УДК 65.012

О.В. Несторенко
Азовський регіональний інститут управління
Запорізького національного технічного університету

УДОСКОНАЛЕННЯ МОДЕЛЕЙ УПРАВЛІННЯ ЗАПАСАМИ

Удосконалено модель Вільсона, яка є базовою моделлю під час прийняття управлінських рішень щодо управління запасами. Наведено механізм визначення оптимальних показників процесу управління запасами з використанням складного процента. Результатом є побудова відповідної моделі управління запасами.

Research is devoted the improvement of Wilson's model which is a base model at making administrative decisions in relation to control of inventories. In the article the mechanism of determination of optimum indexes of process of control of inventories is pointed by the s use of difficult to the percent. A result is a construction of the proper case supplies frame.

Постановка проблеми. Управління запасами у складській логістиці посідає важливе місце на будь-якому підприємстві.

Для різних ситуацій, що виникають на підприємствах, розроблено багато економіко-математичних моделей управління запасами. Усі вони мають в своїй основі EOQ (the basic economic order quantity model), розроблену Вільсоном. Функція витрат $C^W(q)$, пов'язаних з поставкою партії товару q і його збереженням за час T в моделі EOQ, має такий вигляд:

$$C^W(q) = \frac{c_S D}{q} + \frac{1}{2} c_1 T q\,, \tag{1}$$

де D – попит на продукцію за період часу T; c_S – вартість поставки партії розміром q; c_1 – вартість збереження одиниці продукції за період T.

Оптимальний обсяг поставки q_0^W розраховується за формулою Вільсона:

$$q_0^W = \sqrt{\frac{2c_S D}{c_1 T}}\,. \tag{2}$$

Під час виведення формули (1) в моделі EOQ витрати поставки за період T (перший доданок) розраховувались як добуток вартості поставки партії розміром q на кількість поставок n ($n = \frac{D}{q}$) за період T і не враховувалось, що суми c_S відносились до різних моментів часу, тобто не дисконтувались. Тому модель Вільсона потребує удосконалення.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У [3] було проаналізовано виведення формули (1) і, враховуючи необхідність дисконтування витрат поставки за різні моменти часу під час знаходження сумарних витрат поставки за період T, запропоновано формулу (1) записати у вигляді

$$C^1(q) = \frac{(2+R)c_S D}{2q} + \frac{1}{2} c_1 T q + \frac{1}{2} R c_S\,, \tag{3}$$

де R – норма процента за період T, мінімум якої знаходиться у точці:

$$q_0^1 = \sqrt{\frac{2c_S D}{c_1 T}}\sqrt{1+0,5R}\,. \tag{4}$$

Записавши в (4) $R = rT$, $D = \mu T$, де r – норма процента за один день; μ – щоденний попит, одержимо

$$q_0^1 = \sqrt{\frac{2c_S\mu}{c_1}}\sqrt{1+0,5rT} \,. \qquad (5)$$

Після проведення аналізу (5), виникає запитання: чому оптимальний розмір партії залежить від горизонту планування T ?

Подальший аналіз показав, що у формулах (1), (3) витрати збереження за період T (другий доданок) $\frac{1}{2}c_1Tq$ розраховувались як сума витрат збереження кожного циклу. Графічний зміст цього показано на рис. 1. Заштрихована область відповідає витратам збереження за період T, які дорівнюють витратам постійного зберігання обсягу $\frac{1}{2}q$ за період T.

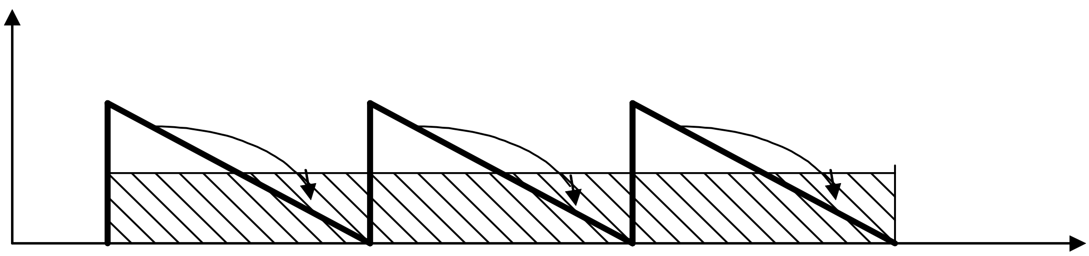

Рис. 1. Геометричний зміст витрат збереження за період T у моделі Вільсона та моделі (3)

При цьому не враховувалось, що вони відносились до різних моментів часу, тобто не дисконтувались.

У [4] було проаналізовано виведення формул (1), (3) і, враховуючи необхідність дисконтування витрат збереження в різні моменти часу під час знаходження сумарних витрат збереження за період T, запропоновано формулу (1) записати у вигляді

$$C^2(q) = (\frac{c_S D}{q} + \frac{1}{2}prTq)(1+0,5rT) + 0,5c_S rT \,, \qquad (6)$$

при цьому оптимальний обсяг поставки розраховується за формулою

$$q_0^2 = \sqrt{\frac{2c_S D}{c_1 T}} \,, \qquad (7)$$

що збігається з формулою Вільсона (2).

Графічний зміст цього показано на рис. 2. Заштрихована область відповідає витратам збереження за періоди t_S, які дорівнюють витратам постійного зберігання обсягу q за періоди $\frac{t_S}{2}$. Для знаходження сумарних витрат збереження за період T потрібно складати дисконтовані витрати збереження за періоди t_S (зображено $\longrightarrow$).

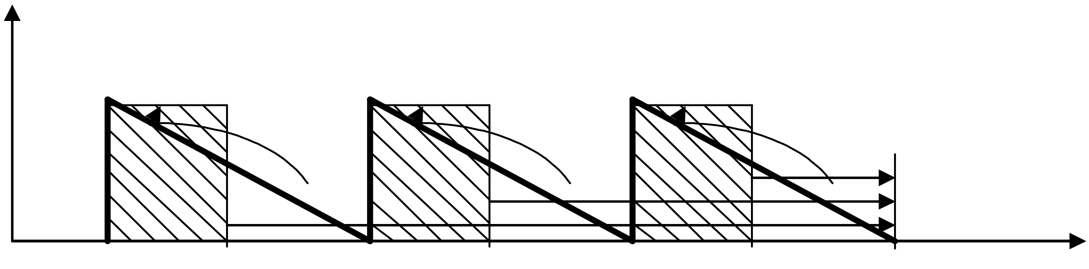

Рис. 2. Геометричний зміст витрат збереження за період T у моделі (6)

Розглядаючи процес руху фінансів і товару на складі покроково (з кроком один день), в [4] було запропоновано формулу (1) записати у вигляді

$$C^3(t_S) = 0,5c_S rT + (1+0,5rT)(\frac{c_S T}{t_S} + 0,5p\mu rT(t_S+1)) - \frac{1}{12}p\mu r^2 T(t_S+1)(t_S+2)\,. \tag{8}$$

Точкою мінімуму функції (8) є:

$$t_{S3} = (\frac{r}{6(1+0,5r(T-1))}\sqrt{\frac{2c_S}{p\mu r}\frac{(1+0,5rT)}{(1+0,5r(T-1))}} + 1)\sqrt{\frac{2c_S}{p\mu r}\frac{(1+0,5rT)}{(1+0,5r(T-1))}}\,. \tag{9}$$

За малих r вираз (9) приблизно дорівнює:

$$t_{S0}^3 = \sqrt{\frac{2c_S}{p\mu r}\frac{(1+0,5rT)}{(1+0,5r(T-1))}}$$

або

$$q_0^3 = \sqrt{\frac{2c_S}{p\mu r}\frac{(1+0,5rT)}{(1+0,5r(T-1))}}\,, \tag{10}$$

результат якої приблизно дорівнює результату, отриманому за формулою Вільсона (2).

Формулювання цілей статті. Метою дослідження є побудова моделі управління запасами з використанням складного процента.

Виклад основного матеріалу. У вищезгаданих моделях під час дисконтування використовувався простий процент. При цьому при «переходах» фінансів з товару у гроші простий процент нараховувався на дисконтовані простим процентом суми. Це наближало моделі до реалій, оскільки в економіці більше розповсюджене використання простого процента. Але у той самий час за цих «переходів» починає проявлятись ефект складного процента.

Розглянемо побудову моделі управління запасами з використанням складного процента (період нарахування – щоденно).

За кожної поставки партії товару $q = \mu t_S$ за ціною p витрачається сума $c_S + p\mu t_S$. Понесені витрати на початок періоду T дорівнюють:

$$c_S + p\mu t_S + \frac{c_S + p\mu t_S}{(1+r)^{t_S}} + \frac{c_S + p\mu t_S}{(1+r)^{2t_S}} + \ldots + \frac{c_S + p\mu t_S}{(1+r)^{(n-1)t_S}}$$

або

$$(c_S + p\mu t_S)\frac{(1+r)^{t_S}((1+r)^T - 1)}{((1+r)^{t_S} - 1)(1+r)^T}\,.$$

На кінець періоду T вони дорівнюватимуть

$$(c_S + p\mu t_S)\frac{(1+r)^{t_S}((1+r)^T - 1)}{((1+r)^{t_S} - 1)}\,.$$

Щодня відбувається повернення грошей у сумі $p\mu$. До кінця періоду T вона становитиме:

$$p\mu(1+r)^T + p\mu(1+r)^{T-1} + \ldots + p\mu(1+r)^{T-k} + \ldots + p\mu(1+r)$$

або

$$p\mu\frac{(1+r)((1+r)^T - 1)}{r}\,.$$

Функція загальних витрат матиме такий вигляд:

$$C^4(t_S) = (c_S + p\mu t_S)\frac{(1+r)^{t_S}((1+r)^T - 1)}{((1+r)^{t_S} - 1)} - p\mu\frac{(1+r)((1+r)^T - 1)}{r}\,. \tag{11}$$

Мінімум функції (11) збігатиметься з розв’язком рівняння

$$p\mu-(c_S+p\mu t_S)\frac{\ln(1+r)}{((1+r)^{t_S}-1)}=0\,. \tag{12}$$

Використавши два перших члени ряду Тейлора:

$$\ln(1+r)\approx r-\frac{1}{2}r^2\,;$$

$$(1+r)^{t_S}-1\approx rt_S+\frac{1}{2}r^2t_S(t_S-1)\,,$$

отримаємо

$$t_{S0}=\sqrt{\frac{c_S(2-r)}{rp\mu}}\,.$$

За малих r

$$t_{S0}=\sqrt{\frac{2c_S}{rp\mu}} \tag{13}$$

або

$$q_0^4=\sqrt{\frac{2c_S}{p\mu r}}\,. \tag{14}$$

Результат (14) збігається з результатом, отриманим Вільсоном (2). Оптимальні витрати за період T становитимуть

$$C_0^4(t_S)=(1+\frac{1}{2}rT)(rTc_S+T\sqrt{2c_Srp\mu})\,. \tag{15}$$

Використавши три перших члени ряду Тейлора

$$(1+r)^{t_S}-1\approx t_S+\frac{1}{2}rt_S(t_S-1)+\frac{1}{6}r^2t_S(t_S-1)(t_S-2)\,,$$

отримаємо, що точкою мінімуму функції (11) буде:

$$t_{S3}=(\frac{r}{6}\sqrt{\frac{2c_S}{p\mu r}}+1)\sqrt{\frac{2c_S}{p\mu r}}\,, \tag{16}$$

що приблизно дорівнює (9). За малих r вираз (16) приблизно дорівнюватиме

$$t_{S0}=\sqrt{\frac{2c_S}{rp\mu}} \tag{17}$$

або

$$q_0^4=\sqrt{\frac{2c_S}{p\mu r}}\,. \tag{18}$$

Результат (18) збігається з результатом, отриманим Вільсоном (2). Оптимальні витрати за період T становитимуть

$$C_0^4(t_S)=(1+\frac{1}{2}rT+\frac{1}{6}r^2T^2)(rTc_S+T\sqrt{2c_Srp\mu})\,. \tag{19}$$

Висновки та перспективи подальших досліджень. Хоча під час виведення функції загальних витрат на поставку та збереження (11) і використовувалося дисконтування складним процентом для додавання грошей в різні періоди часу, оптимальний розмір заявки можна розрахувати за формулою Вільсона (2). Але при цьому необхідно враховувати, що загальні витрати (15), (19) будуть більшими за розраховані за формулою (1) і дорівнюватимуть $C_0^W(t_S) = T\sqrt{2c_S rp\mu}$. Розглянувши модельний приклад та застосувавши до нього моделі (1), (3), (6), (8), (11), можна зробити висновок, що вони можуть бути вищими, більш ніж на 20 % від розрахованих за моделлю Вільсона (рис. 3).

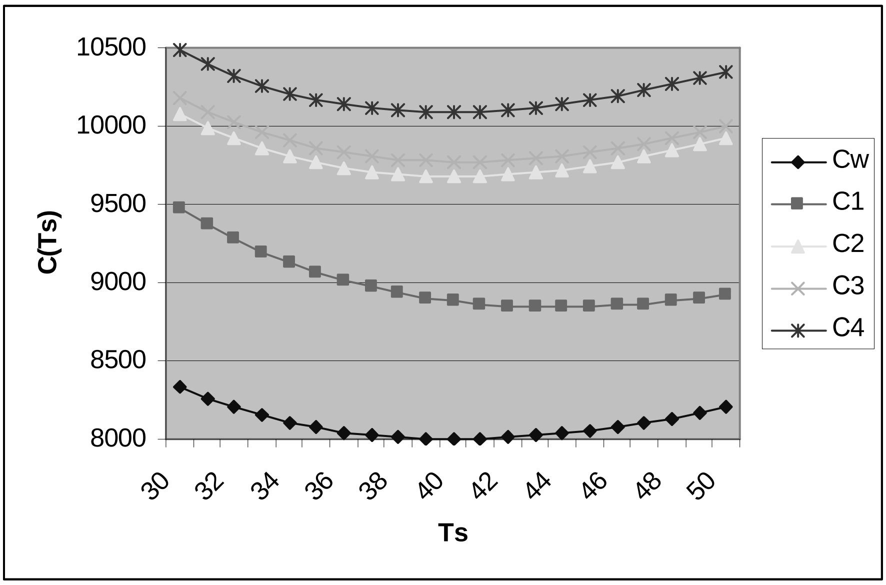

Рис. 3. Графіки функцій загальних витрат в районі точки мінімуму для різних моделей

У подальших дослідженнях, використовуючи побудовані моделі, можливе удосконалення інших моделей управління запасами, як ось моделі з дефіцитом, з виробництвом, з асортиментом, з різними рівнями цін тощо.

1. Тяпухин А., Коган А. Логистический менеджмент или управленческая логистика // РИСК. – 2004. – № 3. – С. 4–12. 2. Крикавський Є.В. Логістика: Підручник. – Львів: Вид-во НУ "Львівська політехніка", 2004. – 452 с. 3. Несторенко А.В. К вопросу о правильности модели EOQ в логистике запасов // Зб. тез доповідей VI Міжнародної наук.-практ. конф. "Маркетинг і логістика в системі менеджменту". – Львів: Вид-во НУ "Львівська політехніка", 2006. – С. 238–239. 4. Несторенко А.В. Альтернативный подход к построению EOQ модели управления запасами // Управління економікою рекреаційних територій, галузей і підприємств: Зб. наук. пр. /НАН України. Ін-т економіко-правових досліджень; Ред. кол.: В.К. Мамутов (відп. ред.) та ін. – Донецьк: ООО "Юго-Восток, ЛТД", 2007. – С. 270–276.