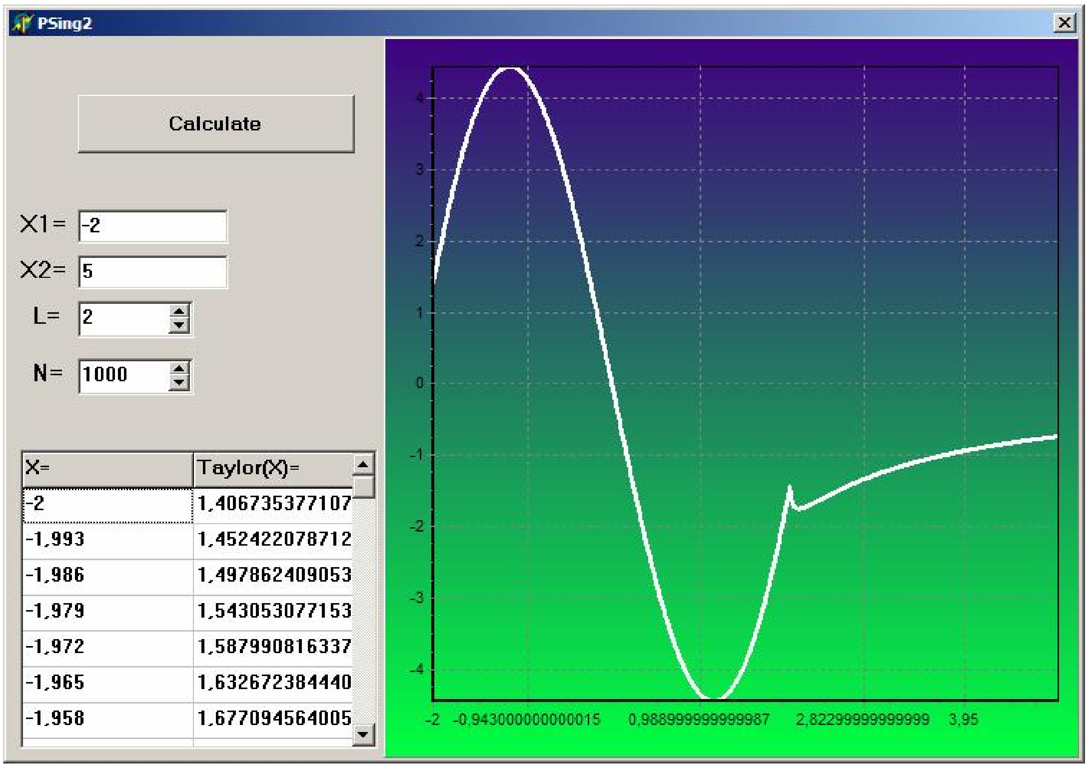


*Рис. 4. Графік залежності сингулярного інтеграла, обчисленого методом розкладу у ряд Тейлора, для x1=–2, x2=5, l=2*

Як бачимо, значення інтеграла (1) для функції $j(x) = \sin x$, обчислені методом лівих прямокутників та методом розкладу цієї функції, доволі близькі, що демонструється відповідними графіками на рис. 1 та 2. Якщо у розкладі функції $j(x)$ у ряд Тейлора взяти більшу кількість членів, то точність обчислень буде ще вищою при незначному збільшенні часу виконання програми. Виконувались також дослідження для функції $j(x) = \cos x$, і вони дали такі самі результати щодо близькості значень сингулярних інтегралів, взятих методом лівих прямокутників та методом розкладу в ряд Тейлора. Це демонструють графіки і числові дані, наведені на рис. 3, 4. Але перевага такого порівняння в тому, що при $|x| \le l$, тобто коли у інтегралі (1) виникає особливість, обидва методи дали дуже близькі результати. У такому разі при $|x| \le l$ краще застосовувати метод розкладу у ряд Тейлора, бо, як було видно з порівняння часу роботи програм, цей метод набагато швидший. Проте метод лівих прямокутників, хоча й менш швидкодіючий при обчисленні інтегралів виду (1), є універсальнішим, бо не завжди можна з задовільною точністю визначити коефіцієнти ряду Тейлора функції $j(x)$.

Такі прості підходи, особливо перший, дуже зручні для обчислення інтегралів типу Коші в інженерних розрахунках міцності матеріалів з позиції механіки руйнування та інших технічних задачах, де такі інтеграли можуть застосовуватися. Зокрема, до таких задач належать задачі контролю якості струмопровідних матеріалів та діагностики пошкоджень в них.

*1. Бережницкий Л.Т., Панасюк В.В., Стащук Н.Г. Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле. – К.: Наук. думка, 1983. – 288 с. 2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Физматгиз, 1963. – 639 с. 3. Горопацький В.Г., Обшта А.Ф., Стащук М.Г. Математична модель оцінки взаємовпливу робочих середовищ, конструкцій та елементів давачів при фізико-хімічних вимірюваннях // Вісник Національного університету “Львівська політехніка”, – Львів, 2005. – № 512. С. 192 – 196. 4. Интегральные уравнения / Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А. и др. – М.: Наука, 1968. – 448 с. 5. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с. 6. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Физматгиз, 1962. – 511 с. 7. Обшта А.Ф., Стащук М.Г., Горопацький В.Г. Моделювання впливу агресивних середовищ на електричне поле електропровідних тіл // Прикл. пробл. мех. і мат., 2004, 47, Вип. 2. С.161 – 165. 8. Панасюк В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – К.: Нак.думка, 1968. – 246 с. 9. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с. 10. Пыхтеев Г.Н. Точные методы вычисления интегралов типа Коши. – Новосибирск: Наука, 1980. – 118 с. 11. Пыхтеев Г.Н. Приближенные методы вычисления интегралов типа Коши специального вида. – Новосибирск: Наука, 1982. – 128 с. 12. Стащук Н.Г. Задачи механики упругих тел с трещиноподобными дефектами. – К.: Наук. думка, 1993. – 358 с. 13. Стащук М.Г. Коваленко Р.В. Стащук А.М. До обчислення деяких інтегралів з особливістю типу Коші, необхідних в механіці руйнування матеріалів // Праці наукового Товариства ім. Шевченка. Т.YII. Матеріалознавство і механіка матеріалів. – Львів, 2001. С. 59 – 68.*