Вступ

Відколи створено диференціальне числення, існують диференціальні рівняння. У своїй праці про диференціальне числення (1671 р.) І. Ньютон досліджував розв'язок рівняння $y' = 1 - 3x + y + x^2 + xy$ за допомогою нескінченних рядів. Ґ. Лейбніц (1676 р.) прийшов до дифренціального рівняння $y' = -\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}$, коли розглядав геометричну задачу.

Кожна аналітична функція є розв'язком деякого диференціального рівняння. О. Коші показав, що розв'язками широких класів диференціальних рівнянь та їх систем є аналітичні функції. Тому розв'язки таких рівнянь можна вивчати методами теорії функцій. У цьому напрямі розвивалась аналітична теорія диференціальних рівнянь як частина теорії аналітичних функцій. З іншого боку, питання, які виникають в теорії диференціальних рівнянь, потребують вивчення загальних властивостей аналітичних функцій. Відбувається взаємний вплив двох теорій.

У випадку особливо простих диференціальних рівнянь вдається виразити розв'язки рівняння через відомі функції або звести інтегрування рівнянь до обчислення інтегралів відомих функцій. У загальному випадку це неможливо зробити.

Можливе вирішення проблеми полягає у тому, щоб розглядати диференціальне рівняння як означення функції і вивчати властивості функції за рівнянням. Такий підхід використали C. Briot, T. Bouquet (1875 р.), P. Painlevé (1888, [26]), і ми також його застосовуватимемо.

Здебільшого розв'язками диференціальних рівнянь є багатозначні аналітичні функції, хоча відомі класи диференціальних рівнянь, які мають однозначні цілі й мероморфні розв'язки. Такі розв'язки вивчено найкраще. Цьому сприяє знання загальних властивостей аналітичних функцій і добре розроблений апарат: степеневі ряди, нескінченні добутки, теорія Вімана–Валірона–Макінтайра про максимум модуля, теорія розподілу значень мероморфних функцій тощо. До аналітичних функцій з точкою розгалуження і навіть до однозначних аналітичних функцій у складнішій, ніж комплексна площина чи круг, наприклад, кутовій області, згаданий апарат, як правило, не можна застосувати. Потрібні нові підходи.

Нас цікавитимуть рівняння і системи рівнянь, розв'язками яких є:

— k-значні алгеброїдні функції; особливі точки цих функцій — це ізольовані алгебраїчні точки розгалуження і полюси; випадок $k = 1$ зводиться до цілих або мероморфних функцій;

— мероморфні функції з логарифмічною особливою точкою в ∞; цілі і мероморфні у площині розв'язки є підкласами функцій з логарифмічною особливою точкою у ∞;

— функції, мероморфні в кутовій області; цей клас містить однозначні цілі та мероморфні функції.

Чи має дифренціальне рівняння розв'язки, які задовольняють деяку початкову умову, — одне з основних питань теорії диференціальних рівнянь. Відповідаючи на нього, зазвичай починають з найпростішого випадку — звичайного диференціального рівняння, розв'язаного відносно старшої похідної. Для нього розглянемо задачу Коші. У розділі 4 теорему про існування і єдиність розв'язку цієї задачі спочатку доводимо методом послідовних наближень, а потім — методом мажорант (кожен з методів має свої переваги). Отриманий результат переносимо на систему рівнянь. Розглянемо також складніші випадки задачі Коші для рівнянь з мероморфною правою частиною і з правою частиною, яка містить точку невизначеності для початкових значень. Доведемо теореми Пікара і Пенлеве про аналітичне продовження локального розв'язку, проаналізуємо теореми П. Пенлеве і Л. Фукса про рухомі й нерухомі особливі точки розв'язків.

Розглядаючи лінійні диференціальні рівняння n-го порядку і системи таких рівнянь, у розділі 6 доведемо існування їхніх розв'язків, подамо їхню функціональну класифікацію, дослідимо будову фундаментальної системи розв'язків, оцінимо швидкість зростання розв'язків через зростання коефіцієнтів.

В алгебраїчних рівняннях у розділі 7 розглянемо задачу про розподіл значень розв'язку; подамо оцінку зростання цілих і мероморфних розв'язків, k-значних алгеброїдних розв'язків і розв'язків з логарифмічною особливою точкою в ∞. Приділимо увагу асимптотичним властивостям розв'язків у околі нескінченності й розв'язків рівнянь в кутовій області.

Щоб осмислено читати книгу, необхідно володіти основними поняттями диференціального й інтегрального числення та початками теорії функцій комплексної змінної. Для зручності майже всі відомості, які використані в книзі й потрібні і для досягнення поставлених цілей, детально доведено. Винятки супроводжуються вичерпними посиланнями. Підбір матеріалу з теорії аналітичних функцій визначався лише його задіяністю в аналітичній теорії диференціальних рівнянь. Матеріал, який виходить за межі перших двох університетських курсів, поміщено на початку книги у попередніх відомостях. В межах необхідного розглянуто, наприклад, такі поняття: гомотопічні класи кривих, підсумовування рядів блоками, ряди матриць, голоморфні функції багатьох змінних, неявні функції, властивості функцій, аналітичних на кривій, мероморфне продовження вздовж гомотопних кривих, неперервна вітка функції $\operatorname{Arg} z$ на кривій, індекс кривої, однозначна вітка аналітичної функції $\operatorname{Ln} f(z)$, ріманова поверхня $\operatorname{Ln} z$ та її однозв'язна область, розвинення в ряд в околі алгебраїчної точки розгалуження, мероморфні функції з логарифмічною особливою точкою в ∞.

Дослідження мероморфних розв'язків диференціальних рівнянь з логарифмічною особливою точкою в нескінченності й мероморфних розв'язків у кутовій області потребує вивчення загальних властивостей функцій, мероморфних в кутовій області. Усі результати, які використано, доведено в розділі 7, зокрема, аналог першої основної теореми для характеристик Неванлінни функцій, мероморфних в кутовій області, й оцінку логарифмічної похідної таких функцій.

Добре відомі диференціальні рівняння з розв'язками — алгеброїдними функціями (наприклад, рівняння Пенлеве вищих порядків). Такі рівняння підштовхують до вичення загальних властивостей k-значних алгеброїдних функцій, до опанування теорії алгеброїдних функцій. Розгортаючи таке вичення, одночасно отримуємо необхідні результати і для найважливішого для нас класу мероморфних функцій (якщо $k = 1$, розділ 3 і підрозділ 7.6). Виділимо тут ріманову поверхню алгеброїдної функції, її характеристики Неванлінни, доведення першої основної теореми розподілу значень. З матеріалу розділу 3 слід також згадати властивості суперпозиції раціональної та алгеброїдної функцій. У підрозділі 7.6 доведено важливу для теорії розподілу значень лему про логарифмічну похідну. Це твердження стало ключем до доведення відомої теореми Мальмквіста і започаткувало етап застосування теорем розподілу значень у диференціальних рівняннях.

Розділи, в яких викладено перерахований матеріал, можна використати як підручник з відповідних розділів теорії аналітичних функцій.

У викладі теорії Вімана–Валірона (розділ 8) дотримуємось підходу Макінтайра [69] у викладі Ш. Стреліца [33].

Важливим класом рівнянь другого порядку є рівняння Пенлеве, які визначають шість нових класів трансцендентних функцій Пенлеве, два з яких, взагалі кажучи, багатозначні. Ці функції широко застосовують. Щодо цих рівнянь Пенлеве є багато літератури, див. наприклад, [1], [8], [11], тому не зупинятимемось на їх вивченні. Наш підхід дає змогу розглянути ширший клас, так звані квазі-Пенлеве. Результати розділу 9.1 отримано в працях Ш. Шімомури. У підрозділі 9.2, на прикладі першого рівняння Пенлеве, ми лише показуємо, наслідуючи виклад з [11], як працює метод масштабування ‘scaling method’, який запропонував Н. Штайнмец.

Початкові варіанти розділів 2, 3, 5–7 написав А. З. Мохонько, а розділи 4, 9 — І. Е. Чижиков. Розділи 1, 8 автори підготували спільно.

Висловлюємо подяку проф. Ш. Шімомурі за надання своїх публікацій, проф. А. І. Бандурі, доц. І. Я. Олексіву, проф. О. Б. Скасківу, за їхні цінні зауваження щодо частин книги. Дякуємо також проф. О. Єрьоменку та проф. І. Лайне за консультації.