УДК 536.24

В. Гавриш, Д. Федасюк
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра програмного забезпечення

МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОВИХ РЕЖИМІВ У ТЕРМОЧУТЛИВОМУ ШАРІ З ТЕПЛОВИДІЛЯЮЧИМ ЧУЖОРІДНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Розглядається стаціонарна осесиметрична нелінійна задача теплопровідності для ізотропного шару з чужорідним циліндричним включенням, що нагрівається внутрішніми джерелами тепла з тепловіддачею. Припускається, що на поверхнях спряження відбувається ідеальний тепловий контакт. Запропонована методика розв’язування цієї задачі та її застосування для конкретної залежності коефіцієнтів теплопровідності матеріалів шару і включення від температури.

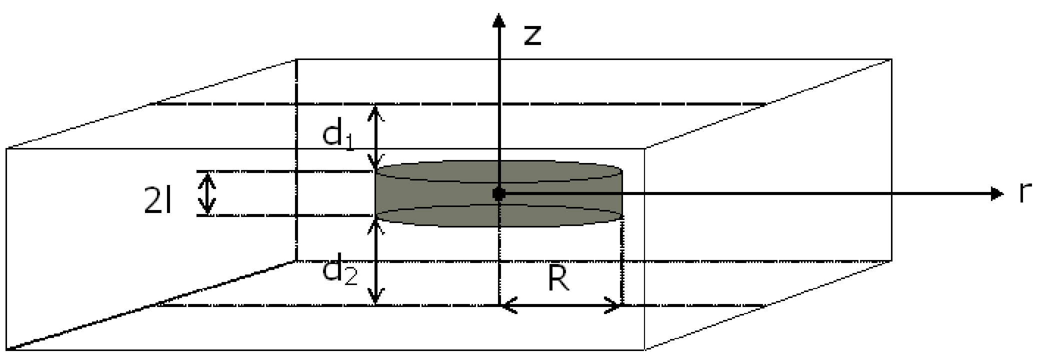
The fixed axially symmetric nonlinear problem of thermal conduction for isotropic layer with foreign cylindrical inclusion (particulate) which heats at internal thermal source with heat dissipation has been considered. It is supposed that on the contact surface the ideal thermal contact takes place. The methodology of this problem solution and its application for the specific dependence of the layer and inclusion substances thermal-conductivity coefficients on temperature has been offered.

Вступ

Істотне значення при визначенні температурних полів, а надалі і температурних напружень в елементах конструкцій радіоелектронної апаратури, що знаходяться в умовах низьких і високих температур, має врахування залежності термопружних характеристик від температури, що значно ускладнює побудову розв’язку задачі, проте дасть змогу точніше досліджувати їх термостійкість. Загальні рівняння теплопровідності для термочутливих кусково-однорідних тіл наведено в працях [1, 2]. У [3] досліджено температурне поле для термочутливого багатошарового півпростору, який нагрівається внутрішніми джерелами тепла.

Постановка задачі

Розглянемо ізотропний в сенсі теплофізичних властивостей термочутливий шар із чужорідним циліндричним включенням, радіус якого дорівнює R, а висота $2l$, в області $\Omega_0 = \{(r, j, z) : r \le R, |z| \le l, 0 \le j \le 2p\}$ якого діють рівномірно розподілені внутрішні джерела тепла з потужністю q_0, віднесений до циліндричної системи координат Orj z із початком в центрі включення (рисунок).



Термочутливий шар з включенням циліндричної форми

На поверхнях спряження

$$S_R = \{(R, j, z) : |z| \leq l, 0 \leq j \leq 2p\}, S_{\pm l} = \{(r, j, \pm l) : r \leq R, 0 \leq j \leq 2p\}$$

відбувається ідеальний тепловий контакт, а на краях шару

$$K_+ = \{(r, j, l + d_1) : 0 \leq r < \infty, 0 \leq j \leq 2p\}$$

$$K_- = \{(r, j, -l - d_2) : 0 \leq r < \infty, 0 \leq j \leq 2p\}$$

здійснюється конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем зі сталою температурою t_c.

Частково лінеаризована гранична задача

Для визначення стаціонарного температурного поля в системі, що розглядається, використаємо нелінійне рівняння теплопровідності [1]

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\, l(t,r,z)\frac{\partial t}{\partial r}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[l(t,r,z)\frac{\partial t}{\partial z}\right] = -q_0 S_-(R-r)N(z), \tag{1}$$

з такими граничними умовами :

$$l_1(t)\frac{\partial t}{\partial z}\Big|_{z=l+d_1} = -a_+\left(t\big|_{z=l+d_1} - t_c\right), \qquad t\big|_{r\to\infty} = 0, \frac{\partial t}{\partial r}\Big|_{r\to\infty} = 0,$$

$$l_1(t)\frac{\partial t}{\partial z}\Big|_{z=-l-d_2} = a_-\left(t\big|_{z=-l-d_2} - t_c\right), \tag{2}$$

де $l(t,r,z) = l_1(t) + [l_0(t) - l_1(t)]S_-(R-r)N(z)$; $l_0(t), l_1(t)$ – коефіцієнти теплопровідності матеріалів включення та шару; $a_\pm$ – коефіцієнти тепловіддачі з граничних поверхонь $K_\pm$ відповідно; $N(z) = S_-(z+l) - S_+(z-l)$;

$$S_\pm(z) = \begin{cases} 1, & z > 0, \\ 0{,}5\, m\, 0{,}5, & z = 0, \\ 0, & z < 0. \end{cases} \quad \text{– асиметричні одиничні функції}$$

Введемо функцію

$$J = \int_0^{t(r,z)} l_1(z)dz + \left\{\int_{t(R,z)}^{t(r,z)} [l_0(z) - l_1(z)]dz \cdot N(z) - \int_{t(R,-l)}^{t(r,-l)} [l_0(z) - l_1(z)]dz \cdot S_-(z+l) + \right.$$

$$\left. + \int_{t(R,l)}^{t(r,l)} [l_0(z) - l_1(z)]dz \cdot S_+(z-l)\right\} \cdot S_-(R-r), \tag{3}$$

продиференціювавши яку по r та z, отримаємо

$$\frac{\partial J}{\partial r} = l(t,r,z)\frac{\partial t}{\partial r} + \left\{\left[\left(l_0(t) - l_1(t)\right)\frac{\partial t}{\partial r}\right]\Big|_{z=l} \cdot S_+(z-l) - \right.$$

$$\left. - \left[\left(l_0(t) - l_1(t)\right)\frac{\partial t}{\partial r}\right]\Big|_{z=-l} \cdot S_-(z+l)\right\} \cdot S_-(R-r), \tag{4}$$

$$\frac{\partial J}{\partial z} = l(t,r,z)\frac{\partial t}{\partial z} - \left\{\left(l_0(t) - l_1(t)\right)\frac{\partial t}{\partial z}\right\}\Big|_{r=R} \cdot S_-(R-r) \cdot N(z).$$

Із врахуванням виразів (4), рівняння (1) перепишемо у вигляді

$$\Delta J = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left\{r \cdot \left[\left(\left(l_0(t) - l_1(t)\right) \cdot \frac{\partial t}{\partial r}\right)\Big|_{z=-l} \cdot S_-(z+l) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left(\left(l_0(t) - l_1(t)\right) \cdot \frac{\partial t}{\partial r}\right)\Big|_{z=l} \cdot S_+(z-l)\right] \cdot S_-(R-r)\right\} -$$

$$-q_0\cdot S\_(R-r)\cdot N(z)-\frac{\partial}{\partial z}\left\{\left[\left(l_0(t)-l_1(t)\right)\cdot\frac{\partial t}{\partial z}\right]_{r=R}\cdot S\_(R-r)\cdot N(z)\right\}. \tag{5}$$

Використавши співвідношення (3), граничні умови (2) запишемо так :

$$\left.\frac{\partial J}{\partial z}\right|_{z=l+d_1}=-a_+(t|_{z=l+d_1}-t_c),\quad \left.\frac{\partial J}{\partial z}\right|_{z=-l-d_2}=a_-(t|_{z=-l-d_2}-t_c),\quad J|_{r\to\infty}=0,\left.\frac{\partial J}{\partial r}\right|_{r\to\infty}=0. \tag{6}$$

Отже, за допомогою функції J , зображеної виразом (3), нелінійну граничну задачу (1), (2) зведено до частково лінеаризованої граничної задачі (5), (6).

Повністю лінеаризована гранична задача

Апроксимуємо функції $t(r,\pm l),t(R,z),t(r,l+d_1),t(r,-l-d_2)$ виразами

$$t(R,z)=t_1^{(R)}+\sum_{i=1}^{n-1}(t_{i+1}^{(R)}-t_i^{(R)})S_-(z-z_i),\quad t(r,l)=t_1^{(l)}+\sum_{i=1}^{n-1}(t_{i+1}^{(l)}-t_i^{(l)})S_-(r-r_i),$$

$$t(r,-l)=t_1^{(-l)}+\sum_{i=1}^{n-1}(t_{i+1}^{(-l)}-t_i^{(-l)})S_-(r-r_i), \tag{7}$$

$$t(r,l+d_1)=t_1^{(d)}+\sum_{k=1}^{m-1}(t_{k+1}^{(d)}-t_k^{(d)})S_-(r-r_k),$$

$$t(r,-l-d_2)=t_1^{(-d)}+\sum_{k=1}^{m-1}(t_{k+1}^{(-d)}-t_k^{(-d)})S_-(r-r_k),$$

де $z_i \in \left]-l;l\right[;z_1<z_2<\ldots<z_{n-1};r_j\in\left]0;R\right[;r_1<r_2<\ldots<r_{n-1};t_i^{(R)},t_i^{(l)}t_i^{(-l)},t_k^{(-d)},t_k^{(d)}$ – невідомі апроксимаційні значення температури; n – кількість розбиттів інтервалу $\left]-l;l\right[$ та $\left]0;R\right[$; $r_k\in\left]0;r_*\right[;r_1<r_2<\ldots<r_{m-1};r_*$ - значення радіальної координати, для якої температура практично дорівнює t_c; m – кількість розбиттів інтервалу $\left]0;r_*\right[$.

Підставивши вирази (7) у рівняння (5) та граничні умови (6) на поверхнях $K_\pm$ шару, одержимо лінійну граничну задачу для знаходження функції J

$$\Delta J=-\frac{1}{r}\cdot\left\{\sum_{i=1}^{n-1} r_i\cdot(t_{i+1}^{(-l)}-t_i^{(-l)})\cdot\left[l_0(t_i^{(l)})-l_1(t_i^{(-l)})\right]\cdot d'_-(r-r_i)\cdot S_-(z+l)-\right.$$
$$\left.-\sum_{i=1}^{n-1}r_i(t_{i+1}^{(l)}-t_i^{(l)})\cdot\left[l_0(t_i^{(l)})-l_1(t_i^{(l)})\right]\cdot d'_-(r-r_i)S_+(z-l)\right\}- \tag{8}$$
$$-\sum_{i=1}^{n-1}(t_{i+1}^{(R)}-t_i^{(R)})\cdot\left[l_0(t_i^{(R)})-l_1(t_i^{(R)})\right]\cdot S_-(R-r)\cdot d'_-(z-z_i)-q_0\cdot S_-(R-r)\cdot N(z),$$

$$\left.\frac{\partial J}{\partial z}\right|_{z=l+d_1}=-a_+\cdot\left[t_1^{(d)}+\sum_{k=1}^{m-1}(t_{k+1}^{(d)}-t_k^{(d)})\cdot S_-(r-r_k)-t_c\right],$$
$$\left.\frac{\partial J}{\partial z}\right|_{z=-l-d_2}=a_-\cdot\left[t_1^{(-d)}+\sum_{k=1}^{m-1}(t_{k+1}^{(-d)}-t_k^{(-d)})S_-(r-r_k)-t_c\right], \tag{9}$$

$J|_{r\to\infty}=0,\ \ \frac{\partial J}{\partial r}|_{r\to\infty}=0,$ де $d_\pm(z)=\frac{dS_\pm(z)}{dz}$ – асиметричні дельта-функції Дірака.

Наближений аналітичний розв'язок лінійної граничної задачі (8),(9)

Застосувавши інтегральне перетворення Ганкеля за координатою r до граничної задачі (8), (9), приходимо до звичайного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{d^2\overline{J}}{dz^2}-x^2\overline{J}=-x\cdot\left\{\sum_{i=1}^{n-1}r_i\cdot(t_{i+1}^{(-l)}-t_i^{(-l)})\cdot J_1(r_ix)\cdot\left[l_0(t_i^{(-l)})-l_1(t_i^{(-l)})\right]\cdot S_-(z+l)-\sum_{i=1}^{n-1}r_i\cdot J_1(r_ix)\cdot(t_{i+1}^{(l)}-\right.$$
$$\left.-t_i^{(l)})\cdot\left[l_0(t_i^{(l)})-l_1(t_i^{(l)})\right]\cdot S_+(z-l)\right\}-\frac{R\cdot J_1(Rx)}{x}\cdot\left\{\sum_{i=1}^{n-1}(t_{i+1}^{(R)}-t_i^{(R)})\cdot\left[l_0(t_i^{(R)})-l_1(t_i^{(R)})\right]\cdot d'_-(z-z_i)+q_0\cdot N(z)\right\} \qquad (10)$$

і таких граничних умов:

$$\left.\frac{d\overline{J}}{dz}\right|_{z=l+d_1}=\frac{a_+}{x}\cdot\sum_{k=1}^{m-1}(t_{k+1}^{(d)}-t_k^{(d)})\cdot r_k\cdot J_1(r_kx)\ ,$$
$$\qquad (11)$$
$$\left.\frac{d\overline{J}}{dz}\right|_{z=-l-d_2}=-\frac{a_-}{x}\sum_{k=1}^{m-1}r_kJ_1(r_kx)\cdot(t_{k+1}^{(-d)}-t_k^{(-d)})\ ,$$

де $\overline{J}=\int\limits_0^\infty r\cdot J_0(rx)\cdot Jdr$ – трансформанта функції J ; $J_n(V)$ – функція Бесселя першого роду n -го порядку; x – параметр перетворення.

Загальний розв'язок рівняння (10) має вигляд

$$\overline{J}=c_1e^{xz}+c_2e^{-xz}+\frac{1}{x}\cdot\left\{\sum_{i=1}^{n-1}r_i(t_{i+1}^{(-l)}-t_i^{(-l)})\cdot J_1(r_ix)\cdot\left[l_0(t_i^{(-l)})-l_1(t_i^{(-l)})\right]\cdot(1-chx(z+l))\cdot S_-(z+l)-\right.$$
$$\left.-\sum_{i=1}^{n-1}r_i\cdot J_1(r_ix)\cdot(t_{i+1}^{(l)}-t_i^{(l)})\cdot\left[l_0(t_i^{(l)})-l_1(t_i^{(l)})\right]\cdot(1-chx(z-l))\cdot S_+(z-l)\right\}-$$
$$-\frac{R}{x}\cdot J_1(Rx)\cdot\left\{\sum_{i=1}^{n-1}(t_{i+1}^{(R)}-t_i^{(R)})\cdot\left[l_0(t_i^{(R)})-l_1(t_i^{(R)})\right]\cdot chx(z-z_i)\cdot S_-(z-z_i)-\right.$$
$$\left.-\frac{q_0}{x^2}\cdot\left[(1-chx(z+l))\cdot S_-(z+l)-(1-chx(z-l))\cdot S_+(z-l)\ \right]\right\}.$$

Тут c_1,c_2 – сталі інтегрування.

Використавши граничні умови (11), отримаємо такий частковий розв'язок задачі (10), (11):

$$\overline{J}=\frac{1}{x}\cdot\left\{\sum_{i=1}^{n-1}r_i\cdot J_1(r_ix)\cdot(t_{i+1}^{(-l)}-t_i^{(-l)})\cdot\left[l_0(t_i^{(-l)})-l_1(t_i^{(-l)})\right]\cdot\left[(1-chx(z+l))\cdot S_-(z+l)+\frac{shx(2l+d_1)}{shx(2l+d_1+d_2)}\cdot chx(z+l+d_2)\ \right]-\right.$$
$$\left.-\sum_{i=1}^{n-1}r_i\cdot J_1(r_ix)\cdot(t_{i+1}^{(l)}-t_i^{(l)})\cdot\left[l_0(t_i^{(l)})-l_1(t_i^{(l)})\right]\cdot\left[(1-chx(z-l))\cdot S_+(z-l)+\frac{shxd_2}{shx(2l+d_1+d_2)}\cdot chx\cdot(z+l+d_2)\ \right]\right\}-$$
$$-\frac{R}{x}\cdot J_1(Rx)\cdot\left\{\sum_{i=1}^{n-1}(t_{i+1}^{(R)}-t_i^{(R)})\cdot\left[l_0(t_i^{(R)})-l_1(t_i^{(R)})\right]\cdot\left[chx(z-z_i)\cdot S\_(z-z_i)-\frac{shx(l+d_1-z_i)}{shx(2l+d_1+d_2)}\cdot chx(z+l+d_2)\right]-\right. \qquad (12)$$
$$\left.-\frac{q_0}{x^2}\cdot\left[(1-chx(z+l))\cdot S_-(z+l)-(1-chx(z-l))\cdot S_+(z-l)+\frac{shx(2l+d_1)-shxd_2}{shx(2l+d_1+d_2)}\cdot chx(z+l+d_2)\ \right]\right\}+$$
$$+\frac{1}{x^2\cdot shx(2l+d_1+d_2)}\cdot\left[a_+\sum_{k=1}^{m-1}(t_{k+1}^{(d)}-t_k^{(d)})\cdot r_kJ_1(r_kx)\cdot chx(z+l+d_2)+a_-\sum_{k=1}^{m-1}r_kJ_1(r_kx)\cdot(t_{k+1}^{(-d)}-t_k^{(-d)})\cdot chx(z-l-d_1)\right].$$

Застосувавши обернене перетворення Ганкеля до співвідношення (12), знаходимо вираз для функції J

$$
\begin{aligned}
J = {} & \sum_{i=1}^{n-1} r_i \cdot (t_{i+1}^{(-l)} - t_i^{(-l)}) \cdot \left[l_0(t_i^{(-l)}) - l_1(t_i^{(-l)}) \right] \cdot \int_0^{\infty} J_1(r_i x) \cdot J_0(rx) \cdot \left[(1 - chx(z+l)) \cdot S_-(z+l) + \frac{shx(2l+d_1)}{shx(2l+d_1+d_2)} \cdot chx(z+l+d_2) \right] dx - \\
& - \sum_{i=1}^{n-1} r_i \cdot (t_{i+1}^{(l)} - t_i^{(l)}) \cdot \left[l_0(t_i^{(l)}) - l_1(t_i^{(l)}) \right] \cdot \int_0^{\infty} J_1(r_i x) \cdot J_0(rx) \cdot \left[(1 - chx(z-l)) \cdot S_+(z-l) + \frac{shxd_2}{shx(2l+d_1+d_2)} \cdot chx(z+l+d_2) \right] dx - \\
& - R \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} (t_{i+1}^{(R)} - t_i^{(R)}) \cdot \left[l_0(t_i^{(R)}) - l_1(t_i^{(R)}) \right] \cdot \int_0^{\infty} J_1(Rx) \cdot J_0(rx) \cdot \left[chx(z-z_i) \cdot S_-(z-z_i) - \frac{shx(l+d_1-z_i)}{shx(2l+d_1+d_2)} \cdot chx(z+l+d_2) \right] dx - \right. \\
& \left. - q_0 \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} \cdot J_1(Rx) \cdot J_0(rx) \cdot \left[(1 - chx(z+l)) \cdot S_-(z+l) - (1 - chx(z-l)) \cdot S_+(z-l) + \frac{shx(2l+d_1) - shxd_2}{shx(2l+d_1+d_2)} \cdot chx(z+l+d_2) \right] dx \right\} + \\
& + a_+ \cdot \sum_{k=1}^{m-1} r_k (t_{k+1}^{(d)} - t_k^{(d)}) \cdot \int_0^{\infty} J_1(r_k x) \cdot J_0(rx) \cdot \frac{chx(z+l+d_2)}{xshx(2l+d_1+d_2)} dx + \\
& + a_- \cdot \sum_{k=1}^{m-1} r_k (t_{k+1}^{(-d)} - t_k^{(-d)}) \cdot \int_0^{\infty} J_1(r_k x) \cdot J_0(rx) \cdot \frac{chx(z-l-d_1)}{xshx(2l+d_1+d_2)} dx.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Підставивши конкретні залежності коефіцієнтів теплопровідності матеріалів включення та шару в співвідношення (3), (13) та зрівнявши отримані вирази функції J на поверхнях $K_\pm$, S_R, $S_{\pm l}$, приходимо до системи нелінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих значень температури $t_i^{(R)}, t_i^{(l)}, t_i^{(-l)} (i = \overline{1,n})$, $t_k^{(d)}, t_k^{(-d)} (k = \overline{1,m})$.

Шукане температурне поле для нелінійної граничної задачі теплопровідності (1), (2) визначається з нелінійного алгебраїчного рівняння, отриманого з використанням співвідношень (3), (13) після підстановки в них конкретних виразів залежностей коефіцієнтів теплопровідності матеріалів включення та шару.

Часткові приклади та аналіз отриманих результатів

У багатьох практичних випадках існує така залежність коефіцієнтів теплопровідності від температури [4, 5]:

$$l = l^0 \cdot (1 - kt),$$

де l^0, k – опорний і температурний коефіцієнти теплопровідності.

Тоді із використанням виразів (3), (13) отримаємо формули для визначення температури t в області Ω_0

$$t = \frac{\left[1 - \sqrt{1 - 2 \cdot k_0 \cdot \left(\frac{J}{l_0^0} + J_1^* \right)} \right]}{k_0},$$

в областях $\Omega_1 = \{(r, j, z) : r > R, 0 \le j \le 2p,\ -l - d_2 \le z \le l + d_1\}$,
$\Omega_2 = \{(r, j, z) : r \le R, 0 \le j \le 2p, -l - d_2 \le z < -l\}$

$$t = \frac{\left[1 - \sqrt{1 - \frac{2k_1 \cdot J}{l_1^0}} \right]}{k_1},$$

в області $\Omega_3 = \{ (r, j, z) : r \le R, 0 \le j \le 2p, l < z \le z + d_1 \}$

$$t = \frac{\left[1 - \sqrt{1 - 2k_1 \cdot \left(\frac{J}{l_1^0} + J_2^* \right)} \right]}{k_1},$$

де

$$J_1^* = \left\{\left[-\frac{l_1^0}{l_0^0}+1+\frac{1}{2}\left(\frac{l_1^0}{l_0^0}\cdot k_1-k_0\right)\cdot t\right]\cdot t\right\}\Bigg|_{r=R} + \left\{\left[-\frac{l_1^0}{l_0^0}+1+\frac{1}{2}\left(\frac{l_1^0}{l_0^0}\cdot k_1-k_0\right)\cdot t\right]\cdot t\right\}\Bigg|_{z=-l} +$$

$$+\left\{\left[\frac{l_1^0}{l_0^0}-1+\frac{1}{2}\left(k_0-\frac{l_1^0}{l_0^0}\cdot k_1\right)\cdot t\right]\cdot t\right\}\Bigg|_{\substack{r=R\\ z=-l}};$$

$$t\big|_{r=R} = \frac{\left(1-\sqrt{1-\dfrac{2k_1\cdot J\big|_{r=R}}{l_1^0}}\right)}{k_1};\quad t\big|_{z=-l} = \frac{\left(1-\sqrt{1-\dfrac{2k_1\cdot J\big|_{z=-l}}{l_1^0}}\right)}{k_1};$$

$$t\big|_{\substack{r=R\\ z=\pm l}} = \frac{\left(1-\sqrt{1-\dfrac{2k_1\cdot J\big|_{\substack{r=R\\ z=\pm l}}}{l_1^0}}\right)}{k_1};\quad t\big|_{z=l} = \frac{\left(1-\sqrt{1-\dfrac{2k_0\cdot\left(J\big|_{z=l}+J_3^*\right)}{l_0^0}}\right)}{k_0};$$

$$J_2^* = \left\{\left[\frac{l_0^0}{l_1^0}-1+\frac{1}{2}\left(k_1-k_0\cdot\frac{l_0^0}{l_1^0}\right)\cdot t\right]\cdot t\right\}\Bigg|_{z=-l} + \left\{\left[1-\frac{l_0^0}{l_1^0}+\frac{1}{2}\left(k_0\cdot\frac{l_0^0}{l_1^0}-k_1\right)\cdot t\right]\cdot t\right\}\Bigg|_{z=l} +$$

$$+\left\{\left[\frac{l_0^0}{l_1^0}-1+\frac{1}{2}\left(k_1-k_0\cdot\frac{l_0^0}{l_1^0}\right)\cdot t\right]\cdot t\right\}\Bigg|_{\substack{z=l\\ r=R}} + \left\{\left[1-\frac{l_0^0}{l_1^0}+\frac{1}{2}\left(k_0\cdot\frac{l_0^0}{l_1^0}-k_1\right)\cdot t\right]\cdot t\right\}\Bigg|_{\substack{z=-l\\ r=R}};$$

$$J_3^* = \left\{\left[1-\frac{l_1^0}{l_0^0}+\frac{1}{2}\left(k_1\cdot\frac{l_1^0}{l_0^0}-k_0\right)\cdot t\right]\cdot t\right\}\Bigg|_{z=-l} + \left\{\left[1-\frac{l_1^0}{l_0^0}+\frac{1}{2}\left(k_1\cdot\frac{l_1^0}{l_0^0}-k_0\right)\cdot t\right]\cdot t\right\}\Bigg|_{\substack{z=l\\ r=R}} +$$

$$+\left\{\left[\frac{l_1^0}{l_0^0}-1+\frac{1}{2}\left(k_0-k_1\cdot\frac{l_1^0}{l_0^0}\right)\cdot t\right]\cdot t\right\}\Bigg|_{\substack{z=-l\\ r=R}}.$$

На основі числового аналізу встановлено, що достатньо вибрати кількість розбиттів n інтервалів $]-l;l[$ та $]0;R[$ такою, що дорівнює семи, та кількість розбиттів m інтервалу $]0;r_*[$, такою, що дорівнює одинадцяти. Числові розрахунки проведено для таких матеріалів: матеріал шару – кераміка ВК-94-1, матеріал включення – вольфрам, які показують, що врахування наведеної залежності коефіцієнтів теплопровідності від температури приводить до зменшення температурного поля порівняно з нетермочутливою системою (теплофізичні параметри не залежать від температури) на 7% для вибраних матеріалів.

Згодом автори запропонують методику лінеаризації задачі теплопровідності для кусково-однорідного шару, в одному із елементів якого знаходиться чужорідне тепловиділяюче циліндричне включення.

1. Подстригач Я.С. Термоупругость тел неоднородной структуры / Я.С. Подстригач, В.А. Ломакин, Ю.М. Коляно. – М.: Наука, 1984. – 386 с. 2. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К.: Наук. думка, 1992. – 280с. 3. Коляно Ю.М. Температурное поле в термочувствительном многослойном полупространстве / Ю.М. Коляно, В.А. Волос, Е.Г. Иваник, В.И. Гаврыш // Инж. – физ. журнал. – 1994. – 66, №2. – С. 226 – 234. 4. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 376 с.5. Берман Р. Теплопроводность твердых тел. – М. : Мир, 1979 . – 288 с.